ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор ДонГУ
_______________В.И. Сторожев
«23» _____06_________2023г.

ПРОГРАММА

вступительного экзамена
по специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Донецк – 2023

Программа вступительного экзамена по направлению подготовки **01.06.01 – Математика и механика**, по специальности **1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный**

ВВЕДЕНИЕ

Программа вступительного экзамена по специальности *1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»* разработана с целью проверки знаний абитуриента, поступающего в аспирантуру, обеспечения подготовки научных и научно-педагогических кадров и аттестации научных и научно-педагогических кадров высшей квалификации в соответствии с Номенклатурой специальностей научных работников, утвержденной федеральным органом исполнительной власти, обеспечивающим формирование и реализацию государственной политики в сфере образования и науки.

ПРОГРАММА СОДЕРЖИТ:

I. Понятия и факты, которые должен знать студент, перечень теорем и формул, которые необходимо знать с доказательством.

II. Литературу.

Алгебра

I

1. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Извлечение корней из комплексных чисел.
2. Определитель квадратной матрицы. Минор и алгебраическое дополнение. Разложение определителя по элементам строки или столбца.
3. Обратимые матрицы. Критерий обратимости матрицы и формула обратной матрицы.
4. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители, каноническое разложение. Простые и кратные корни. Корни многочлена и его производной. Критерий простоты корней многочлена.
5. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на неприводимые множители. Существование вещественного корня у многочлена с вещественными коэффициентами нечетной степени.
6. Координаты вектора и их свойства. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса к другому.
7. Подпространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений и его размерность. Фундаментальная система решений и общее решение.
8. Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений. Критерий совместности (теорема Кронекера-Капелли). Частное и общее решения.

9. Процесс ортогонализации и существование ортонормированных базисов в евклидовом пространстве. Координаты вектора в ортонормированном базисе.
10. Вещественные квадратичные формы и их инварианты при линейных невырожденных преобразованиях. Закон инерции для вещественных квадратичных форм.
11. Линейные операторы. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора и их свойства. Характеристический многочлен линейного оператора.

II

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1974.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука. 1977.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1973.

Математический анализ

I

1. Понятие ограниченной и сходящейся в *Rn* последовательности, связь между ними. Лемма Больцано-Вейерштрасса (доказать).
2. Понятие непрерывной функции одного переменного в точке и на множестве. Свойства функций, непрерывных на отрезке (доказать одно).
3. Понятие дифференцируемой в точке и на множестве функции одного переменного, необходимое условие дифференцируемости. Теорема Лагранжа о конечных приращениях (доказать).
4. Понятие дифференцируемой функции многих переменных в точке. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке (доказать последнее).
5. Понятие сходящегося числового ряда. Критерий и признаки сравнения сходимости положительного числового ряда (доказать признак сравнения в предельной форме).
6. Понятие интегрируемой на отрезке $[a;\ b]$ функции, необходимое условие интегрируемости, суммы Дарбу, критерий Дарбу, теорема об интегрируемости непрерывной на отрезке функции (доказать последнюю теорему).
7. Поточечная и равномерная сходимости функциональной последовательности на множестве, предельная функция. Теорема о непрерывности предельной функции функциональной последовательности (доказать).
8. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Критерии равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (доказать).
9. Собственный интеграл, зависящий от параметра (СИЗП). Теорема о предельном переходе для СИЗП, следствие о непрерывности СИЗП в точке.

10. Несобственный интеграл с единственной особой точкой, его сходимость. Критерии сходимости несобственного интеграла (доказать один).
11. Понятие криволинейного интеграла второго рода в $R2$. Формула Грина (доказать для областей типа (Т)).

II

1. Архипов Г.В., Садовничий В.А., Чубаринов В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. М.: Наука, 1979.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Наука. Т.1, 1985; Т.2, 1987; Т.3,1988.
4. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Изд-во МФТИ, 2000.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1,2,3. М.: Наука, 1970.

Теория функций комплексного переменного

I

1. Критерий дифференцируемости функции комплексного переменного в точке области. Условия Коши-Римана.
2. Интегральная теорема Коши. Доказательство Гурса для треугольника.
3. Теорема о разложении аналитической функции в ряд Тейлора.
4. Теорема о разложении аналитической в кольце функции в ряд Лорана.
5. Теорема о логарифмическом вычете.
6. Принцип сохранения области.

II

1. Маркушевич А.И. Краткий курс теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1978. 416 с.
2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1967. 444 с.
3. Сидоров Ю.Ф., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976. 408 с.

Теория функций и функциональный анализ

I

1. Принцип сжимающих отображений и его применения.
2. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейных функционалов для вещественного линейного пространства.
3. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза.

4. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве.
5. Теорема Банаха об обратном операторе.
6. Резольвента и спектр линейного оператора. Точечный, непрерывный и остаточный спектры. Ограниченность и замкнутость спектра непрерывного оператора.
7. Теорема о спектре линейного вполне непрерывного оператора.
8. Определения: измеримое множество, мера Лебега, интеграл Лебега.

II

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. - 624 с.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.- 520 с.
3. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986. - 368 с.

Аналитическая, дифференциальная геометрия и топология

I

1. Общее уравнение плоскости в пространстве, параметрические уравнения прямой в пространстве.
2. Центр кривой второго порядка. Исследование уравнений центра.
3. Теорема о кривизне кривой, вычислительные формулы.
4. Теорема о кручении кривой.
5. Уравнения для отыскания главных кривизн и главных направлений поверхностей.
6. Непрерывные отображения топологических пространств, их свойства.

II

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1988.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.-Л.: ГИТТЛ. – 1951.
3. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. - М.: Высш. шк., 1979.

Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики

I

1. Теорема Коши-Пикара для уравнения $y' = f(x;\ y)$ в случае прямоугольной области.
2. Линейное неоднородное уравнение первого порядка. Решение методом Лагранжа.
3. Фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка с непрерывными коэффициентами (определение, существование, общее решение).

4. Построение фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения n- го порядка с постоянными коэффициентами.
5. Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения n- го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена.
6. Основные уравнения математической физики: уравнение теплопроводности, уравнения Лапласа и Пуассона, волновое уравнение и краевые условия для них.
7. Метод Фурье для решения уравнения колебаний струны, закрепленной на концах.
8. Гармонические функции и их свойства.
9. Решение задачи Дирихле для круга.
10. Классификация квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка и приведение их к каноническому виду.

II

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
3. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
6. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Программа разработана на основании паспорта научной специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Программа одобрена на заседании Ученого совета факультета математики и информационных технологий, протокол от «18» мая 2023г. № 9.

Декан И.А. Моисеенко