

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Журнал ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

№ 1 (90)

2025

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. **А.В. Анциферов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.О. Ватulyян**, д-р техн. наук, проф. **Л.П. Вовк**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Д.В. Георгиевский**, д-р техн. наук, проф. **В.А. Глазунов**, д-р техн. наук, с.н.с. **А.А. Глухов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**, д-р техн. наук, проф. **Н.Н. Грищенко**, д-р техн. наук, с.н.с. **В.А. Дрибан**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Зыза**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **Б.И. Коносеvич**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Мазнев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**, д-р техн. наук, проф. **В.Ф. Мушчанов**, д-р физ.-мат. наук, доц. **Р.Н. Нескорoдев**, д-р техн. наук, проф. **В.Н. Павлыш**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Н. Соловьев**, д-р техн. наук, доц. **С.В. Сторожев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **С.Н. Царенко**, д-р техн. наук, проф. **В.П. Шамота**.

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**
DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**
EXECUTIVE SECRETARY: Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. **A.V. Antsiferov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.O. Vatulyan**, Dr. of tech., prof. **L.P. Vovk**, Dr. of phys. and math., prof. **D.V. Georgievskiy**, Dr. of tech., prof. **V.A. Glazunov**, Dr. of tech., senior researcher **A.A. Glukhov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**, Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**, Dr. of tech., prof. **N.N. Grishchenkov**, Dr. of tech., senior researcher **V.A. Driban**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Zyza**, Dr. of phys. and math., senior researcher **B.I. Konosevich**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Maznev**, Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **V.F. Mushchanov**, Dr. of phys. and math., docent **R.N. Neskorodev**, Dr. of tech., prof. **V.N. Pavlysh**, Dr. of phys. and math., prof. **A.N. Soloviev**, Dr. of tech., docent **S.V. Storozhev**, Dr. of phys. and math., docent **S.N. Tsarenko**, Dr. of tech., prof. **V.P. Shamota**.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru, URL: <http://donnu.ru/jtam>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки).

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Свидетельство о регистрации: серия AAA № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное
учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет», 2025

№ 1 (90) / 2025

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Механика деформируемого твердого тела

- Глушанков Е.С.* Термоэлектромагнитоупругое состояние конечной пластинки из пьезоматериала в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием разности температур на контурах 5
- Калоеров С.А., Ермаков О.Э., Мироненко А.Б.* Решение задачи об изгибе кусочно-однородной электромагнитоупругой тонкой плиты 23
- Глухов А.А., Пачева М.Н., Сторожев В.И., Сторожев С.В.* Базисные решения уравнений распространения волн сдвига в полубесконечных трансверсально-изотропных функционально-градиентных телах с многофакторной приповерхностной неоднородностью 35
- Мирончук А.И.* Решение периодической задачи линейной вязкоупругости для тонких плит с эллиптическими отверстиями или трещинами..... 42

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Полянский Д.Д.* Нечетко-множественный учет параметрической неопределенности в модели механического расчета трубчатого теплообменника..... 52
- Ведяйкина О.И., Коновалова В.А., Старикова М.В., Хазов П.А., Сатапов А.А.* Аэродинамика высотных комплексов с интегрированными ветрогенерирующими установками..... 62
- Малютина Т.П., Номбре С.Б., Сторожев С.В.* Нечетко-множественные модификации расчетных соотношений для определения эффективных физико-механических характеристик металлокерамических функционально-градиентных материалов 73

**Геомеханика, разрушение горных пород,
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика**

<i>Грищенко Н.Н., Бардакова Е.А.</i> Особенности влияния размеров зон водопроводящих трещин на процесс сдвижения земной поверхности при затоплении горных выработок.....	83
<i>Лобков Н.И., Радченко А.Г.</i> Особенности сдвижения слоистого породного массива над выработанным пространством.....	91
<i>Манько А.В., Муравьева Е.А.</i> Исследование деформированного состояния трещиноватого скального массива физическим экспериментом на эквивалентных материалах.....	98
<i>Голубев Ф.М., Ребенок Е.В.</i> Исследование влияния структурных особенностей горного массива на параметры сдвижения земной поверхности при добыче угля.....	109

№ 1 (90) / 2025

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Solid Mechanics

- Glushankov E.S.* The thermo-electro-magneto-elastic state of the finite multiply connected piezoelectric plate in conditions of the non-uniform convective heat transfer under temperature difference action..... 5
- Kaloerov S.A., Ermakov O.E., Mironenko A.B.* Solving the problem of bending a piecewise homogeneous electro-magneto-elastic thin plate..... 23
- Glukhov A.A., Pacheva M.N., Storozhev V.I., Storozhev S.V.* Basic solutions of the equations of shear wave propagation in semi-infinite transversal isotropic functional gradient bodies with multifactor near-surface heterogeneity. 35
- Mironchuk A.I.* Solution of the periodic problem of linear viscoelasticity for thin plates with elliptical holes or cracks..... 42

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Polyansky D.D.* Fuzzy-set accounting for parametric uncertainty in a model of mechanical calculation of a tubular heat exchanger..... 52
- Vediaikina O.I., Konovalova V.A., Starikova M.V., Khazov P.A., Satanov A.A.* Aerodynamics of high-rise complexes with integrated wind generating plants..... 62
- Malutina T.P., Nombre S.B., Storozhev S.V.* Fuzzy-set modifications of calculation relations for determining effective physical-mechanical characteristics of metal-ceramic functional-gradient materials..... 73

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics

<i>Grishchenkov N.N., Bardakova E.A.</i> Features of the influence of the size of the zones of water supply cracks on the process of displacement of the Earth's surface during flooding of mine workings.....	83
<i>Lobkov N.I., Radchenko A.G.</i> Features of the displacement of a layered rock mass above the developed space.....	91
<i>Manko A.V., Muraveva E.A.</i> Study of deformed state of fractured rock massif by physical experiment on equivalent materials.....	98
<i>Golubev Ph.M., Rebenok E.V.</i> Study of the influence of structural features of a mountain massif on the parameters of earth's surface displacement during coal mining.....	109

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-1-5-22

EDN:NOMRFB

©2025. Е.С. Глушанков¹**ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ
КОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА
В УСЛОВИЯХ НЕРАВНОМЕРНОГО КОНВЕКТИВНОГО
ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
РАЗНОСТИ ТЕМПЕРАТУР НА КОНТУРАХ**

Представлено решение задачи о действии разности температур в конечной многосвязной пластинке из пьезоматериала с отверстиями, находящейся в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой. Решение построено с применением конформных отображений, функций обобщенных комплексных переменных и метода наименьших квадратов. С помощью численных исследований установлено влияние геометрических особенностей пластинки, тепловых, механических и электромагнитных свойств ее материала, а также распределения коэффициента теплообмена по граничным контурам на распределение напряжений в пластинке.

Ключевые слова: многосвязная пластинка, конвективный теплообмен, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. В различных научно-технологических отраслях находят применение конструкционные элементы в виде тонких пластинок из пьезоматериалов, которые в процессе эксплуатации подвергаются воздействию тепловых, механических и электромагнитных полей, вследствие чего в них может возникать высокая концентрация напряжений, подлежащая учету при проектировании и эксплуатации конструкций. К настоящему времени разработано большое количество методов определения термоэлектромагнитоупругого состояния тел из пьезоматериалов, решено большое количество задач по этой проблематике [1–8].

¹Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий Донецкого государственного университета, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Решен ряд задач термоэлектромеханикоупругости и для пластинок, находящихся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой [9–11].

В данной статье представлено решение задачи определения термоэлектромеханикоупругого состояния конечной многосвязной пластинки из пьезоматериала, находящейся под действием разности температур, когда на контурах пластинки имеет место неравномерный конвективный теплообмен с внешней средой. С использованием потенциалов обобщенных комплексных переменных, конформных отображений и метода наименьших квадратов, исходная задача сведена к определению неизвестных коэффициентов разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера. Проведены численные исследования термоэлектромеханикоупругого состояния конечной пластинки, установлены закономерности влияния характеристик конвективного теплообмена, тепловых, механических и электромагнитных свойств материала, а также геометрических особенностей на распределение напряжений в пластинке.

1. Постановка задачи. Рассмотрим конечную пластинку из пьезоматериала, занимающую многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l (рис. 1). Будем считать, что внешний контур L_0 целиком лежит внутри произвольного эллиптического контура L_0^+ . Центры эллипсов L_0^+ и L_l ($l = \overline{1, L}$) находятся в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$; полуоси контуров – a_l, b_l ; углы поворота – φ_l . Контур L_l могут располагаться произвольно относительно друг друга, касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы. На каждом из контуров L_l имеет место конвективный теплообмен с внешней средой температуры $\mathfrak{T}_l$ с неравномерно распределенным по контуру коэффициентом теплообмена $h_l(\tau)$. Контур пластинки свободны от внешних усилий или жестко подкреплены, электромагнитные воздействия отсутствуют.

Определение термоэлектромеханикоупругого состояния пластинки сводится к последовательному решению задачи теплопроводности, а затем – задачи термоэлектромеханикоупругости [7–9]. Для решения этих задач будем использовать теорию комплексных потенциалов.

Решение задачи теплопроводности сводится к определению комплексного потенциала теплопроводности $F_5(z_5)$, являющегося функцией обобщенной комплексной переменной

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (1)$$

из граничных условий задачи теплопроводности [7–9]. Здесь μ_5 – корень харак-

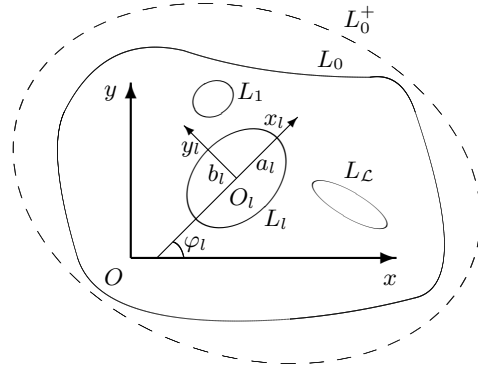


Рис. 1

теристического уравнения задачи теплопроводности

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (2)$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки. После определения функции $F_5(z_5)$ становится возможным вычислять значения температуры T и плотностей потока тепла q_x, q_y в любой точке пластинки по следующим формулам [7–9]:

$$T = 2 \operatorname{Re} F_5(z_5), \quad (3)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa (\mu_5, -1) F_5'(z_5), \quad (4)$$

где $\kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$.

Решение задачи теплопроводности сводится к определению комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$), являющихся функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (5)$$

из граничных условий задачи термоэлектромагнитоупругости [7–9]. Здесь μ_k – корни характеристического уравнения задачи электромагнитоупругости

$$l_8(\mu) = 0; \quad (6)$$

где

$$l_8(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix};$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули материала; β_{ij} , ν_{ij} и χ_{ij} – коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости материала; α_i – коэффициенты теплового расширения материала; t_i и m_i – пирозлектрические и пирромагнитные модули материала. После определения этих функций становится возможным вычислять значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния (напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$; индукций электромагнитного поля $D_x,$

D_y, B_x, B_y ; напряженностей электромагнитного поля E_x, E_y, H_x, H_y ; перемещений u, v ; потенциалов электромагнитного поля φ, ψ) в любой точке пластинки по следующим формулам [7–9]:

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k); \quad (7)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi'_k(z_k); \quad (8)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (9)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (10)$$

Здесь

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1 \mu_5^2 + \alpha_6 \mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1 \mu_5 - t_2,$$

$$l_{1m}(\mu_5) = m_1 \mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11} \mu_k^2 - s_{16} \mu_k + s_{12} - (g_{11} \mu_k - g_{12}) \nu_k - (p_{11} \mu_k - p_{12}) \rho_k + \frac{\delta_{k5} \alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12} \mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21} \mu_k - g_{22}) \nu_k - (p_{21} \mu_k - p_{22}) \rho_k + \frac{\delta_{k5} \alpha_2}{r_5 \mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}m_1}{r_5};$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

2. Определение комплексных потенциалов. Комплексные потенциалы $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) в общем случае многосвязности имеют вид [7–9]

$$F_5(z_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\text{sgn } l}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\text{sgn } l}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Здесь D_{5l} – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий; $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$; z_{5l} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (1) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{5ln} – коэффициенты, определяемые из граничных условий;

$$\varphi_{50n}(z_5) = \left(\frac{z_5 - z_{50}}{R_{50}} \right)^n; \quad \varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

ζ_{5l} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl});$$

A_{kl} , B_{kl} ($k = \overline{1, 4}$) – постоянные, определяемые из систем уравнений

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

где $A_{5l} = r_5 D_{5l}$; $B_{5l} = r_5 (c_{51l} R_{5l} - D_{5l} z_{5l})$; $w_{kl}(z_k) = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (5) произвольным точкам внутри контуров L_l ; a_{kln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий;

$$\varphi_{k0n}(z_k) = \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n; \quad \varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

ζ_{kl} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рисунок 1) имеют вид [7–9]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy –

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – угловая характеристика уравнения эллипса в параметрической форме.

Комплексные переменные ζ_{5l} , ζ_{kl} являются параметрами конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{5l}| \geq 1$, $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{5l} , L_{kl} , получаемых из L_l аффинными преобразованиями (1), (5) [7–9]:

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

На контурах L_l функция $F_5(z_5)$ должна удовлетворять граничному условию задачи теплопроводности [12]

$$2 \operatorname{Re} (h_l(\tau) F_5(\tau_5) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_5) F_5'(\tau_5)) = h_l(\tau) \mathfrak{I}_l, \quad (14)$$

где $\delta_{5,s}(\tau_5) = d\tau_5/ds$, s – дуга контура отверстия; τ – аффикс граничной точки; τ_5 – точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (1).

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоэлектромагнитоупругости [7–9]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) = \left(\frac{df_{l1}}{ds}, \frac{df_{l2}}{ds}, \frac{df_{l3}}{ds}, \frac{df_{l4}}{ds} \right), \quad (15)$$

где $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$; τ_k – точки, получаемые из граничной точки при аффинном преобразовании (5). Для неподкрепленных контуров L_l следует принимать

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (u_l(\tau), v_l(\tau), c_{l3}, c_{l4}),$$

где c_{li} – неизвестные постоянные интегрирования; $u_l(\tau)$, $v_l(\tau)$ – заданные на контурах значения перемещений.

3. Определение неизвестных постоянных. Неизвестные постоянные D_{5l} , c_{5ln} , a_{kln} определяются из граничных условий (14) и (15) после подстановки в них функций (11) и (12). Граничные условия будем удовлетворять с помощью метода наименьших квадратов [7–9]. Для этого на контурах L_i ($i = \overline{0, \mathcal{L}}$) выбираются системы точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{0, \mathcal{M}_i}$), в которых необходимо минимизировать невязку граничных условий.

В задаче теплопроводности, подставляя функцию (11) в граничное условие (14), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных D_{5l} , c_{5ln} :

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left(h_l(\tau_{im}) w_{5l}(\tau_{5im}) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_{5im}) w'_{5l}(\tau_{5im}) \right) D_{5l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} \left(h_l(\tau_{im}) \varphi_{5ln}(\tau_{5im}) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_{5im}) \varphi'_{5ln}(\tau_{5im}) \right) c_{5ln} = h_l(\tau_{im}) \mathfrak{T}_l \quad (16) \\ & (i = \overline{0, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}), \end{aligned}$$

где $\tau_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$, τ_{im} – аффикс точки M_{im} . После решения системы (16) с использованием метода сингулярных разложений [13] постоянные D_{5l} , c_{5ln} становятся известными, а, следовательно, известна и функция $F_5(z_5)$. После этого можно в любой точке пластинки определять значения температуры и плотностей потока тепла по формулам (3), (4) [7–9].

В задаче термоэлектромагнитоупругости, подставляя функции (12) в граничные условия (15), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных a_{kln} :

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = \\ & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - 2 \operatorname{Re} d_{5ip} \delta_{5,s}(\tau_{5im}) r_5 F_5(\tau_{5im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \quad (17) \\ & (i = \overline{0, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 4}), \end{aligned}$$

где $\tau_{kjm} = x_{jm} + \mu_k y_{jm}$. После решения системы (17) с использованием метода сингулярных разложений [13] постоянные a_{kln} становятся известными, а следовательно, известны и функции $\Phi_k(z_k)$. После этого можно в любой точке пластинки определять основные характеристики термоэлектромагнитоупругого состояния по формулам (3), (4) [7–9].

4. Численные исследования. Были проведены численные исследования для конечной пластинки из композита на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$. Физико-механические постоянные этого материала [14]:

$$s_{11} = 7,165s_0, \quad s_{22} = 6,797s_0, \quad s_{66} = 19,912s_0, \quad s_{12} = -2,337s_0,$$

$$\begin{aligned}
 g_{16} &= 2,028g_0, \quad g_{21} = -0,496g_0, \quad g_{22} = 1,157g_0, \\
 p_{16} &= 1,850p_0, \quad p_{21} = 0,576p_0, \quad p_{22} = 1,186p_0, \\
 \beta_{11} &= 0,156\beta_0, \quad \beta_{22} = 0,137\beta_0, \quad \nu_{11} = -0,190\nu_0, \quad \nu_{22} = -0,185\nu_0, \\
 \chi_{11} &= 0,336\chi_0, \quad \chi_{22} = 0,119\chi_0, \quad \alpha_1 = 8,530\alpha_0, \quad \alpha_2 = 1,990\alpha_0, \\
 t_2 &= 133t_0, \quad m_2 = 133m_0, \quad k_{11} = 2,5k_0, \quad k_{22} = 2,5k_0.
 \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 s_0 &= 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \\
 \beta &= 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad \nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}, \quad \chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \\
 \alpha_0 &= 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad t_0 = 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{К})^{-1}, \\
 m_0 &= 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}, \quad k_0 = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}.
 \end{aligned}$$

При реализации расчетов с применением разработанной методики количество членов в рядах Лорана в функциях (11), (12) и количество «коллокационных» точек M_{im} на контурах L_i , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (16) и (17), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали численные исследования, необходимо было в указанных рядах оставлять от 50 до 100 членов, на каждом из контуров выбирать от 500 до 1200 «коллокационных» точек. При этом, решались задачи термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда при проведении расчетов учитываются все свойства материала пластинки, и термоупругости (ТУ), когда электромагнитные свойства материала не учитываются.

В таблицах 1 и 2 для концентрического кольца из вышеуказанного материала с внешним радиусом r_0 и внутренним радиусом r_1 ($a_0 = b_0 = r_0$, $a_1 = b_1 = r_1$) (рис. 2), через неподкрепленные контуры которого действует конвективный теплообмен с внешними средами температур $\mathfrak{T}_0$ и $\mathfrak{T}_1$ с коэффициентами $h_0 = h_1 = H(1 + \cos \theta)$ и $h_0 = h_1 = H(1 + \sin \theta)$ соответственно, с точностью до множителя $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{T}_1$ приведены значения напряжений σ_s/a_0 в некоторых точках контура отверстия с центральным углом θ на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения Ha для некоторых значений толщины кольца $(r_0 - r_1)/r_1$ в случае задачи ТЭМУ.

В таблицах 3 и 4 приведены аналогичные значения напряжений σ_s/a_0 в некоторых точках контура отверстия для случая задачи ТУ.

В таблицах 5–8 для всех вышеописанных случаев приведены значения напряжений σ_s/a_0 в некоторых точках внешнего контура с центральным углом θ на площадках, перпендикулярных контуру.

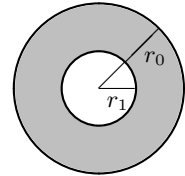


Рис. 2

Таблица 1. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
10^{-2}	0	0, 000	0, 001	0, 003	0, 005	0, 015	0, 032
	$\pi/6$	0, 000	0, 001	0, 003	0, 006	0, 015	0, 032
	$\pi/3$	0, 000	0, 001	0, 002	0, 004	0, 009	0, 018
	$\pi/2$	0, 000	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 005	-0, 016
	$2\pi/3$	0, 000	0, 000	0, 001	0, 002	0, 006	0, 014
	$5\pi/6$	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 005	0, 020
	π	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 001	0, 003	0, 018
10^{-1}	0	0, 003	0, 014	0, 027	0, 049	0, 134	0, 265
	$\pi/6$	0, 003	0, 014	0, 029	0, 053	0, 138	0, 265
	$\pi/3$	0, 002	0, 011	0, 021	0, 036	0, 081	0, 146
	$\pi/2$	0, 001	0, 001	-0, 002	-0, 009	-0, 050	-0, 136
	$2\pi/3$	0, 000	0, 003	0, 008	0, 017	0, 053	0, 116
	$5\pi/6$	0, 000	-0, 002	-0, 003	0, 001	0, 047	0, 166
	π	-0, 001	-0, 004	-0, 007	-0, 010	0, 028	0, 149
10^0	0	0, 027	0, 123	0, 210	0, 329	0, 674	1, 037
	$\pi/6$	0, 025	0, 121	0, 224	0, 365	0, 700	1, 045
	$\pi/3$	0, 019	0, 098	0, 170	0, 251	0, 417	0, 592
	$\pi/2$	0, 008	0, 006	-0, 023	-0, 082	-0, 293	-0, 559
	$2\pi/3$	0, 003	0, 029	0, 066	0, 119	0, 279	0, 486
	$5\pi/6$	-0, 004	-0, 019	-0, 023	0, 006	0, 263	0, 703
	π	-0, 006	-0, 031	-0, 056	-0, 068	0, 163	0, 634
10^1	0	0, 203	0, 505	0, 610	0, 714	1, 086	1, 407
	$\pi/6$	0, 189	0, 502	0, 676	0, 853	1, 181	1, 452
	$\pi/3$	0, 148	0, 446	0, 588	0, 678	0, 790	0, 882
	$\pi/2$	0, 059	-0, 021	-0, 163	-0, 324	-0, 615	-0, 848
	$2\pi/3$	0, 027	0, 179	0, 307	0, 422	0, 635	0, 795
	$5\pi/6$	-0, 026	-0, 040	0, 026	0, 201	0, 735	1, 194
	π	-0, 043	-0, 093	-0, 102	-0, 034	0, 529	1, 079
10^2	0	0, 563	0, 670	0, 670	0, 717	1, 090	1, 417
	$\pi/6$	0, 531	0, 688	0, 787	0, 923	1, 222	1, 476
	$\pi/3$	0, 440	0, 705	0, 796	0, 835	0, 875	0, 918
	$\pi/2$	0, 176	-0, 038	-0, 209	-0, 371	-0, 650	-0, 882
	$2\pi/3$	0, 144	0, 440	0, 570	0, 658	0, 797	0, 881
	$5\pi/6$	0, 002	0, 190	0, 376	0, 623	1, 084	1, 405
	π	-0, 042	0, 095	0, 155	0, 286	0, 843	1, 283
10^3	0	0, 627	0, 619	0, 608	0, 663	1, 064	1, 405
	$\pi/6$	0, 609	0, 663	0, 753	0, 893	1, 207	1, 468
	$\pi/3$	0, 562	0, 752	0, 825	0, 853	0, 879	0, 915
	$\pi/2$	0, 295	0, 038	-0, 142	-0, 315	-0, 625	-0, 876
	$2\pi/3$	0, 354	0, 633	0, 736	0, 787	0, 854	0, 903
	$5\pi/6$	0, 244	0, 452	0, 610	0, 811	1, 179	1, 454
	π	0, 207	0, 356	0, 392	0, 494	0, 974	1, 357
∞	0	0, 543	0, 562	0, 566	0, 635	1, 053	1, 400
	$\pi/6$	0, 557	0, 623	0, 724	0, 873	1, 199	1, 463
	$\pi/3$	0, 584	0, 756	0, 827	0, 854	0, 878	0, 911
	$\pi/2$	0, 413	0, 098	-0, 100	-0, 284	-0, 613	-0, 873
	$2\pi/3$	0, 582	0, 755	0, 826	0, 854	0, 878	0, 911
	$5\pi/6$	0, 554	0, 622	0, 723	0, 873	1, 199	1, 463
	π	0, 536	0, 560	0, 564	0, 634	1, 052	1, 400

Таблица 2. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
10^{-2}	$-\pi/2$	0, 000	0, 000	0, 001	0, 001	-0, 002	-0, 011
	$-\pi/3$	0, 000	0, 000	0, 001	0, 001	0, 005	0, 013
	$-\pi/6$	0, 000	0, 000	0, 001	0, 002	0, 008	0, 023
	0	0, 000	0, 001	0, 001	0, 002	0, 009	0, 025
	$\pi/6$	0, 000	0, 001	0, 002	0, 004	0, 013	0, 030
	$\pi/3$	0, 000	0, 001	0, 002	0, 004	0, 010	0, 020
	$\pi/2$	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 003	-0, 009	-0, 020
10^{-1}	$-\pi/2$	0, 001	0, 003	0, 006	0, 007	-0, 012	-0, 091
	$-\pi/3$	0, 001	0, 003	0, 007	0, 014	0, 047	0, 117
	$-\pi/6$	0, 001	0, 005	0, 009	0, 018	0, 071	0, 198
	0	0, 001	0, 005	0, 010	0, 020	0, 085	0, 216
	$\pi/6$	0, 001	0, 007	0, 017	0, 038	0, 122	0, 255
	$\pi/3$	0, 002	0, 011	0, 023	0, 041	0, 096	0, 170
	$\pi/2$	0, 001	-0, 001	-0, 009	-0, 025	-0, 081	-0, 167
10^0	$-\pi/2$	0, 006	0, 031	0, 052	0, 063	-0, 063	-0, 380
	$-\pi/3$	0, 007	0, 032	0, 061	0, 110	0, 272	0, 461
	$-\pi/6$	0, 009	0, 043	0, 082	0, 143	0, 409	0, 799
	0	0, 011	0, 050	0, 088	0, 157	0, 471	0, 866
	$\pi/6$	0, 013	0, 066	0, 140	0, 275	0, 649	0, 995
	$\pi/3$	0, 016	0, 099	0, 186	0, 291	0, 501	0, 645
	$\pi/2$	0, 010	-0, 009	-0, 064	-0, 156	-0, 395	-0, 645
10^1	$-\pi/2$	0, 057	0, 199	0, 239	0, 184	-0, 202	-0, 614
	$-\pi/3$	0, 059	0, 194	0, 278	0, 366	0, 546	0, 711
	$-\pi/6$	0, 073	0, 256	0, 383	0, 518	0, 887	1, 255
	0	0, 088	0, 267	0, 367	0, 496	0, 918	1, 291
	$\pi/6$	0, 106	0, 329	0, 500	0, 718	1, 118	1, 397
	$\pi/3$	0, 128	0, 444	0, 602	0, 706	0, 820	0, 878
	$\pi/2$	0, 083	0, 010	-0, 132	-0, 295	-0, 605	-0, 854
10^2	$-\pi/2$	0, 297	0, 442	0, 327	0, 118	-0, 364	-0, 734
	$-\pi/3$	0, 291	0, 469	0, 524	0, 585	0, 718	0, 824
	$-\pi/6$	0, 325	0, 574	0, 691	0, 811	1, 128	1, 417
	0	0, 345	0, 513	0, 552	0, 636	1, 035	1, 382
	$\pi/6$	0, 379	0, 565	0, 687	0, 854	1, 193	1, 454
	$\pi/3$	0, 423	0, 690	0, 781	0, 826	0, 871	0, 908
	$\pi/2$	0, 294	0, 061	-0, 126	-0, 300	-0, 616	-0, 871
10^3	$-\pi/2$	0, 560	0, 455	0, 223	-0, 033	-0, 481	-0, 802
	$-\pi/3$	0, 558	0, 691	0, 733	0, 770	0, 832	0, 887
	$-\pi/6$	0, 551	0, 648	0, 739	0, 869	1, 185	1, 453
	0	0, 528	0, 570	0, 573	0, 641	1, 050	1, 396
	$\pi/6$	0, 526	0, 615	0, 719	0, 871	1, 199	1, 461
	$\pi/3$	0, 548	0, 737	0, 815	0, 848	0, 877	0, 911
	$\pi/2$	0, 380	0, 078	-0, 112	-0, 290	-0, 614	-0, 872
∞	$-\pi/2$	0, 430	0, 105	-0, 095	-0, 281	-0, 611	-0, 872
	$-\pi/3$	0, 586	0, 756	0, 826	0, 854	0, 878	0, 911
	$-\pi/6$	0, 555	0, 623	0, 724	0, 873	1, 199	1, 463
	0	0, 543	0, 562	0, 566	0, 635	1, 052	1, 400
	$\pi/6$	0, 554	0, 623	0, 724	0, 873	1, 199	1, 463
	$\pi/3$	0, 584	0, 756	0, 826	0, 854	0, 878	0, 911
	$\pi/2$	0, 416	0, 098	-0, 099	-0, 284	-0, 613	-0, 873

Таблица 3. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
10^{-2}	0	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 002	-0, 004	-0, 007
	$\pi/6$	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 002	-0, 006	-0, 010
	$\pi/3$	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 002	-0, 008	-0, 016
	$\pi/2$	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 002	-0, 007	-0, 018
	$2\pi/3$	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 004	-0, 013
	$5\pi/6$	0, 000	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 003	-0, 007
	π	0, 000	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 002	-0, 005
10^{-1}	0	-0, 001	-0, 006	-0, 011	-0, 019	-0, 038	-0, 061
	$\pi/6$	-0, 001	-0, 006	-0, 012	-0, 021	-0, 051	-0, 089
	$\pi/3$	-0, 001	-0, 006	-0, 012	-0, 024	-0, 069	-0, 138
	$\pi/2$	-0, 001	-0, 004	-0, 009	-0, 019	-0, 065	-0, 151
	$2\pi/3$	0, 000	-0, 002	-0, 005	-0, 010	-0, 041	-0, 108
	$5\pi/6$	0, 000	-0, 001	-0, 003	-0, 006	-0, 025	-0, 061
	π	0, 000	-0, 001	-0, 003	-0, 006	-0, 021	-0, 043
10^0	0	-0, 012	-0, 055	-0, 093	-0, 136	-0, 205	-0, 239
	$\pi/6$	-0, 012	-0, 055	-0, 097	-0, 151	-0, 264	-0, 346
	$\pi/3$	-0, 010	-0, 052	-0, 099	-0, 171	-0, 361	-0, 542
	$\pi/2$	-0, 008	-0, 039	-0, 078	-0, 142	-0, 356	-0, 605
	$2\pi/3$	-0, 005	-0, 022	-0, 042	-0, 077	-0, 230	-0, 438
	$5\pi/6$	-0, 003	-0, 013	-0, 026	-0, 049	-0, 140	-0, 248
	π	-0, 002	-0, 012	-0, 026	-0, 051	-0, 121	-0, 175
10^1	0	-0, 096	-0, 254	-0, 318	-0, 354	-0, 358	-0, 335
	$\pi/6$	-0, 092	-0, 252	-0, 324	-0, 380	-0, 449	-0, 479
	$\pi/3$	-0, 081	-0, 243	-0, 339	-0, 439	-0, 632	-0, 767
	$\pi/2$	-0, 062	-0, 204	-0, 305	-0, 424	-0, 692	-0, 904
	$2\pi/3$	-0, 040	-0, 132	-0, 196	-0, 277	-0, 499	-0, 688
	$5\pi/6$	-0, 027	-0, 094	-0, 138	-0, 191	-0, 313	-0, 398
	π	-0, 022	-0, 096	-0, 155	-0, 214	-0, 278	-0, 289
10^2	0	-0, 306	-0, 390	-0, 404	-0, 405	-0, 375	-0, 340
	$\pi/6$	-0, 297	-0, 391	-0, 417	-0, 439	-0, 474	-0, 491
	$\pi/3$	-0, 271	-0, 398	-0, 457	-0, 526	-0, 684	-0, 801
	$\pi/2$	-0, 231	-0, 383	-0, 468	-0, 569	-0, 798	-0, 974
	$2\pi/3$	-0, 181	-0, 317	-0, 384	-0, 460	-0, 640	-0, 777
	$5\pi/6$	-0, 146	-0, 248	-0, 285	-0, 329	-0, 412	-0, 458
	π	-0, 140	-0, 280	-0, 332	-0, 361	-0, 360	-0, 333
10^3	0	-0, 381	-0, 396	-0, 401	-0, 400	-0, 372	-0, 337
	$\pi/6$	-0, 377	-0, 403	-0, 420	-0, 439	-0, 473	-0, 490
	$\pi/3$	-0, 367	-0, 428	-0, 475	-0, 538	-0, 691	-0, 805
	$\pi/2$	-0, 348	-0, 441	-0, 510	-0, 601	-0, 819	-0, 987
	$2\pi/3$	-0, 319	-0, 403	-0, 456	-0, 522	-0, 680	-0, 800
	$5\pi/6$	-0, 292	-0, 351	-0, 375	-0, 403	-0, 454	-0, 480
	π	-0, 296	-0, 381	-0, 402	-0, 406	-0, 377	-0, 340
∞	0	-0, 374	-0, 387	-0, 394	-0, 395	-0, 369	-0, 336
	$\pi/6$	-0, 376	-0, 398	-0, 415	-0, 435	-0, 471	-0, 489
	$\pi/3$	-0, 383	-0, 432	-0, 477	-0, 539	-0, 691	-0, 806
	$\pi/2$	-0, 388	-0, 457	-0, 521	-0, 609	-0, 824	-0, 991
	$2\pi/3$	-0, 383	-0, 432	-0, 477	-0, 539	-0, 691	-0, 806
	$5\pi/6$	-0, 375	-0, 398	-0, 415	-0, 435	-0, 471	-0, 489
	π	-0, 374	-0, 388	-0, 395	-0, 395	-0, 369	-0, 336

Таблица 4. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
10^{-2}	$-\pi/2$	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	-0, 003	-0, 013
	$-\pi/3$	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	-0, 003	-0, 011
	$-\pi/6$	0, 000	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 003	-0, 008
	0	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 003	-0, 006
	$\pi/6$	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 002	-0, 005	-0, 010
	$\pi/3$	0, 000	-0, 001	-0, 002	-0, 003	-0, 009	-0, 017
	$\pi/2$	0, 000	-0, 001	-0, 002	-0, 004	-0, 011	-0, 022
10^{-1}	$-\pi/2$	0, 000	0, 001	0, 002	0, 000	-0, 029	-0, 110
	$-\pi/3$	0, 000	0, 000	0, 000	-0, 003	-0, 030	-0, 095
	$-\pi/6$	0, 000	-0, 002	-0, 004	-0, 008	-0, 029	-0, 065
	0	-0, 001	-0, 004	-0, 007	-0, 012	-0, 029	-0, 049
	$\pi/6$	-0, 001	-0, 006	-0, 011	-0, 019	-0, 044	-0, 081
	$\pi/3$	-0, 002	-0, 009	-0, 017	-0, 031	-0, 078	-0, 147
	$\pi/2$	-0, 002	-0, 010	-0, 020	-0, 038	-0, 099	-0, 186
10^0	$-\pi/2$	0, 002	0, 010	0, 012	-0, 003	-0, 172	-0, 464
	$-\pi/3$	0, 001	0, 002	-0, 003	-0, 025	-0, 172	-0, 396
	$-\pi/6$	-0, 003	-0, 014	-0, 029	-0, 058	-0, 157	-0, 265
	0	-0, 007	-0, 032	-0, 056	-0, 085	-0, 147	-0, 197
	$\pi/6$	-0, 012	-0, 053	-0, 090	-0, 135	-0, 231	-0, 322
	$\pi/3$	-0, 016	-0, 075	-0, 135	-0, 215	-0, 403	-0, 577
	$\pi/2$	-0, 017	-0, 087	-0, 161	-0, 264	-0, 507	-0, 727
10^1	$-\pi/2$	0, 013	0, 010	-0, 029	-0, 125	-0, 473	-0, 781
	$-\pi/3$	0, 003	-0, 026	-0, 081	-0, 176	-0, 446	-0, 663
	$-\pi/6$	-0, 022	-0, 082	-0, 134	-0, 202	-0, 339	-0, 420
	0	-0, 056	-0, 149	-0, 191	-0, 228	-0, 279	-0, 294
	$\pi/6$	-0, 091	-0, 237	-0, 301	-0, 350	-0, 422	-0, 467
	$\pi/3$	-0, 119	-0, 323	-0, 425	-0, 519	-0, 683	-0, 801
	$\pi/2$	-0, 131	-0, 366	-0, 493	-0, 613	-0, 833	-0, 993
10^2	$-\pi/2$	-0, 018	-0, 139	-0, 240	-0, 380	-0, 698	-0, 922
	$-\pi/3$	-0, 047	-0, 195	-0, 297	-0, 409	-0, 627	-0, 773
	$-\pi/6$	-0, 107	-0, 212	-0, 271	-0, 335	-0, 429	-0, 470
	0	-0, 190	-0, 276	-0, 307	-0, 330	-0, 342	-0, 325
	$\pi/6$	-0, 279	-0, 371	-0, 401	-0, 426	-0, 466	-0, 489
	$\pi/3$	-0, 349	-0, 464	-0, 513	-0, 569	-0, 706	-0, 814
	$\pi/2$	-0, 378	-0, 512	-0, 576	-0, 654	-0, 847	-1, 002
10^3	$-\pi/2$	-0, 173	-0, 311	-0, 408	-0, 526	-0, 783	-0, 969
	$-\pi/3$	-0, 198	-0, 341	-0, 422	-0, 507	-0, 678	-0, 799
	$-\pi/6$	-0, 234	-0, 324	-0, 365	-0, 405	-0, 460	-0, 484
	0	-0, 295	-0, 348	-0, 367	-0, 377	-0, 362	-0, 333
	$\pi/6$	-0, 361	-0, 396	-0, 415	-0, 435	-0, 471	-0, 490
	$\pi/3$	-0, 415	-0, 455	-0, 494	-0, 551	-0, 697	-0, 809
	$\pi/2$	-0, 437	-0, 491	-0, 546	-0, 625	-0, 832	-0, 994
∞	$-\pi/2$	-0, 385	-0, 455	-0, 520	-0, 608	-0, 824	-0, 990
	$-\pi/3$	-0, 381	-0, 431	-0, 477	-0, 539	-0, 691	-0, 806
	$-\pi/6$	-0, 374	-0, 398	-0, 415	-0, 435	-0, 471	-0, 489
	0	-0, 373	-0, 387	-0, 394	-0, 395	-0, 369	-0, 336
	$\pi/6$	-0, 376	-0, 398	-0, 415	-0, 435	-0, 471	-0, 489
	$\pi/3$	-0, 384	-0, 432	-0, 477	-0, 539	-0, 691	-0, 806
	$\pi/2$	-0, 389	-0, 457	-0, 521	-0, 609	-0, 824	-0, 991

Таблица 5. Значения напряжений σ_s в точках внешнего контура

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
10^{-2}	0	0, 000	-0, 001	-0, 002	-0, 002	0, 000	0, 001
	$\pi/6$	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 001	-0, 001	-0, 001
	$\pi/3$	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 002	-0, 002	-0, 002
	$\pi/2$	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 001	-0, 002	-0, 002
	$2\pi/3$	0, 000	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 002	-0, 002
	$5\pi/6$	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 001
	π	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 001
10^{-1}	0	-0, 003	-0, 010	-0, 015	-0, 016	-0, 001	0, 007
	$\pi/6$	-0, 002	-0, 009	-0, 011	-0, 013	-0, 012	-0, 006
	$\pi/3$	-0, 002	-0, 007	-0, 012	-0, 016	-0, 019	-0, 015
	$\pi/2$	-0, 001	-0, 006	-0, 010	-0, 014	-0, 018	-0, 016
	$2\pi/3$	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 005	-0, 013	-0, 014
	$5\pi/6$	0, 000	0, 001	0, 002	0, 003	-0, 003	-0, 004
	π	0, 001	0, 002	0, 001	0, 000	0, 004	0, 009
10^0	0	-0, 025	-0, 087	-0, 114	-0, 101	0, 007	0, 020
	$\pi/6$	-0, 023	-0, 074	-0, 086	-0, 081	-0, 050	-0, 033
	$\pi/3$	-0, 017	-0, 060	-0, 089	-0, 105	-0, 090	-0, 071
	$\pi/2$	-0, 012	-0, 053	-0, 078	-0, 092	-0, 088	-0, 077
	$2\pi/3$	-0, 001	-0, 001	-0, 008	-0, 027	-0, 061	-0, 069
	$5\pi/6$	0, 003	0, 011	0, 020	0, 028	-0, 002	-0, 026
	π	0, 005	0, 015	0, 013	0, 007	0, 041	0, 036
10^1	0	-0, 187	-0, 362	-0, 347	-0, 240	0, 006	0, 021
	$\pi/6$	-0, 170	-0, 304	-0, 246	-0, 164	-0, 096	-0, 058
	$\pi/3$	-0, 126	-0, 240	-0, 263	-0, 254	-0, 184	-0, 113
	$\pi/2$	-0, 092	-0, 255	-0, 284	-0, 268	-0, 195	-0, 123
	$2\pi/3$	-0, 012	-0, 010	-0, 050	-0, 110	-0, 158	-0, 113
	$5\pi/6$	0, 022	0, 028	0, 050	0, 057	-0, 044	-0, 056
	π	0, 036	0, 037	-0, 004	-0, 024	0, 065	0, 039
10^2	0	-0, 521	-0, 494	-0, 408	-0, 267	0, 000	0, 018
	$\pi/6$	-0, 476	-0, 420	-0, 284	-0, 175	-0, 113	-0, 065
	$\pi/3$	-0, 360	-0, 345	-0, 340	-0, 319	-0, 220	-0, 125
	$\pi/2$	-0, 312	-0, 483	-0, 463	-0, 397	-0, 242	-0, 136
	$2\pi/3$	-0, 078	-0, 141	-0, 212	-0, 255	-0, 212	-0, 124
	$5\pi/6$	-0, 003	-0, 091	-0, 065	-0, 056	-0, 099	-0, 065
	π	0, 030	-0, 120	-0, 169	-0, 128	0, 042	0, 029
10^3	0	-0, 584	-0, 473	-0, 406	-0, 263	-0, 015	0, 017
	$\pi/6$	-0, 548	-0, 410	-0, 268	-0, 171	-0, 110	-0, 067
	$\pi/3$	-0, 455	-0, 373	-0, 366	-0, 339	-0, 230	-0, 128
	$\pi/2$	-0, 488	-0, 590	-0, 537	-0, 442	-0, 255	-0, 138
	$2\pi/3$	-0, 261	-0, 291	-0, 316	-0, 319	-0, 228	-0, 127
	$5\pi/6$	-0, 217	-0, 274	-0, 204	-0, 140	-0, 115	-0, 067
	π	-0, 201	-0, 307	-0, 270	-0, 189	0, 019	0, 020
∞	0	-0, 519	-0, 443	-0, 390	-0, 256	-0, 003	0, 018
	$\pi/6$	-0, 496	-0, 388	-0, 260	-0, 170	-0, 119	-0, 068
	$\pi/3$	-0, 477	-0, 382	-0, 373	-0, 344	-0, 231	-0, 128
	$\pi/2$	-0, 614	-0, 641	-0, 566	-0, 456	-0, 257	-0, 139
	$2\pi/3$	-0, 474	-0, 380	-0, 365	-0, 343	-0, 231	-0, 128
	$5\pi/6$	-0, 488	-0, 388	-0, 267	-0, 170	-0, 119	-0, 068
	π	-0, 520	-0, 440	-0, 365	-0, 255	-0, 003	0, 018

Таблица 6. Значения напряжений σ_s в точках внешнего контура

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
10^{-2}	$-\pi/2$	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 002	-0, 003
	$-\pi/3$	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 002	-0, 003
	$-\pi/6$	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 001	-0, 002
	0	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 001	0, 000	0, 000
	$\pi/6$	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 001
	$\pi/3$	0, 000	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 002	-0, 003
	$\pi/2$	0, 000	-0, 001	-0, 001	-0, 002	-0, 003	-0, 003
10^{-1}	$-\pi/2$	-0, 001	-0, 003	-0, 006	-0, 010	-0, 020	-0, 029
	$-\pi/3$	-0, 001	-0, 003	-0, 006	-0, 010	-0, 019	-0, 027
	$-\pi/6$	-0, 001	-0, 004	-0, 006	-0, 009	-0, 014	-0, 017
	0	-0, 001	-0, 004	-0, 007	-0, 008	-0, 002	-0, 002
	$\pi/6$	-0, 001	-0, 004	-0, 004	-0, 002	-0, 009	-0, 014
	$\pi/3$	-0, 001	-0, 004	-0, 007	-0, 013	-0, 021	-0, 023
	$\pi/2$	-0, 002	-0, 009	-0, 015	-0, 019	-0, 024	-0, 025
10^0	$-\pi/2$	-0, 006	-0, 030	-0, 055	-0, 087	-0, 137	-0, 125
	$-\pi/3$	-0, 007	-0, 032	-0, 054	-0, 082	-0, 128	-0, 104
	$-\pi/6$	-0, 008	-0, 033	-0, 053	-0, 076	-0, 092	-0, 057
	0	-0, 010	-0, 039	-0, 059	-0, 068	-0, 024	0, 001
	$\pi/6$	-0, 012	-0, 037	-0, 034	-0, 025	-0, 056	-0, 047
	$\pi/3$	-0, 012	-0, 037	-0, 064	-0, 097	-0, 119	-0, 084
	$\pi/2$	-0, 018	-0, 082	-0, 119	-0, 143	-0, 134	-0, 091
10^1	$-\pi/2$	-0, 054	-0, 196	-0, 287	-0, 343	-0, 298	-0, 171
	$-\pi/3$	-0, 060	-0, 200	-0, 266	-0, 300	-0, 246	-0, 127
	$-\pi/6$	-0, 068	-0, 185	-0, 223	-0, 226	-0, 145	-0, 068
	0	-0, 083	-0, 207	-0, 232	-0, 192	-0, 022	0, 013
	$\pi/6$	-0, 094	-0, 192	-0, 156	-0, 110	-0, 101	-0, 063
	$\pi/3$	-0, 097	-0, 196	-0, 245	-0, 270	-0, 207	-0, 118
	$\pi/2$	-0, 140	-0, 374	-0, 404	-0, 370	-0, 233	-0, 128
10^2	$-\pi/2$	-0, 281	-0, 541	-0, 607	-0, 560	-0, 332	-0, 164
	$-\pi/3$	-0, 297	-0, 465	-0, 444	-0, 388	-0, 241	-0, 128
	$-\pi/6$	-0, 298	-0, 363	-0, 296	-0, 225	-0, 131	-0, 068
	0	-0, 326	-0, 400	-0, 355	-0, 243	-0, 009	0, 017
	$\pi/6$	-0, 340	-0, 349	-0, 246	-0, 161	-0, 115	-0, 067
	$\pi/3$	-0, 337	-0, 338	-0, 345	-0, 332	-0, 227	-0, 126
	$\pi/2$	-0, 451	-0, 585	-0, 536	-0, 443	-0, 254	-0, 137
10^3	$-\pi/2$	-0, 550	-0, 788	-0, 731	-0, 585	-0, 307	-0, 145
	$-\pi/3$	-0, 517	-0, 462	-0, 410	-0, 359	-0, 234	-0, 127
	$-\pi/6$	-0, 500	-0, 404	-0, 278	-0, 188	-0, 123	-0, 068
	0	-0, 498	-0, 447	-0, 378	-0, 254	-0, 004	0, 018
	$\pi/6$	-0, 476	-0, 385	-0, 263	-0, 169	-0, 118	-0, 067
	$\pi/3$	-0, 444	-0, 369	-0, 364	-0, 342	-0, 230	-0, 127
	$\pi/2$	-0, 572	-0, 625	-0, 559	-0, 454	-0, 257	-0, 138
∞	$-\pi/2$	-0, 618	-0, 644	-0, 568	-0, 457	-0, 257	-0, 139
	$-\pi/3$	-0, 478	-0, 381	-0, 369	-0, 344	-0, 231	-0, 128
	$-\pi/6$	-0, 502	-0, 389	-0, 264	-0, 171	-0, 119	-0, 068
	0	-0, 512	-0, 441	-0, 376	-0, 255	-0, 003	0, 018
	$\pi/6$	-0, 501	-0, 389	-0, 264	-0, 171	-0, 119	-0, 068
	$\pi/3$	-0, 476	-0, 381	-0, 369	-0, 343	-0, 231	-0, 128
	$\pi/2$	-0, 611	-0, 640	-0, 566	-0, 456	-0, 257	-0, 139

Таблица 7. Значения напряжений σ_s в точках внешнего контура

Знач. Na	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
10^{-2}	0	0,000	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002
	$\pi/6$	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,002
	$\pi/3$	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001
	$2\pi/3$	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001
	$5\pi/6$	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002
	π	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002
10^{-1}	0	0,001	0,005	0,009	0,013	0,017	0,017
	$\pi/6$	0,001	0,005	0,008	0,011	0,015	0,015
	$\pi/3$	0,001	0,004	0,006	0,008	0,011	0,011
	$\pi/2$	0,001	0,003	0,004	0,006	0,009	0,010
	$2\pi/3$	0,000	0,002	0,004	0,006	0,010	0,012
	$5\pi/6$	0,000	0,002	0,003	0,006	0,013	0,015
	π	0,000	0,001	0,003	0,005	0,013	0,017
10^0	0	0,012	0,047	0,072	0,093	0,093	0,066
	$\pi/6$	0,011	0,043	0,064	0,080	0,081	0,058
	$\pi/3$	0,009	0,033	0,047	0,057	0,059	0,043
	$\pi/2$	0,007	0,025	0,037	0,047	0,050	0,036
	$2\pi/3$	0,005	0,021	0,034	0,049	0,059	0,044
	$5\pi/6$	0,003	0,015	0,028	0,046	0,073	0,060
	π	0,002	0,011	0,023	0,042	0,079	0,070
10^1	0	0,093	0,216	0,243	0,238	0,168	0,096
	$\pi/6$	0,087	0,201	0,223	0,215	0,147	0,084
	$\pi/3$	0,072	0,162	0,175	0,164	0,109	0,062
	$\pi/2$	0,055	0,128	0,141	0,136	0,092	0,052
	$2\pi/3$	0,040	0,116	0,144	0,151	0,109	0,062
	$5\pi/6$	0,027	0,098	0,138	0,163	0,142	0,084
	π	0,022	0,082	0,121	0,157	0,162	0,101
10^2	0	0,294	0,334	0,316	0,283	0,186	0,103
	$\pi/6$	0,282	0,320	0,299	0,261	0,164	0,090
	$\pi/3$	0,248	0,279	0,252	0,211	0,123	0,067
	$\pi/2$	0,206	0,241	0,218	0,181	0,104	0,055
	$2\pi/3$	0,174	0,239	0,232	0,204	0,123	0,067
	$5\pi/6$	0,148	0,250	0,259	0,241	0,161	0,090
	π	0,133	0,229	0,256	0,260	0,192	0,107
10^3	0	0,368	0,346	0,321	0,287	0,189	0,104
	$\pi/6$	0,360	0,335	0,307	0,267	0,168	0,091
	$\pi/3$	0,338	0,304	0,267	0,220	0,127	0,068
	$\pi/2$	0,312	0,280	0,241	0,194	0,106	0,056
	$2\pi/3$	0,296	0,289	0,259	0,218	0,126	0,068
	$5\pi/6$	0,290	0,313	0,295	0,261	0,167	0,091
	π	0,277	0,323	0,320	0,294	0,195	0,105
∞	0	0,363	0,342	0,320	0,287	0,190	0,105
	$\pi/6$	0,361	0,333	0,306	0,267	0,168	0,092
	$\pi/3$	0,354	0,308	0,269	0,222	0,127	0,068
	$\pi/2$	0,349	0,292	0,247	0,197	0,107	0,056
	$2\pi/3$	0,353	0,308	0,269	0,222	0,127	0,068
	$5\pi/6$	0,360	0,333	0,306	0,267	0,168	0,092
	π	0,362	0,342	0,320	0,287	0,190	0,105

Таблица 8. Значения напряжений σ_s в точках внешнего контура

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
10^{-2}	$-\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001
	$-\pi/3$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001
	$-\pi/6$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002
	0	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,002
	$\pi/6$	0,000	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002
	$\pi/3$	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/2$	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
10^{-1}	$-\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,002	0,006	0,007
	$-\pi/3$	0,000	0,000	0,001	0,002	0,007	0,008
	$-\pi/6$	0,000	0,001	0,002	0,005	0,011	0,012
	0	0,001	0,003	0,006	0,009	0,014	0,015
	$\pi/6$	0,001	0,005	0,008	0,012	0,015	0,013
	$\pi/3$	0,001	0,006	0,009	0,012	0,012	0,010
	$\pi/2$	0,002	0,006	0,009	0,011	0,010	0,008
10^0	$-\pi/2$	-0,002	-0,003	0,001	0,011	0,028	0,026
	$-\pi/3$	-0,001	0,000	0,004	0,015	0,036	0,036
	$-\pi/6$	0,002	0,011	0,020	0,033	0,056	0,052
	0	0,007	0,029	0,046	0,062	0,075	0,061
	$\pi/6$	0,011	0,045	0,067	0,082	0,075	0,054
	$\pi/3$	0,014	0,052	0,072	0,079	0,060	0,040
	$\pi/2$	0,015	0,052	0,069	0,074	0,050	0,033
10^1	$-\pi/2$	-0,011	0,007	0,032	0,054	0,060	0,043
	$-\pi/3$	-0,003	0,016	0,039	0,065	0,082	0,059
	$-\pi/6$	0,021	0,065	0,090	0,114	0,122	0,081
	0	0,055	0,137	0,166	0,179	0,150	0,094
	$\pi/6$	0,087	0,195	0,215	0,207	0,142	0,083
	$\pi/3$	0,109	0,221	0,224	0,193	0,111	0,061
	$\pi/2$	0,116	0,224	0,219	0,180	0,094	0,051
10^2	$-\pi/2$	0,022	0,108	0,125	0,122	0,085	0,051
	$-\pi/3$	0,040	0,113	0,141	0,152	0,115	0,066
	$-\pi/6$	0,102	0,183	0,206	0,208	0,155	0,089
	0	0,187	0,254	0,263	0,253	0,180	0,102
	$\pi/6$	0,266	0,303	0,286	0,254	0,163	0,090
	$\pi/3$	0,320	0,321	0,277	0,222	0,124	0,067
	$\pi/2$	0,337	0,320	0,265	0,203	0,105	0,055
10^3	$-\pi/2$	0,165	0,205	0,190	0,163	0,097	0,055
	$-\pi/3$	0,176	0,230	0,227	0,203	0,124	0,068
	$-\pi/6$	0,227	0,278	0,275	0,251	0,165	0,091
	0	0,289	0,312	0,303	0,278	0,188	0,104
	$\pi/6$	0,344	0,327	0,302	0,264	0,167	0,091
	$\pi/3$	0,381	0,321	0,275	0,223	0,127	0,068
	$\pi/2$	0,391	0,311	0,256	0,200	0,107	0,056
∞	$-\pi/2$	0,347	0,291	0,247	0,197	0,107	0,056
	$-\pi/3$	0,352	0,308	0,269	0,222	0,127	0,068
	$-\pi/6$	0,359	0,333	0,306	0,267	0,168	0,092
	0	0,362	0,341	0,320	0,287	0,190	0,105
	$\pi/6$	0,360	0,333	0,306	0,267	0,168	0,092
	$\pi/3$	0,354	0,308	0,269	0,222	0,127	0,068
	$\pi/2$	0,350	0,292	0,247	0,197	0,107	0,056

Во всех таблицах случай $Ha = \infty$ соответствует варианту, когда на контурах пластинки задана температура, равная температуре внешней среды.

Выводы. Из данных таблиц и других полученных результатов следует, что коэффициент теплообмена с внешней средой и его распределение по контурам пластинок оказывает очень сильное влияние на значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния в пластинке. Заметим, что для вышеуказанных распределений коэффициента теплообмена часть контура отверстия плохо поддерживает теплообмен (практически теплоизолирована) при любых значениях параметра Ha .

При значениях $Ha < 0,01$ контуры пластинки можно считать практически теплоизолированными, поэтому в пластинке устанавливается близкое к однородному температурное поле, вследствие этого возникающие в неподкреплённой пластинке температурные напряжения довольно малы. Рост значений Ha приводит к возрастанию концентрации температурных напряжений, особенно вблизи контура отверстия. При значениях $Ha > 1000$ теплоизолированная зона оказывается достаточно малой, чтобы оказывать существенное влияние на термоэлектромагнитоупругое состояние пластинки, и можно полагать, что на контурах пластинки задана температура, равная температуре внешней среды. В этом случае для проведения численных расчетов можно перейти к более простой постановке граничных условий – для случая заданных значений температуры на контуре [7].

Напряжения по контуру достигают наибольших (по модулю) значений в зонах, соответствующих более высоким значениям коэффициента теплообмена.

Толщина кольца также оказывает заметное влияние на распределение напряжений в пластинке. Так, увеличение толщины кольца приводит к росту концентрации напряжений около отверстия. А вблизи внешнего контура значения напряжений увеличиваются с ростом величины $(r_0 - r_1)/r_1$, если $Ha < 1$; убывают, если $Ha > 1000$; становятся максимальными (по модулю) при значениях $(r_0 - r_1)/r_1$ от 0,5 до 2, если $1 \leq Ha \leq 1000$.

Исследованиями показано, что, в случае пренебрежения электромагнитными свойствами материала пластинки, происходит существенное искажение значений напряжений, и поэтому при проведении расчетов следует учитывать все свойства материала.

Исследования проводились в Донецком государственном университете в рамках госзадания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
3. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
4. Карнаухов В.Г. Электротермовязкоупругость / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок. – К.: Наук. думка, 1988. – 316 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 4).
5. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: На-

- ук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
6. *Партон В.З.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
 7. *Калоеров С.А.* Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
 8. *Калоеров С.А.* Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
 9. *Глушанков Е.С.* Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной многосвязной пьезопластинки в условиях конвективного теплообмена при действии линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – № 2 (75). – С. 18–29.
 10. *Глушанков Е.С.* Периодическая задача термоэлектромагнитоупругости для пластинки с эллиптическими отверстиями в условиях конвективного теплообмена с внешней средой / Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2021. – № 4. – С. 3–13.
 11. *Глушанков Е.С.* Термоэлектромагнитоупругое состояния бесконечной пластинки из пьезоматериала в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием разности температур на контурах / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2024. – № 4 (89). – С. 14–27. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-4-14-27. – EDN: OQMIWY.
 12. *Глушанков Е.С.* Термонапряженное состояние конечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием разности температур на контурах / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2024. – № 2 (87). – С. 18–33. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-2-18-33. – EDN: BEVMNB.
 13. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
 14. *Tian W.-Y.* Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

E.S. Glushankov

The thermo-electro-magneto-elastic state of the finite multiply connected piezoelectric plate in conditions of the non-uniform convective heat transfer under temperature difference action.

A solution is presented for the problem of temperature difference acting in the finite multiply connected piezoelectric plate, when a non-uniform convective heat transfer with external environment occurs on its contours. The solution was obtained with using the conformal mappings, the functions of complex variable and the least squares. The effect of plates's geometric features, the thermal, mechanical, and electromagnetic properties of its material, and the distribution of heat transfer coefficient along the plate's contours on the values of stresses in the plate was brought out with the numerical studies.

Keywords: *piezoelectric plate, multiply connected plate, convective heat transfer, thermal stresses, complex potentials.*

*Статья поступила в редакцию 09.01.2025;
доработана 03.02.2025;
рекомендована к печати 11.02.2025.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-1-23-34

EDN:PKOYNU

©2025. С.А. Калоеров¹, О.Э. Ермаков², А.Б. Мироненко³

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЙ ТОНКОЙ ПЛИТЫ

С использованием комплексных потенциалов и метода рядов дано точное аналитическое решение задачи об изгибе пьезоплиты с эллиптическим или линейным включением. Описаны результаты численных исследований для бесконечной плиты с круговым или линейным включением. Исследованы закономерности изменения изгибающих моментов и коэффициентов интенсивности моментов для концов линейных включений в зависимости от физико-механических свойств материалов плиты и включения. Установлено, что влияние учета пьезосвойств материала на значения изгибающих моментов в плите является весьма существенным и им при исследовании напряженно-деформированного состояния плиты нельзя пренебрегать.

Ключевые слова: пьезоплита, пьезовключения, комплексные потенциалы, изгибающие моменты, коэффициенты интенсивности моментов.

Введение. Многие элементы конструкций различного научно-технического назначения изготавливаются из материалов, обладающих пьезоэлектрическими свойствами [1–7]. Зачастую такие элементы представляют собой тонкие пластины – плиты, имеющие отверстия, трещины, инородные включения и подверженные изгибным деформациям. При различных механических и электромагнитных воздействиях в таких элементах возникают высокие концентрации

¹Калоеров Стефан Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Ермаков Олег Эдуардович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: ermakov.donetsk@mail.ru.com

Ermakov Oleg Eduardovich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³Мироненко Андрей Борисович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: andreyandrey80@mail.ru.

Mironenko Andrey Borisovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

моментов (напряжений), что необходимо учитывать при их проектировании и эксплуатации.

При решении задач по определению напряженно-деформированного состояния указанных многосвязных тел наиболее достоверные результаты дает использование комплексных потенциалов. Для задач изгиба тонких электромагнитоупругих плит эти потенциалы были введены в статье [8], а затем широко использованы при решении различных задач для конечных и бесконечных однородных многосвязных плит [9, 10].

В данной работе с использованием комплексных потенциалов получено точное аналитическое решение задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) об изгибе бесконечной кусочно-однородной пьезоплиты с эллиптическим (в частном случае линейным) включением из другого пьезоматериала. При этом комплексные потенциалы для плиты представлены рядами Лорана, для включения – рядами по полиномам Фабера. Показано, что эти ряды содержат по одному члену. Для определения коэффициентов этих членов рядов получена система линейных алгебраических уравнений. Рассмотрены частные случаи общего решения задачи применительно к моделям электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) или теории упругости (ТУ), когда не учитываются соответственно магнитные, электрические или и те и другие свойства. Описаны результаты численных исследований с установлением закономерностей влияния на электромагнитоупругое состояние (ЭМУС) плиты геометрических характеристик включения и механикоэлектромагнитных свойств материалов плиты и включения.

1. Постановка и метод решения задачи.

Рассмотрим бесконечную электромагнитоупругую тонкую плиту, имеющую эллиптическое отверстие с контуром L_1 и полуосями a_1, b_1 , в которое без предварительной деформации вложено включение из другого пьезоматериала (рис. 1), находящееся с плитой в условиях идеального электромагнитоупругого контакта.

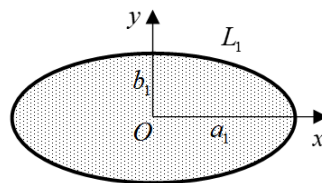


Рис. 1.

Обозначим внешность контура L_1 через S , внутренность – через $S^{(1)}$. Введем систему координат Oxy с началом в центре эллипса и осью Ox вдоль полуоси a_1 . Тогда параметрическое уравнение эллипса имеют вид

$$x = a_1 \cos \theta, \quad y = b_1 \sin \theta, \quad (1)$$

где $\theta \in [0, 2\pi]$. На бесконечности плита находится под действием механических моментов $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$ и моментов индукций (векторов индукций) $M_{dx}^\infty, M_{dy}^\infty, M_{bx}^\infty, M_{by}^\infty$, или под действием тех же механических моментов и моментов напряженностей (векторов напряженностей) $H_{dx}^\infty, H_{dy}^\infty, H_{bx}^\infty, H_{by}^\infty$.

Решение задачи об ЭМУС плиты и включения будем проводить с использованием комплексных потенциалов изгиба тонких электромагнитоупругих плит. Тогда это решение сводится к нахождению из соответствующих граничных условий по контуру L_1 комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) для бесконеч-

ной односвязной плиты с областью S и комплексных потенциалов $W_k^{(1)}(z_k^{(1)})$ ($k = \overline{1, 4}$) для конечной плиты с областью $S^{(1)}$ [8, 11].

Комплексные потенциалы $W_k'(z_k)$ являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (2)$$

где μ_k – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (3)$$

$l_{ij}(\mu)$ – полиномы вида

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= - (D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}), \\ l_{3g}(\mu) &= C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11}, \\ l_{3p}(\mu) &= C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11}, \\ l_{2\nu}(\mu) &= C_{\nu22}\mu^2 + 2C_{\nu12}\mu + C_{\nu11}, \\ l_{2\chi}(\mu) &= C_{\chi22}\mu^2 + 2C_{\chi12}\mu + C_{\chi11}; \end{aligned} \quad (4)$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ – упругие жесткости плиты; $C_{gij} = c_{gij}D_0$, $C_{pij} = c_{pij}D_0$, $C_{\beta ij} = c_{\beta ij}D_0$, $C_{\nu ij} = c_{\nu ij}D_0$, $C_{\chi ij} = c_{\chi ij}D_0$ – электромагнитные жесткости плиты; $D_0 = \frac{2}{3}h^3$; h – полутолщина плиты; b_{ij} , c_{gij} , c_{pij} , $c_{\beta ij}$, $c_{\nu ij}$, $c_{\chi ij}$ – элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} & c_{\nu11} & c_{\nu12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} & c_{\nu12} & c_{\nu22} \\ -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & c_{\nu11} & c_{\nu12} & c_{\chi11} & c_{\chi12} \\ -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & c_{\nu12} & c_{\nu22} & c_{\chi12} & c_{\chi22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}^{-1}; \quad (5)$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ij} , ν_{ij} и χ_{ij} – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях [8, 11].

Комплексные потенциалы $W_k^{(1)}(z_k^{(1)})$ ($k = \overline{1, 4}$) для включения являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k^{(1)} = x + \mu_k^{(1)} y, \quad (6)$$

в которых $\mu_k^{(1)}$ – корни характеристического уравнения, получаемого из уравнения (3) заменой всех постоянных на аналогичные постоянные материала включения, обозначаемые с индексом (1) сверху.

Комплексные потенциалы электромагнитоупругости $W'_k(z_k)$ определены в областях S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями (2) и ограниченных контурами L_{k1} , соответствующими контуру L_1 при этих преобразованиях, и, исходя из общих их представлений [8, 11], в данном случае имеют вид

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + W'_{k0}(z_k), \quad (7)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2Re \sum_{k=1}^4 \left(p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = \\ = (-M_x^\infty, -M_y^\infty, -H_{xy}^\infty, -M_{dx}^\infty, -M_{dy}^\infty, -M_{bx}^\infty, -M_{by}^\infty, 0), \quad (8) \\ p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{g11} + C_{g21}\mu_k) \nu_k - (C_{p11} + C_{p21}\mu_k) \rho_k, \\ q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{g12} + C_{g22}\mu_k) \nu_k - (C_{p11} + C_{p22}\mu_k) \rho_k, \\ r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - (C_{g16} + C_{g26}\mu_k) \nu_k - (C_{p16} + C_{p26}\mu_k) \rho_k, \\ d_{xk} = C_{g11} + 2C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 - (C_{\beta11} + C_{\beta12}\mu_k) \nu_k - (C_{\nu11} + C_{\nu12}\mu_k) \rho_k, \\ d_{yk} = C_{g21} + 2C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - (C_{\beta12} + C_{\beta22}\mu_k) \nu_k - (C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k) \rho_k, \\ b_{xk} = C_{p11} + 2C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 - (C_{\nu11} + C_{\nu12}\mu_k) \nu_k - (C_{\chi11} + C_{\chi12}\mu_k) \rho_k, \\ b_{yk} = C_{p21} + 2C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 - (C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k) \nu_k - (C_{\chi12} + C_{\chi22}\mu_k) \rho_k; \end{aligned}$$

$W'_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_k вне контуров L_{k1} , включая бесконечно удаленную точку. Если использовать конформные отображения внешностей единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$ на внешности контуров L_{k1} [12]

$$z_k = R_{k1} \left(\zeta_{k1} + \frac{m_{k1}}{\zeta_{k1}} \right), \quad (9)$$

$$R_{k1} = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{2}, \quad m_{k1} = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{a_1 + i\mu_k b_1},$$

то функции $W'_{k0}(z_k)$, голоморфные вне контуров L_{k1} , в областях переменных ζ_{k1} будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$ и их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням. При этом для комплексных потенциалов получаются выражения

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \quad (10)$$

a_{k1n} – неизвестные коэффициенты.

Функции $W'_k(z_k^{(1)})$ голоморфны в конечных областях $S_k^{(1)}$, получаемых из области $S^{(1)}$ аффинными преобразованиями (6), и их можно представить рядами по полиномам Фабера для этих областей

$$W'_k(z_k^{(1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(1)} P_{kn}^{(1)}(z_k^{(1)}), \quad (11)$$

где $P_{kn}^{(1)}(z_k^{(1)})$ – полиномы Фабера для эллипса $L_k^{(1)}$, имеющие вид [13]

$$P_{k0}^{(1)} = 1, \quad P_{kn}^{(1)} = \left(\zeta_k^{(1)}\right)^n + \frac{\left(m_k^{(1)}\right)^n}{\left(\zeta_k^{(1)}\right)^n};$$

$\zeta_k^{(1)}$ – переменные, получаемые из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_k^{(1)}| \geq 1$ на внешности контуров $L_k^{(1)}$ по формулам, аналогичным (9) для эллипсов $L_k^{(1)}$:

$$z_k^{(1)} = R_k^{(1)} \left(\zeta_k^{(1)} + \frac{m_k^{(1)}}{\zeta_k^{(1)}} \right), \quad (12)$$

$$R_k^{(1)} = \frac{a_1 + i\mu_k^{(1)} b_1}{2}, \quad m_k^{(1)} = \frac{a_1 - i\mu_k^{(1)} b_1}{a_1 + i\mu_k^{(1)} b_1};$$

$a_{kn}^{(1)}$ – неизвестные постоянные.

Постоянные a_{k1n} и $a_{kn}^{(1)}$ определяются из граничных условий на контуре L_1 .

На контуре L_1 контакта бесконечной плиты и включения имеют место граничные условия [8, 11]

$$2Re \sum_{k=1}^4 \left(g_{ik1} W'_k(z_k) - g_{ik}^{(1)} W'_k(z_k^{(1)}) \right) = f_{i1}(t) \quad (i = \overline{1, 8}), \quad (13)$$

в которых

$$\begin{aligned} g_{1k1} &= \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{2k1} = q_k, \quad g_{3k1} = 1, \quad g_{4k1} = \mu_k, \\ g_{5k1} &= d_{yk}, \quad g_{6k1} = b_{yk}, \quad g_{7k1} = \nu_k, \quad g_{8k1} = \rho_k, \\ g_{1k}^{(1)} &= \frac{p_k^{(1)}}{\mu_k^{(1)}}, \quad g_{2k}^{(1)} = q_k^{(1)}, \quad g_{3k}^{(1)} = 1, \quad g_{4k}^{(1)} = \mu_k^{(1)}, \\ g_{5k}^{(1)} &= d_{yk}^{(1)}, \quad g_{6k}^{(1)} = b_{yk}^{(1)}, \quad g_{7k1}^{(1)} = \nu_k^{(1)}, \quad g_{7k1}^{(1)} = \rho_k^{(1)}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= -c_{1x} + c_{11}, \quad f_{12} = c_{1y} + c_{12}, \quad f_{13} = f_{14} = 0, \\ f_{15} &= c_{15}, \quad f_{16} = c_{16}, \quad f_{17} = c_{17}, \quad f_{18} = c_{18}; \end{aligned} \quad (15)$$

c_1 – вещественные постоянные, c_{1j} – комплексные постоянные.

Подставляя функции (10) и (11) в граничные условия (13) и учитывая, что на контуре контакта бесконечной плиты и включения $\zeta_{k1} = \zeta_{k1}^{(1)} = \sigma$, а также, применяя метод рядов, получим, что $a_{k1n} = a_{kn}^{(1)} = 0$ при $n \geq 2$, а для определения a_{k11} записывается система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \left[\left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, 1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}, \nu_k, \rho_k \right) a_{k11} - \right. \\ & - \left(\frac{p_k^{(1)}}{\mu_k^{(1)}}, q_k^{(1)}, 1, \mu_k^{(1)}, d_{yk}^{(1)}, b_{yk}^{(1)}, \nu_k^{(1)}, \rho_k^{(1)} \right) R_k^{(1)} m_k^{(1)} a_{k1}^{(1)} - \\ & - \left(\frac{\overline{p_k^{(1)}}}{\overline{\mu_k^{(1)}}}, \overline{q_k^{(1)}}, 1, \overline{\mu_k^{(1)}}, \overline{d_{yk}^{(1)}}, \overline{b_{yk}^{(1)}}, \overline{\nu_k^{(1)}}, \overline{\rho_k^{(1)}} \right) \overline{R_k^{(1)}} \overline{a_{k1}^{(1)}} \Big] = \\ & = - \sum_{k=1}^4 \left[\left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, 1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}, \nu_k, \rho_k \right) R_{k1} m_{k1} \Gamma_k + \right. \\ & + \left(\frac{\overline{p_k}}{\overline{\mu_k}}, \overline{q_k}, 1, \overline{\mu_k}, \overline{d_{yk}}, \overline{b_{yk}}, \overline{\nu_k}, \overline{\rho_k} \right) \overline{R_{k1}} \overline{\Gamma_k} \Big]. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда функции (10) и (11) соответственно примут вид

$$W'_k(z_k) = {}_k z_k + \frac{a_{k11}}{\zeta_{k1}}, \quad W_k'^{(1)}(z_k^{(1)}) = a_{k1}^{(1)} P_{k1}^{(1)} = \frac{a_{k1}^{(1)}}{R_k^{(1)}} z_k^{(1)}. \quad (17)$$

Если включение отсутствует, то $W_k'^{(1)}(z_k)$ имеет вид (10), $W_k'^{(1)}(z_k^{(1)}) = 0$, а для определения коэффициентов a_{k11} получается система

$$\sum_{k=1}^4 \left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right) a_{k11} =$$

$$= - \sum_{k=1}^4 \left[\left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right) R_{k1} m_{k1} \Gamma_k + \left(\frac{\overline{p_k}}{\overline{\mu_k}}, \overline{q_k}, \overline{d_{yk}}, \overline{b_{yk}} \right) \overline{R_{k1} \Gamma_k} \right] \quad (18)$$

в случае неподкрепленного отверстия, или система

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k) a_{k11} = \\ & = - \sum_{k=1}^4 \left[(1, \mu_k, \nu_k, \rho_k) R_{k1} m_{k1} \Gamma_k + (1, \overline{\mu_k}, \overline{\nu_k}, \overline{\rho_k}) \overline{R_{k1} \Gamma_k} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

в случае жестко подкрепленного отверстия.

По известным функциям можно в любых точках бесконечной плиты и включения вычислить основные характеристики ЭМУС (механические изгибающие и крутящий моменты, моменты индукций электрического и магнитного полей, перерезывающие силы) [8, 11]. Если эллипс L_1 является прямолинейным разрезом-трещиной, то будем иметь задачу для линейного пьезовключения в плите, и можно найти коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) $k_{1M}^{\pm}$ и $k_{2M}^{\pm}$ по известным формулам [14]

$$k_{1M}^{\pm} = 2Re \sum_{k=1}^4 q_k M_k, \quad k_{2M}^{\pm} = 2Re \sum_{k=1}^4 r_k M_k,$$

в которых

$$M_k = \frac{\sqrt{a_l}}{2R_k} a_{k1}.$$

Как частные случаи из приведенных решений задач ЭМУ следуют решения задач ЭУ, МУ и ТУ. При проведении численных исследований решения всех этих задач можно получить по программе решения задачи ЭМУ, проводя вычисления для модельного материала с постоянными $g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}$, $p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}$, $\nu'_{ij} = \lambda_{gp} \nu_{ij}$, причем их нужно принять такими: $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$ для задач ЭМУ; $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ЭУ; $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач МУ; $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ТУ.

2. Результаты численных исследований. Были проведены численные исследования для плит из материалов: 1) композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [15, 16]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (материал М2) [17]. При проведении расчетов свойства материала каждого включения связывалось со свойствами материала бесконечной плиты соотношениями $s_{ij}^{(l)} = \lambda_s^{(l)} s_{ij}$, $g_{ij}^{(l)} = \lambda_g^{(l)} g_{ij}$, $p_{ij}^{(l)} = \lambda_p^{(l)} p_{ij}$, $\nu_{ij}^{(l)} = \lambda_{gp}^{(l)} \nu_{ij}$, где $\lambda_s^{(l)}$, $\lambda_g^{(l)}$, $\lambda_p^{(l)}$, $\lambda_{gp}^{(l)}$ – параметры, связывающие соответствующие характеристики материалов бесконечной плиты в области S и включения в области $S^{(l)}$.

В таблице 1 для изгиба моментами $M_y^\infty = m_y$ бесконечной электромагнитоупругой плиты из близкого к изотропному по упругим свойствам материала М1 и существенно анизотропного по упругим свойствам («степень анизотропии» характеризуется отличием отношения s_{11}/s_{22} от единицы) материала М2 с одним круговым включением радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) в зависимости от параметра механической жесткости включения $\lambda_s^{(1)}$ и центрального угла контура θ , отсчитываемого от направления оси Ox против часовой стрелки, с точностью до множителя m_y приведены значения изгибающих моментов M_s в точках контура L_1 бесконечной плиты на площадках, перпендикулярных к контуру для случаев, когда электромагнитные свойства включения такие же, как у плиты ($\lambda_g^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_{gp}^{(1)} = 1$), и когда включение не обладает пьезосвойствами ($\lambda_g^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_{gp}^{(1)} = 0$). Значения $\lambda_s^{(1)}$, равные 0 и ∞ , соответствуют случаям плиты с абсолютно жестким и абсолютно мягким включением (отверстием). На рисунке 2 для некоторых значений $\lambda_s^{(1)}$ при $\lambda_g^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_{gp}^{(1)} = 0$ изображены графики распределения M_s в плите по контуру L_1 . В таблице 2 приведены аналогичные данным таблицы 1 результаты для задачи ТУ.

Из данных таблицы 1, таблицы 2 и рисунка 2 видно, что:

- 1) с увеличением значений параметра $\lambda_s^{(1)}$ (уменьшением модулей упругости материала включения $E_j^{(1)}$) значения изгибающих моментов M_s вблизи горизонтального диаметра включения (которому в таблицах соответствует $\theta = 0$) резко растут с переходом от отрицательных значений к положительным; при этом особенно резкие изменения наблюдаются в случае, когда жесткость включения больше жесткости плиты ($\lambda_s^{(1)} < 1$) и включение не обладает пьезосвойствами; вблизи вертикального диаметра (для которого $\theta = \pi/2$) наблюдается уменьшение моментов, но менее значительное;
- 2) значения изгибающих моментов в плите из материала М2 значительно больше, чем в плите из «близкого к изотропному» материалу М1;
- 3) на изгибающие моменты в плите значительно влияют пьезосвойства материала включения.

Как показывают исследования, с уменьшением отношения b_1/a_1 значения моментов M_s в окрестности конца полуоси эллипса b_1 несколько уменьшаются и резко растут в окрестности конца полуоси a_1 , стремясь к бесконечности, и при $b_1/a_1 \leq 10^{-3}$ можно говорить о КИМ для концов линейного включения.

В таблице 3 в зависимости от параметра механической жесткости линейного включения $\lambda_s^{(1)}$ даны значения КИМ $k_1^\pm$ момента (в данном случае $k_2^\pm = 0$) для концов упругого линейного включения (для которого $\lambda_g^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_{gp}^{(1)} = 0$). Значения $\lambda_s^{(1)}$, равные 0 и ∞ , относятся к случаям абсолютно жесткого включения и трещины в плите.

Как видно из таблицы 3, для плиты из «близкого к изотропному» материала М1 КИМ для задач ЭМУ и ТУ совпадает, а для материала с существенной анизотропией М2 КИМ в задачах ЭМУ и ТУ отличаются, правда незначительно. Но если учитывать, что КИМ в выражениях моментов является коэффициентом

Таблица 1. Значения M_s/m_y в точках контакта пьезоплиты с круговым включением в зависимости от $\lambda_s^{(1)}$

Материал	$\lambda_s^{(1)}$	θ , рад.									
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
		при $\lambda_g^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_{gp}^{(1)} = 1$					при $\lambda_g^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_{gp}^{(1)} = 0$				
M1	0	-0,149	-0,078	0,139	0,737	0,935	-0,772	-0,645	-0,266	0,797	1,208
	10^{-3}	-0,144	-0,074	0,141	0,734	0,929	-0,763	-0,637	-0,261	0,792	1,200
	10^{-2}	-0,104	-0,039	0,160	0,707	0,884	-0,683	-0,566	-0,218	0,756	1,129
	10^{-1}	0,198	0,222	0,303	0,521	0,559	-0,132	-0,081	0,078	0,519	0,663
	0,5	0,741	0,700	0,590	0,281	0,104	0,678	0,641	0,543	0,269	0,110
	1	1,000	0,933	0,750	0,250	0,000	1,000	0,933	0,750	0,250	0,000
	1,5	1,144	1,065	0,848	0,264	-0,015	1,165	1,085	0,865	0,271	-0,015
	2	1,240	1,154	0,918	0,286	-0,008	1,271	1,183	0,942	0,296	-0,008
	3	1,366	1,271	1,012	0,329	0,020	1,403	1,306	1,042	0,340	0,017
	10	1,638	1,527	1,227	0,462	0,136	1,671	1,560	1,256	0,467	0,120
	10^3	1,804	1,686	1,365	0,564	0,235	1,843	1,723	1,398	0,569	0,214
	10^4	1,826	1,707	1,384	0,578	0,249	1,844	1,725	1,400	0,570	0,215
	∞	1,827	1,707	1,384	0,578	0,249	1,845	1,725	1,400	0,570	0,215
M2	0	-0,285	-0,240	0,009	0,975	0,858	-0,748	-0,711	-0,400	0,959	0,987
	10^{-3}	-0,279	-0,234	0,013	0,971	0,852	-0,739	-0,703	-0,394	0,955	0,980
	10^{-2}	-0,228	-0,187	0,044	0,933	0,803	-0,664	-0,632	-0,344	0,914	0,922
	10^{-1}	0,134	0,148	0,263	0,678	0,474	-0,150	-0,143	0,002	0,648	0,541
	0,5	0,722	0,687	0,603	0,339	0,070	0,647	0,606	0,526	0,323	0,088
	1	1,000	0,933	0,750	0,250	0,000	1,000	0,933	0,750	0,250	0,000
	1,5	1,165	1,076	0,832	0,225	0,006	1,198	1,114	0,872	0,234	-0,009
	2	1,283	1,178	0,888	0,217	0,029	1,332	1,236	0,954	0,233	-0,001
	3	1,449	1,319	0,964	0,219	0,081	1,509	1,397	1,060	0,241	0,026
	10	1,873	1,677	1,152	0,262	0,283	1,903	1,751	1,293	0,287	0,131
	10^3	2,236	1,980	1,307	0,323	0,496	2,180	1,999	1,455	0,336	0,230
	10^4	2,240	1,983	1,309	0,324	0,499	2,183	2,002	1,457	0,336	0,231
	∞	2,241	1,984	1,310	0,324	0,499	2,184	2,003	1,457	0,336	0,231

том сингулярности при $\frac{1}{\sqrt{r}}$, где r – расстояние от точки в области до вершины трещины, то понятно, что при малых r даже небольшое отличие КИМ говорит о существенном отличии значений моментов M_s в задачах ЭМУ и ТУ, т. е. о необходимости решения задачи ЭМУ с учетом пьезосвойств материала. Из таблицы 3 также видно, что, если механическая жесткость включения меньше жесткости плиты ($\lambda_s^{(1)} > 1$), то КИМ положителен, и в плите при положительных толщинных координатах z напряжения положительны и возникают деформации растяжения; если же механическая жесткость включения меньше жесткости плиты ($\lambda_s^{(1)} < 1$), то КИМ отрицателен, и при положительных толщинных координатах z напряжения в плите отрицательны и возникают деформации сжатия.

Таблица 2. Значения M_s/m_y в точках контакта упругой плиты с круговым включением в зависимости от параметра $\lambda_s^{(1)}$

$\lambda_s^{(1)}$	θ , рад.									
	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
	Материал М1					Материал М2				
0	-0,757	-0,633	-0,262	0,784	1,209	-0,849	-0,663	-0,218	0,680	1,028
0,001	-0,748	-0,624	-0,257	0,780	1,201	-0,839	-0,654	-0,214	0,676	1,021
0,01	-0,668	-0,554	-0,215	0,744	1,130	-0,753	-0,581	-0,173	0,645	0,959
0,1	-0,122	-0,072	0,081	0,511	0,663	-0,170	-0,086	0,107	0,447	0,559
0,5	0,682	0,644	0,543	0,266	0,110	0,669	0,639	0,546	0,253	0,094
1	1,000	0,933	0,750	0,250	0,000	1,000	0,933	0,750	0,250	0,000
1,5	1,163	1,083	0,865	0,272	-0,015	1,170	1,088	0,866	0,275	-0,015
2	1,268	1,181	0,942	0,298	-0,008	1,280	1,189	0,945	0,302	-0,013
3	1,398	1,303	1,041	0,343	0,017	1,417	1,316	1,049	0,347	0,004
10	1,663	1,554	1,255	0,472	0,120	1,695	1,580	1,272	0,469	0,078
100	1,815	1,699	1,382	0,564	0,203	1,855	1,732	1,406	0,554	0,138
1000	1,833	1,716	1,397	0,575	0,214	1,874	1,75	1,422	0,564	0,145
∞	1,835	1,717	1,399	0,577	0,215	1,876	1,752	1,424	0,565	0,146

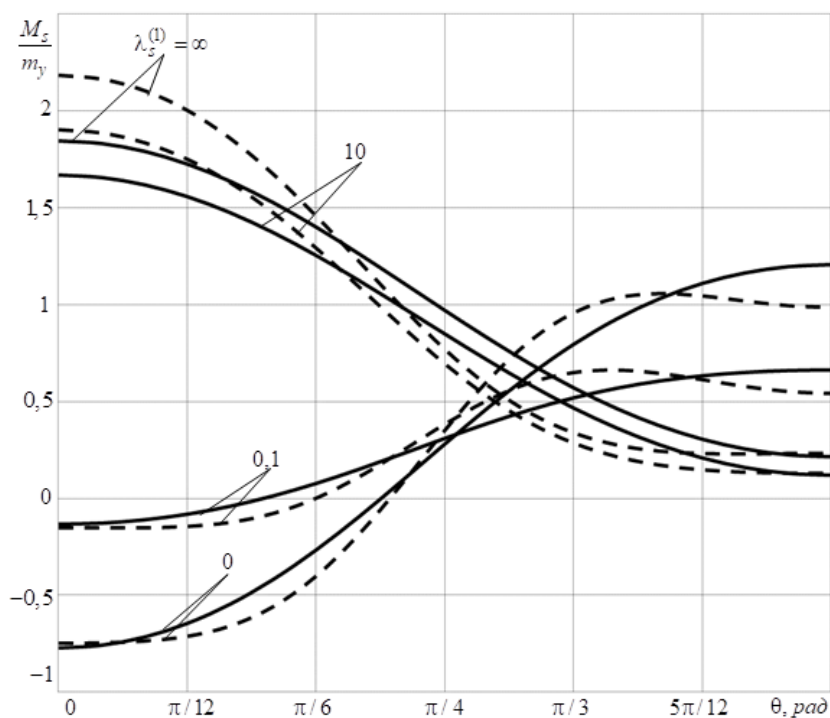


Рис. 2. Графики распределения моментов M_s в бесконечной плите около контура L_1 с круговым включением для некоторых значений параметра $\lambda_s^{(1)}$

Таблица 3. Значения КИМ $k_1^\pm$ в зависимости от параметра $\lambda_s^{(1)}$

Материал	Задача	$\lambda_s^{(1)}$							
		0	0,001	0,01	0,1	10	100	1000	∞
M1	ЭМУ	-0,503	-0,156	-0,022	-0,003	0,010	0,095	0,514	1
	ТУ	-0,505	-0,156	-0,022	-0,003	0,010	0,095	0,514	1
M2	ЭМУ	-0,530	-0,156	-0,022	-0,003	0,008	0,079	0,464	1
	ТУ	-0,539	-0,153	-0,021	-0,003	0,009	0,090	0,500	1

Закключение. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит [8, 11] решена задача об изгибе бесконечной пьезоплиты с эллиптическим пьезовключением. При этом, с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, и удовлетворения граничным условиям на контуре контакта плиты и включения методом рядов, задача сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений 8-го порядка. Для плиты с круговым или линейным включениями проведены численные исследования, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭМУС в зависимости от геометрических характеристик и физико-механических постоянных материалов плиты и включения. Для случаев абсолютно мягкого включения (при $\lambda_s^{(1)} = \infty$) и абсолютно жесткого включения (при $\lambda_s^{(1)} = 0$) полученные результаты совпадают с известными из решения задачи для плиты с отверстием со свободным или жестко подкрепленным контуром.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностран. лит., 1949. – 717 с.
3. Бичурин М.И. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов, Г. Сринивасан, С.В. Нан. – М.: Акад. естествознания, 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюл. Рос. магнит. о-ва. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Rahmoune M. New thin piezoelectric plate models / M. Rahmoune, A. Benjeddou, R. Ohayon // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1998. – Vol. 9. – P. 1017–1029.
6. Srinivas S. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites / S. Srinivas, Y.L. Jiang // Acta Mater. – 2005. – Vol. 53. – P. 4135–4142. – DOI: 10.1016/j.actamat.2005.05.014.
7. Vel S.S. Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators / S.S. Vel, R.C. Batra // Smart Mater. Struct. – 2001. – Vol. 10. – P. 240–251. – DOI: 10.1088/0964-1726/10/2/309.
8. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 37–57.
9. Калоеров С.А. Исследование электромагнитоупругого состояния конечной многосвязной тонкой плиты / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестн. Перм. нац.-исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2023. – № 4. – С. 34–44.

10. Калоеров С.А. Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе многосвязной плиты / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Прикладная математика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 4. – С. 143–155.
11. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38.
12. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
13. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – Киев-Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
14. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
15. Yamamoto Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
16. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Materials. – 2009. – V. 41. – P. 329–338. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001.

S.A. Kaloerov, O.E. Ermakov, A.B. Mironenko

Solving the problem of bending a piecewise homogeneous electro-magneto-elastic thin plate.

Using complex potentials and the series method, an accurate analytical solution to the problem of bending piezoplates with elliptical or linear inclusion is given. The results of numerical studies for an infinite plate with circular or linear inclusion are described. The patterns of variation of bending moments and moment intensity coefficients for the ends of linear inclusions are investigated depending on the physical and mechanical properties of the plate and inclusion materials. It has been established that the influence of taking into account the piezoelectric properties of the material on the values of bending moments in the plate is great and cannot be ignored when studying the stress-strain state of the plate.

Keywords: *piezo plate, piezo inclusions, complex potentials, bending moments, moment intensity coefficients.*

*Статья поступила в редакцию 20.01.2025;
доработана 14.02.2025;
рекомендована к печати 25.02.2025.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2025-1-35-41

EDN:OGMIJH

©2025. А.А. Глухов¹, М.Н. Пачева², В.И. Сторожев³, С.В. Сторожев⁴

БАЗИСНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН СДВИГА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ТЕЛАХ С МНОГОФАКТОРНОЙ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Предложен и реализован численно-аналитический алгоритм интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами относительно амплитудной составляющей сдвиговой упругой волны в трансверсально-изотропном полупространстве с локализованной приповерхностной неоднородностью, каждый из физико-механических параметров которого характеризуется своей, отличающейся от остальных, двойной экспоненциальной функцией изменения по поперечной координате. Результаты исследования являются основой для получения дисперсионных уравнений, описывающих распространение обобщенных поверхностных волн Лява в волноводных структурах, включающих деформируемое полупространство с рассматриваемыми свойствами.

Ключевые слова: анизотропное функционально-градиентное полупространство, локализованная приповерхностная многофакторная неоднородность, двойные экспоненциальные функции, сдвиговые упругие волны, амплитудные волновые

¹ Глухов Антон Александрович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: antonglukhov2012@yandex.com.

Glukhov Anton Alexandrovich – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

² Пачева Марина Николаевна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: pacheva.m.n@mail.ru.

Pacheva Marina Nikolaevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³ Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., гл. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

⁴ Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

уравнения, численно-аналитическая методика интегрирования, базисные частные решения, степенные ряды, рекуррентные соотношения.

Введение и цели исследования. К числу актуальных в фундаментальном и прикладном аспектах проблем теоретического численно-аналитического исследования закономерностей распространения локализованных и нормальных волн деформаций в непрерывно-неоднородных по физико-механическим свойствам упругих телах в рамках моделей динамического деформирования инновационных функционально-градиентных анизотропных материалов [1, 2] и массивов анизотропных горных пород [3] относятся вопросы учета их многофакторной неоднородности – отличий в функциональных законах описания различных модулей упругости и параметра плотности материалов. Ключевым вопросом в таких исследованиях является построение в аналитической форме систем базисных частных решений соответствующих амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Применительно к некоторым моделям распространения нормальных сдвиговых упругих волн в изотропном и трансверсально-изотропном слое, в которых учитывались эффекты двухфакторной экспоненциальной неоднородности материалов, такие базисные решения получены в работах [4–8], а случай общей трехфакторной неоднородности исследован в работах [9, 10]. При этом введенная в работе [11] специализированная модель описания локализованной приповерхностной неоднородности трансверсально-изотропных полубесконечных тел с применением двойных экспоненциальных функций использована для анализа обобщенных поверхностных волн сдвигового типа только в случае однофакторной неоднородности при однотипных функциональных зависимостях для всех характеристик материалов [11–14].

В контексте охарактеризованной проблемы, целями исследований, реализуемых в данной работе, является получение базисных частных решений системы амплитудных волновых дифференциальных уравнений для сдвиговых упругих волн в функционально-градиентном трансверсально-изотропном полупространстве применительно к случаю его произвольной многофакторной приповерхностной неоднородности, описываемой различными двойными экспоненциальными функциями.

1. Формулировка амплитудного уравнения модели. Без ограничения общности рассматривается распространение сдвиговых горизонтально-поляризованных волн с волновым числом k и циклической частотой ω вдоль координатного направления Ox_1 в отнесенном к прямоугольным безразмерным координатам $Ox_1x_2x_3$ с нормирующим параметром h_* [м] трансверсально-изотропном функционально-градиентном полупространстве $V = \{(x_1, x_2) \in R_2, 0 \leq x_3 < \infty\}$ с коллинеарными Ox_3 направлением непрерывной неоднородности и осью изотропии. Исследуемое волновое движение описывается уравнением

$$\partial_1(c_{66}\partial_1u_2) + \partial_3(c_{44}\partial_3u_2) - \rho\partial_t^2u_2 = 0, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1)$$

в котором физико-механические характеристики материала имеют вид

$$c_{44}(x_3) = c_{440}\varphi_{44}(\lambda_{44}, \beta_{44}, x_3), \quad (2)$$

$$\varphi_{44}(\lambda_{44}, \beta_{44}, x_3) = \exp(\lambda_{44} \exp(-\beta_{44}x_3)),$$

$$c_{66}(x_3) = c_{660}\varphi_{66}(\lambda_{66}, \beta_{66}, x_3),$$

$$\varphi_{66}(\lambda_{66}, \beta_{66}, x_3) = \exp(\lambda_{66} \exp(-\beta_{66}x_3)),$$

$$\rho(x_1) = \rho_0\varphi_\rho(\lambda_\rho, \beta_\rho, x_1),$$

$$\varphi_\rho(\lambda_\rho, \beta_\rho, x_1) = \exp(\lambda_\rho \exp(-\beta_\rho x_1)),$$

а комплексная функция волновых упругих перемещений $u_2(x_1, x_3, t)$ задается в форме

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)). \quad (3)$$

После подстановки представлений (2) и (3) в (1), а также с учетом соотношений

$$c'_{44}(x_3) = \delta_{44} \exp(-\beta_{44}x_3)\varphi_{44}(\lambda_{44}, \beta_{44}, x_3), \quad \delta_{44} = -c_{440}\lambda_{44}\beta_{44}, \quad (4)$$

$$c'_{66}(x_3) = \delta_{66} \exp(-\beta_{66}x_3)\varphi_{66}(\lambda_{66}, \beta_{66}, x_3), \quad \delta_{66} = -c_{660}\lambda_{66}\beta_{66},$$

задача интегрирования уравнения относительно амплитудной функции $u_{20}(x_3)$ записывается в виде

$$c_{440}\varphi_{44}(\lambda_{44}, \beta_{44}, x_1)u''_{20}(x_3) + \delta_{44} \exp(-\beta_{44}x_3)\varphi_{44}(\lambda_{44}, \beta_{44}, x_1)u'_{20}(x_3) + \quad (5)$$

$$+(\rho_0\varphi_\rho(\lambda_\rho, \beta_\rho, x_3)\omega^2 - c_{660}\varphi_{66}(\lambda_{66}, \beta_{66}, x_3)k^2)u_{20}(x_3) = 0.$$

2. Алгоритм интегрирования амплитудного волнового уравнения.

В процессе разработки численно-аналитического алгоритма интегрирования (5) в рассмотрение вводятся следующие представления в форме степенных рядов:

$$u_{20}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n, \quad (6)$$

$$u'_{20}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x_3^n, \quad u''_{20}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x_3^n,$$

$$\exp(\lambda_{44}x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{44}^m}{m!} x_3^m, \quad \exp(\lambda_{66}x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{66}^m}{m!} x_3^m, \quad (7)$$

$$\exp(\lambda_\rho x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_\rho^m}{m!} x_3^m.$$

$$\varphi_{44}(\lambda_{44}, \beta_{44}, x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{44} \exp(-\beta_{44}x_3))^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{44}^m}{m!} \exp(-m\beta_{44}x_3) = \quad (8)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda_{44}^m}{m!} \frac{(m\beta_{44})^q}{q!} x_3^q = \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q44} x_3^q, \quad \Delta_{q44} = (-1)^q \frac{\beta_{44}^q}{q!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^q \lambda_{44}^m}{m!};$$

$$\varphi_{66}(\lambda_{66}, \beta_{66}, x_3) = \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q66} x_3^q, \quad \Delta_{q66} = (-1)^q \frac{\beta_{66}^q}{q!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^q \lambda_{66}^m}{m!}; \quad (9)$$

$$\varphi_{\rho}(\lambda_{\rho}, \beta_{\rho}, x_1) = \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\rho} x_1^q, \quad \Delta_{q\rho} = (-1)^q \frac{\beta_{\rho}^q}{q!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^q \lambda_{\rho}^m}{m!}; \quad (10)$$

$$\exp(-\beta_{44}x_3)\varphi_{44}(\lambda_{44}, \beta_{44}, x_3) = \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{q44} x_3^q, \quad (11)$$

$$\Omega_{q66} = \sum_{m=0}^q \frac{\lambda_{66}^m}{m!} \Delta_{q-m, 66}.$$

Результатом подстановки представлений (6)–(11) в уравнение (5) является соотношение

$$\begin{aligned} & c_{440} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x_3^n + \\ & + \delta_{44} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{q44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x_3^n + \\ & + (\rho_0 \omega^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\rho} x_3^q - k^2 c_{660} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q66} x_3^q) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

которое может быть записано в форме

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p x_1^p = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_p = & \sum_{n=0}^p ((n+1)(n+2)c_{440}\Delta_{p-n, 44}a_{n+2} + (n+1)\delta_{44}\Omega_{p-n, 44}a_{n+1} + \\ & + (\rho_0\omega^2\Delta_{p-n, \rho} - k^2c_{660}\Delta_{p-n, 66})a_n. \end{aligned} \quad (14)$$

В результате, в качестве следствий из (13) в виде равенств нулю величин Φ_p при $p = \overline{0, \infty}$, записывается система рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} & (n+2)(n+1)c_{440}\Delta_{p-n, 44}a_{n+2} = \\ & = -((n+1)\delta_{44}\Omega_{p-n, 44}a_{n+1} + (\rho_0\omega^2\Delta_{p-n, \rho} - k^2c_{660}\Delta_{p-n, 66})a_n, \end{aligned} \quad (15)$$

из которой определяются совокупности коэффициентов $\{a_n\}$ ($n = \overline{0, \infty}$) в выражении (6) для двух базисных частных решения амплитудного уравнения (5). При $p = 0$ формула (15) принимает вид

$$2c_{440}\Delta_{0c}a_2 = -\delta_{44}\Omega_{044}a_{11} - (\rho_0\Delta_{0\rho}\omega^2 - c_{660}\Delta_{066}k^2)a_0, \quad (16)$$

и представляет собой соотношение, из которого коэффициент a_2 выражается через произвольные величины a_1, a_0 . Для формирования двух базисных решений $u_{20j}(x_3, \omega, k)$ ($j = \overline{1, 2}$) уравнения (5) предлагается выбор совокупностей $\{a_1, a_0\}$ в виде $\{1, 0\}, \{0, 1\}$, на основе которого определяются две последовательности значений $\{a_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ ($j = \overline{1, 2}$) и записываются аналитические представления базисных решений в форме степенных рядов

$$u_{20j}(x_3, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} x_3^n. \quad (17)$$

При численных исследованиях ряд в представлении (17) редуцируется на задаваемом уровне точности.

Заключение. Результатом описанных в работе исследований, согласно сформулированным целям, является разработка численно-аналитического алгоритма построения в аналитической форме базисных частных решений для амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение обобщенных поверхностных упругих волн сдвигового типа вдоль произвольного направления в граничной плоскости функционально-градиентного трансверсально-изотропного полупространства с многофакторной локализованной приповерхностной неоднородностью, описываемой отдельными разнотипными зависимостями в виде двойных экспоненциальных функций для каждой из физико-механических характеристик его материала.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Miyamoto Y. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
2. Birman V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L.W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, N 5. – P. 195–216.
3. Капитонов А.М. Физические свойства горных пород западной части Сибирской платформы / А.М. Капитонов, В.Г. Васильев. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. – 424 с.
4. Majhi S. Reflection and Transmission of Plane SH-Waves in an Initially Stressed Inhomogeneous Anisotropic Magnetoelastic Medium / S. Majhi, P.C. Pal, S. Kumar // Journal of Seismology. – 2017. – V. 21. – P. 155–163.
5. Глухов А.А. Методика анализа проблемы распространения волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с различными законами экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 1 (86). – С. 51–60. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-1-51-60. – EDN: PSXXPV.

6. Глухов А.А. Анализ модели распространения нормальных Р-SV волн в функционально-градиентном ортотропном слое для специального случая двухфакторной экспоненциальной неоднородности / А.А. Глухов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 2(87). – С. 34–40. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-2-34-40. – EDN: BIAPOE.
7. Глухов А.А. Дисперсионные соотношения для сдвиговых волн в анизотропном функционально-градиентном слое с двухфакторной экспоненциальной поперечной неоднородностью по механическим характеристикам / А.А. Глухов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2024. – № 4. – С. 5–10. – DOI: 10.5281/zenodo.14138063. – EDN: VREMUM.
8. Глухов А.А. Дисперсионные соотношения для нормальных SH-волн в трансверсально-изотропном слое с разнотипной экспоненциальной поперечной неоднородностью по механическим характеристикам / А.А. Глухов, М.Н. Пачева // Матер. докл. Всероссийской конф. «Матем. моделирование в механике», посвящ. 50-летию ИВМ СО РАН. – Электронные данные. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2024. – С. 38–40. – Режим доступа: <https://mdm2024.tilda.ws/#rec796105776>.
9. Глухов А.А. Численно-аналитическое исследование модели распространения сдвиговых упругих волн в трансверсально-изотропной среде с трехфакторной экспоненциальной неоднородностью / А.А. Глухов, С.В. Сторожев // Сборник материалов Международной конференции «XXXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам». – Симферополь: ИТ «АРЕАЛ», 2024. – С. 79–80.
10. Глухов А.А. Методика анализа проблемы распространения волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с различными законами экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 1 (86). – С. 51–60. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-1-51-60. – EDN: PSXXPV.
11. Болнокин В.Е. Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – №3 (80). – С. 14–19. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN: BOBAVC.
12. Глухов А.А. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – №4 (81). – С. 15–22. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN: JBNEKR.
13. Глухов А.А. Волны Лява в структуре «однородный изотропный слой на трансверсально-изотропном полупространстве с двойной экспоненциальной неоднородностью» / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – №1 (82). – С. 32–39. – РИНЦ: 54749404. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-1-32-39. – EDN: ENGOVX.
14. Глухов А.А. Анализ модели распространения поверхностных релеевских волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности / А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – №2 (83). – С. 26–38. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-26-38. – EDN: ETYFCH.

A.A. Glukhov, M.N. Pacheva, V.I. Storozhev, S.V. Storozhev

Basic solutions of the equations of shear wave propagation in semi-infinite transversal isotropic functional gradient bodies with multifactor near-surface heterogeneity.

A numerical-analytical algorithm for integrating an ordinary differential equation with variable

coefficients relative to the amplitude component of a shear elastic wave in a transversely isotropic half-space with a localized near-surface heterogeneity is proposed and implemented. Each of the physical-mechanical parameters of the half-space is characterized by its own, different from the others, double exponential function of change along the transverse coordinate. The results of the study are the basis for obtaining dispersion equations describing the propagation of generalized surface Love waves in waveguide structures including a deformable half-space with the considered properties.

Keywords: *anisotropic functional-gradient half-space, localized near-surface multifactor heterogeneity, double exponential functions, shear elastic waves, amplitude wave equations, numerical-analytical integration technique, basic partial solutions, power series, recurrence relations.*

*Статья поступила в редакцию 22.01.2025;
доработана 17.02.2025;
рекомендована к печати 25.02.2025.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-1-42-51

EDN:MSUZNS

©2025. А.И. Мирончук¹

РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКИХ ПЛИТ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОТВЕРСТИЯМИ ИЛИ ТРЕЩИНАМИ

Предложен метод решения задач линейной вязкоупругости для тонких плит с периодическим рядом эллиптических отверстий, находящихся под действием изгибающих моментов и поперечных сил. Методом малого параметра исходная задача сведена к последовательности краевых задач, решаемых с использованием комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных анизотропных плит. Получены общие представления комплексных потенциалов приближений, краевые условия для их определения. Заменой степеней малого параметра операторами Работнова разработан механизм определения напряженного состояния плиты в любой момент времени по комплексным потенциалам приближений. В качестве примера дано решение задачи для плиты с периодическим рядом эллиптических отверстий. Исследовано изменение изгибающих моментов во времени вплоть до стационарного состояния, а также влияние геометрических характеристик плиты на значения этих величин.

Ключевые слова: вязкоупругость, периодическая задача, многосвязная плита, комплексные потенциалы теории изгиба плит, метод малого параметра, обобщенный метод наименьших квадратов.

Введение. При конструировании различных механизмов и их составных частей часто возникает необходимость обеспечения прочности тонкостенных деформируемых конструкций. Развитие технологий обработки и производства материалов привело к появлению новых задач, связанных с оценкой поведения таких конструкций под воздействием разнообразных нагрузок. Особый интерес представляют собой густо перфорированные пластины, поскольку в них концентрация напряжений и деформаций вблизи отверстий существенно влияет на поведение материала. Возникающие под различными внешними воздействиями напряжения в вязкоупругом теле со временем изменяются, что также необходимо учитывать при расчете конструкций на прочность и долговечность, особенно в тех случаях, когда напряжения изначально достигают предельных случаев. Несмотря на важность проблемы, исследований в этом направлении выполнено весьма мало. Для решения задач в случае многосвязных изотропных пласти-

¹ Мирончук Алена Игоревна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: a.i.mironchuk@yandex.ru.

Mironchuk Alyona Igorevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

нок, находящихся в условиях плоской задачи или изгиба тонких плит, предложен метод малого параметра и решен ряд задач [1, 2]. В работе [3] предложен метод решения плоских задач вязкоупругости для анизотропных пластинок с произвольным числом и сочетанием отверстий и включений варьированной конфигурации.

В данной статье метод малого параметра для решения задач вязкоупругости распространен на задачи об изгибе плиты с периодическим рядом эллиптических отверстий или трещин. Проведены численные исследования напряженно-деформируемого состояния, с помощью которых установлены закономерности влияния геометрических характеристик плиты, физико-механических параметров материала, а также времени приложения нагрузки на значения основных характеристик изгиба. Проведены численные исследования изменения со временем внутренних изгибающих и крутящих моментов для случая плиты с периодическим рядом свободных от загрузжений одинаковых эллиптических отверстий при действии изгибающих моментов на бесконечности для различных значений расстояния между контурами. При этом, как частный случай, рассматриваются и многосвязные изотропные плиты.

1. Постановка и метод решения задачи. Рассмотрим находящуюся в условиях поперечного изгиба тонкую вязкоупругую анизотропную плиту, срединная плоскость которой занимает многосвязную область S с бесконечным периодическим рядом идентичных одинаково ориентированных эллиптических отверстий, имеющих контуры L_l ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (рис. 1) с центрами на оси Ox прямоугольной системы координат Oxy . Полус этой координатной системы расположен в центре отверстия с контуром L_0 , называемого основным. Введем для полуосей эллипсов обозначения a_l , b_l ; для угла наклона полуоси a_l к оси Ox — φ_l ; для расстояния между центрами соседних отверстий — h_x . Контур отверстия свободны от внешних воздействий, на бесконечности действуют моменты M_y^∞ , M_x^∞ , а $H_{xy}^\infty = 0$.

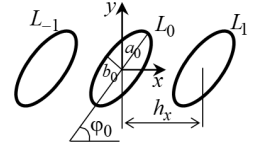


Рис. 1.

Следуя предложенным в работах [1, 3] подходам, задачу определения вязкоупругого состояния плиты будем решать методом малого параметра с использованием комплексных потенциалов. При таком подходе комплексные потенциалы теории изгиба тонких плит [4, 5] разлагаются в ряды вида [6]

$$W'_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j W'_{jk}(z_k), \quad (1)$$

где λ — малый параметр, в качестве которого выбирается изменение во времени коэффициента Пуассона ν_{12} , то есть разность [3] $\lambda = \nu_{12} - \nu_{12}^0$; $W'_{jk}(z_k)$ — производные комплексных потенциалов приближений, имеющие в данном случае вид

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} W'_{jkl}(z_k); \quad (2)$$

Γ_{jk} – комплексные постоянные, которые находятся из решения систем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{0k} &= \left(-\frac{a_{12}^0 M_y^\infty}{D_0}, -\frac{a_{12}^0 M_y^\infty}{D_0}, -\frac{a_{22} M_y^\infty}{D_0}, 0 \right), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{1k} &= \left(\frac{a_{11} M_y^\infty}{D_0}, -\frac{a_{12}^0 M_y^\infty}{D_0}, -\frac{a_{12}^0 M_y^\infty}{D_0}, 0 \right), \\ \Gamma_{jk} &= 0 \quad (j \geq 2); \end{aligned} \quad (3)$$

$W'_{jkl}(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl} областей S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$; μ_k – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0;$$

$$D_{ij} = b_{ij} D_0; \quad D_0 = 2h^3/3;$$

$$b_{11} = (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Delta, \quad b_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Delta,$$

$$b_{16} = (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})/\Delta, \quad b_{22} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Delta,$$

$$b_{26} = (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11})/\Delta, \quad b_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Delta;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix};$$

a_{ij} – коэффициенты деформаций материала в уравнениях обобщенного закона Гука; h – полутолщина плиты.

Неизвестные функции $W'_{jkl}(z_k)$ определяются из граничных условий на контурах отверстий. После их определения становятся известными функции приближений (2), и по ним можно вычислять изгибающие и крутящий моменты в любой момент времени по формулам [6]

$$\begin{aligned} M_x &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^J \lambda^j \sum_{i=0}^j p_{j-i k} W''_{ik}, \\ M_y &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^J \lambda^j \sum_{i=0}^j q_{j-i k} W''_{ik}, \\ H_{xy} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^J \lambda^j r_k W''_{jk}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$p_{jk} = D_0 (B_{11}^0 d_{j1} + B_{12}^0 \mu_k^2 d_{j2}), \quad q_{jk} = D_0 (B_{12}^0 d_{j2} + B_{22}^0 \mu_k^2 d_{j1}), \quad r_k = 2D_0 B_{66} \mu_k.$$

2. Построение решения задачи. Используя методы конформных отображений и разложения функций в ряды Лорана, найдем общие представления

неизвестных функций $W'_{jkl}(z_k)$. Отобразим конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} в областях S_k [7]

$$\begin{aligned} z_k &= l h_x + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \\ R_{kl} &= [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/2, \\ m_{kl} &= [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/2R_{kl}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда функции $W'_{jkl}(z_k)$, голоморфные вне контуров L_{kl} и исчезающе малые на бесконечности, в областях ζ_{kl} будут голоморфными вне кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ и могут быть представлены рядами Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl}

$$W'_{jkl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jkl n}}{\zeta_{kl}^n}.$$

В следствие этого функции (2) примут вид

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{jkl n}, \quad (6)$$

где $\varphi_{kln} = 1/\zeta_{kl}^n$, $a_{jkl n}$ – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах.

В силу периодичности напряженного состояния, значения моментов в точках z и $z + h_x$ будут одинаковыми. Тогда из равенств (4) следует, что $W''_{jk}(z_k) = W''_{jk}(z_k + h_x)$, и на основе (6)

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkl n} \varphi'_{kln}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkl n} \varphi'_{kln}(z_k + h_x), \quad (7)$$

где

$$\varphi'_{kln}(z_k) = \frac{\zeta_{kl}^2}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}. \quad (8)$$

Из равенств (5) и (8), следует, что

$$\zeta_{kl}(z_k + h_x) = \zeta_{kl+1}(z_k), \quad \varphi'_{kln}(z_k + h_x) = \varphi'_{kl+1,n}(z_k). \quad (9)$$

Подставляя выражения (9) в (7) и переобозначая индексы суммирования, находим

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkl n} \varphi'_{kln}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkl n} \varphi'_{kl+1,n}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkl-1,n} \varphi'_{kln}(z_k).$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi'_{kln}(z_k)$, будем иметь $a_{jkl-1, n} = a_{jkn}$. Тогда, для производных комплексных потенциалов приближений окончательно находим

$$\begin{aligned} W'_{jk}(z_k) &= \Gamma_{jk} z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkn} \psi_{kn}(z_k), \\ W''_{jk}(z_k) &= \Gamma_{jk} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkn} \psi'_{kn}(z_k), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\psi_{kn}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi_{kln}(z_k), \quad \psi'_{kn}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi'_{kln}(z_k); \quad (11)$$

a_{jkn} – постоянные, определяемые из граничных условий лишь на одном из контуров, например, на контуре основного отверстия L_0 . На остальных контурах, в силу периодичности производных комплексных потенциалов, граничные условия будут удовлетворены автоматически.

На контуре основного отверстия L_0 граничные условия имеют вид [6]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0ki} W'_{jk}(z_k) = f_{ji}(t) \quad (i = 1, 2), \quad (12)$$

в которых

$$\begin{aligned} g_{0k1} &= \frac{p_{0k}}{\mu_k}, \quad g_{0k2} = q_{0k}, \\ f_{j1} &= - (1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{j-1} \frac{p_{j-nk}}{\mu_k} W'_{nk}(z_k), \\ f_{j2} &= - (1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{j-1} q_{j-nk} W'_{nk}(z_k); \\ B_{11}^0 &= \frac{a_{22}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad B_{22}^0 = \frac{1}{a_{11} (\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad B_{12}^0 = \frac{\sqrt{a_{11} a_{22}}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ d_{j1} &= \left(\lambda_2^{-j-1} - \lambda_1^{-j-1} \right), \quad d_{j2} = \left(\lambda_1^{-j-1} + \lambda_2^{-j-1} \right), \quad \lambda_{1,2} = \frac{a_{12}^0 \mp \sqrt{a_{11} a_{22}}}{a_{11}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничным условиям (12) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов. Для этого выберем на контуре L_0 систему точек $M_{m0}(x_{m0}, y_{m0})$ ($m = \overline{1, M_0}$), в которых запишем условия удовлетворения соответствующим граничным условиям, подставляя в них функции (10). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{jkn} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_{0ki} \delta_{k,s} \psi'_{kn}(t_{km}) a_{jkn} &= \frac{df_{ji}(t_m)}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0ki} \delta_{k,s} \Gamma_{jk} \\ (m = \overline{1, M_0}; \quad i = 1, 2). \end{aligned} \quad (14)$$

Систему (14) будем решать с использованием метода сингулярных разложений [8]. После ее решения комплексные потенциалы (2) будут известными и по ним можно найти значения моментов (4) в любой момент времени, а в случае перехода отверстий в прямолинейные разрезы-трещины определить коэффициенты интенсивности моментов (КИМ).

3. Описание результатов численных исследований. Были проведены численные исследования напряженного состояния плиты из алюминия (материал М1) и эпоксида (материал М2). Коэффициенты деформаций и реологические постоянные для этих материалов приведены в таблице 1. При проведении численных исследований количество членов в рядах (10) и количество точек M_0 на контуре L_0 , в которых удовлетворялись граничные условия при получении систем уравнений (14), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контуре не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не превышала 10^{-3}). Как показали численные исследования, для такого удовлетворения граничным условиям в рассмотренных задачах в зависимости от близости концентраторов напряжений друг к другу достаточно было оставлять от 30 до 50 членов в рядах (10) и на контуре L_0 выбирать от 400 до 500 «коллокационных» точек. Количество приближений по степеням малого параметра выбиралось так, чтобы изменение значений изгибающих моментов между последовательными приближениями составляло менее 0,01%. Для выполнения этого условия в рядах по малому параметру удерживалось от 6 до 9 слагаемых.

В таблице 2 для плиты с периодическим рядом круговых отверстий радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) вдоль оси Ox при действии на бесконечности моментов интенсивности m ($M_y^\infty = m$) приведены значения нормальных

моментов M_s/m в точках $A(a_0, 0)$ и $B(0, a_0)$ в зависимости от времени приложения нагрузки. Рассматривался случай $c/a_0 = 0,5$, где c – расстояние между контурами ($c = h_x - 2a_0$). На рисунке 2 изображены графики изменения этих моментов в точке A , где они достигают максимальных значений.

Таблица 1.

Постоянные материала	Материал	
	М1	М2
$a_{11} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}^{-1}$	0,1408	0,4347
$a_{22} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}^{-1}$	0,1458	0,6250
$a_{12} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}^{-1}$	-0,0352	-0,0478
$a_{66} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}^{-1}$	0,3521	3,2467
$\alpha^*, c^{-0,5}$	0,5000	0,8460
$\beta_1^* \cdot 10^3, c^{-0,5}$	0,00050	0,1570
$\beta_2^* \cdot 10^3, c^{-0,5}$	0,00049	0,2745
$\delta_1^* \cdot 10^3, c^{-0,5}$	0,00615	0,0323
$\delta_2^* \cdot 10^3, c^{-0,5}$	0,00614	0,1295

Таблица 2.

Материал	Точка	t , час						
		0	50	100	200	300	400	500
М1	А	5,032	5,128	5,135	5,137	5,138	5,138	5,138
	В	0,168	0,112	0,110	0,108	0,108	0,108	0,108
М2	А	4,917	4,994	4,998	5,001	5,002	5,004	5,004
	В	0,464	0,490	0,492	0,494	0,495	0,496	0,496

Сплошные линии относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1. Значения моментов M_n для случая плиты с неподкрепленным отверстием равны нулю, и поэтому они в таблице 2 не приводятся. Из таблицы 2 и рисунка 2 видно, что с течением времени значения внутренних моментов в плите изменяются. При этом большие изменения моментов происходят лишь в первые 50 час. после приложения нагрузки, а через 200 час. они становятся практически неизменными, т.е. в плите устанавливается стационарное состояние. Как показывают расчеты, и в других задачах стационарное состояние устанавливается примерно за такое же время. Поэтому, в дальнейшем результаты расчетов проводились для двух случаев: когда $t = 0$ (начальный момент времени) и $t = 400$ (через 400 час. от начала процесса деформирования), когда, наверняка, уже установилось стационарное состояние. Как следует из указанных результатов, при переходе в стационарное состояние значения моментов претерпевают большие изменения. Так, в случае плиты из материала М1 значения M_s в точке А увеличиваются на 5%, а в точке В уменьшаются на 35%; в случае плиты из материала М2 – в точке А увеличиваются на 2%, а в точке В – на 7%.

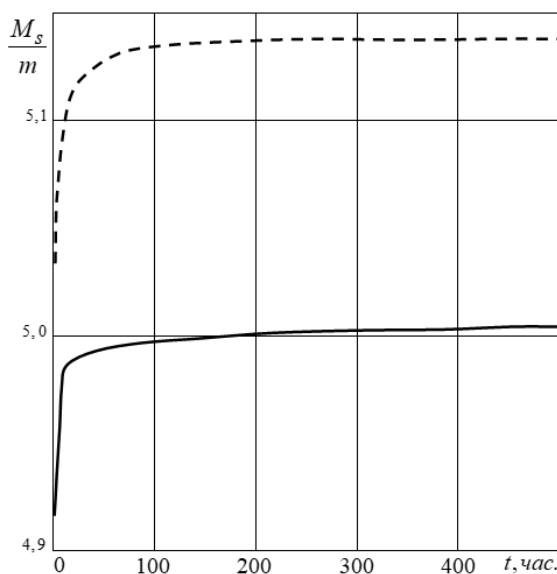


Рис. 2.

Потому, в дальнейшем результаты расчетов проводились для двух случаев: когда $t = 0$ (начальный момент времени) и $t = 400$ (через 400 час. от начала процесса деформирования), когда, наверняка, уже установилось стационарное состояние. Как следует из указанных результатов, при переходе в стационарное состояние значения моментов претерпевают большие изменения. Так, в случае плиты из материала М1 значения M_s в точке А увеличиваются на 5%, а в точке В уменьшаются на 35%; в случае плиты из материала М2 – в точке А увеличиваются на 2%, а в точке В – на 7%.

В таблице 3 для плиты с периодическим рядом круговых отверстий радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) при действии на бесконечности моментов интенсивности m ($M_y^\infty = m$) даны значения изгибающих моментов M_s/m вблизи контура L_0 в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox для различных значений c/a_0 . Из таблицы 3 видно, что с уменьшением расстояния между отверстиями значения изгибающих моментов в этой зоне значительно растут. При переходе в стационарное состояние значения изгибающих моментов вблизи контуров претерпевают значительные изменения, причем наибольшие изменения претерпевают значения моментов в точках, соответствующих углам $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. Так, если $c/a_0 = 0,01$, то при переходе в стационарное состояние для $\theta = 0$ значения моментов увеличиваются на 3%. Для $\theta = \pi/2$ в случае плиты из изотропного материала значения моментов уменьшаются на 36%, а для плиты из анизотропного материала – увеличиваются на 7%. При $c/a_0 > 10$ влияние одних отверстий на напряженное состояние около других незначительно; им можно пренебречь и считать плиту ослабленной лишь одним отверстием.

Таблица 3.

Материал	c/a_0	t , час.	θ , рад.						
			0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
М1	2	0	2,330	2,158	1,716	1,165	0,658	0,307	0,184
		400	2,423	2,262	1,844	1,293	0,728	0,286	0,117
	1	0	3,190	2,855	2,100	1,316	0,696	0,303	0,170
		400	3,290	2,976	2,259	1,476	0,787	0,291	0,108
	0,5	0	5,032	4,207	2,693	1,501	0,740	0,309	0,168
		400	5,138	4,356	2,900	1,697	0,848	0,301	0,108
	0,1	0	19,277	10,833	4,214	1,781	0,782	0,320	0,180
		400	19,498	11,148	4,548	2,035	0,906	0,313	0,115
	0,01	0	140,952	17,319	4,178	1,573	0,700	0,327	0,212
		400	144,812	18,088	4,582	1,818	0,802	0,302	0,136
М2	2	0	2,336	2,146	1,537	0,664	0,234	0,375	0,499
		400	2,448	2,237	1,574	0,656	0,234	0,399	0,531
	1	0	3,087	2,773	1,870	0,710	0,168	0,323	0,461
		400	3,176	2,847	1,902	0,701	0,165	0,344	0,492
	0,5	0	4,917	4,091	2,393	0,785	0,138	0,312	0,464
		400	5,004	4,157	2,421	0,776	0,134	0,334	0,496
	0,1	0	19,518	10,774	3,734	0,912	0,130	0,337	0,501
		400	19,761	10,898	3,771	0,906	0,123	0,359	0,536
	0,01	0	152,867	18,156	3,834	0,837	0,195	0,432	0,592
		400	157,970	18,746	3,952	0,846	0,186	0,458	0,636

Исследования [9] показали, что при уменьшении отношения b_0/a_0 полуосей эллипсов, моделирующих трещины, значения моментов вблизи конца большой полуоси возрастают, стремясь к бесконечности. В случае вырождения эллипсов в трещины (при $b_0/a_0 < 10^{-3}$), для них могут быть определены КИМ.

На рисунке 3 для изгиба плиты с периодическим рядом расположенных вдоль оси Ox трещин длины $2a_0$ при действии моментов интенсивности t вдоль направления оси Oy , изображены значения КИМ $k_{1M}^\pm$ ($k_{2M}^\pm = 0$) вблизи центральной трещины для различных значений c/a_0 , где c – расстояние между

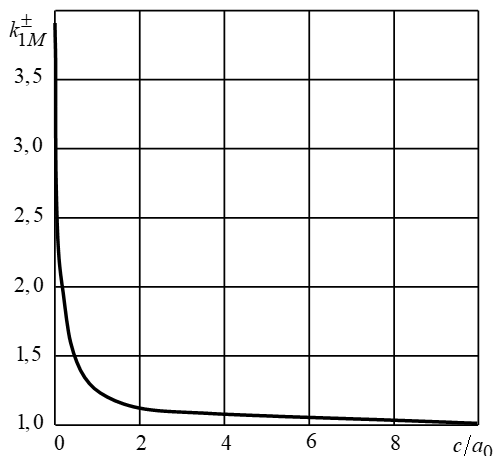


Рис. 3.

трещинами. При сближении трещин друг с другом значения КИМ $k_{1M}^{\pm}$ для концов трещин возрастают. При этом, для такого расположения трещин и действия моментов, значения КИМ для концов трещины, как и в плоской задаче, от фактора анизотропии не зависят. Таким образом, значения КИМ для концов трещины остаются постоянными и не зависят от времени. Если расстояние между трещинами больше двух их длин, то влияние одной трещины на напряженное состояние около другой незначительно, и им можно пренебречь.

Выводы. В данной статье метод малого параметра для решения задач вязкоупругости распространен на задачи об изгибе плиты с периодическим рядом эллиптических отверстий или трещин. Проведены численные исследования напряженно-деформированного состояния, на базе которых установлены закономерности влияния геометрических характеристик плиты, физико-механических параметров материала, а также времени приложения нагрузки на значения основных характеристик изгиба. Проведены численные исследования изменения со временем внутренних моментов для случая плиты с периодическим рядом свободных от загрузжений одинаковых эллиптических отверстий при действии изгибающих моментов на бесконечности для различных значений расстояния между контурами.

Исследования проводились по теме государственного задания в ФГБОУ ВО «ДонГУ» (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Калоеров С.А. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 88–98.
2. Калоеров С.А. Вязкоупругий изгиб многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров, Ю.С. Шипоша // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2007. – Вып. 2. – С. 58–65.
3. Калоеров С.А. Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Теорет. и прикладная механика. – 2011. – № 2 (48). – С. 51–70.
4. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.
5. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
6. Калоеров С.А. Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 141–151.
7. Калоеров С.А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Концентрация напряжений. – К.: «А. С. К.», 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулдер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. Мирончук А.И. Исследование напряженного состояния вязкоупругой плиты с периодическим рядом эллиптических отверстий / А.И. Мирончук // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XVIII Всероссийской школы, (пос. Дивноморское, 27 – 31 мая 2024 г.). – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2024. – С. 70.

A.I. Mironchuk

Solution of the periodic problem of linear viscoelasticity for thin plates with elliptical holes or cracks.

A method is proposed for solving problems of linear viscoelasticity for thin plates with a periodic row of elliptical holes under the action of bending moments and transverse forces. Using the small parameter method, the original problem is reduced to a sequence of boundary value problems solved using complex potentials of the theory of bending of multiply connected anisotropic plates. General representations of complex potentials of approximations and boundary conditions for their determination are obtained. By replacing the degrees of the small parameter with Rabotnov operators, a mechanism for determining the stress state of the plate at any time using complex potentials of approximations is developed. As an example, a solution to the problem for a plate with a periodic row of elliptical holes is given. The change in bending moments over time up to a steady state is investigated, as well as the influence of the geometric characteristics of the plate on the values of these quantities.

Keywords: *viscoelasticity, periodic problem, multiply connected plate, complex potentials of plate bending theory, small parameter method, generalized least squares method.*

*Статья поступила в редакцию 24.01.2025;
доработана 18.02.2025;
рекомендована к печати 25.02.2025.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 51-74:510.22:519.6: 539.3
doi:10.24412/0136-4545-2025-1-52-61
EDN:GFBQFD



©2025. Д.Д. Полянский¹

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ УЧЕТ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТРУБЧАТОГО ТЕПЛООБМЕННИКА

Разработана нечетко-множественная методика учета погрешностей в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров при получении эндогенных характеристик модели механического расчета размещаемого в деформируемом корпусе трубчатого теплообменника. Представленный подход базируется на интерпретации неконтрастных экзогенных характеристик модели нечетко-множественными величинами в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов и использовании их в качестве аргументов в расчетных выражениях детерминистической версии исследуемой модели, расширяемых на данный тип переменных с применением аппарата нечетко-множественных вычислений. Приведены некоторые результаты численной реализации разработанной методики.

Ключевые слова: трубчатый теплообменник в корпусе, тепловые воздействия, модель термомеханического деформирования, напряжения в трубной решетке, погрешности значений исходных параметров, нечетко-множественный учет неопределенности, арифметика нечетких трапецеидальных интервалов.

Введение и постановка задачи. Проблема теоретического расчетного анализа термических деформационных эффектов для размещаемых в корпусах трубчатых теплообменников представляет значительный прикладной интерес ввиду широкого распространения таких конструкций в самых разнообразных сферах производственной деятельности, в частности в нефтехимической промышленности [1–8], а также в многочисленных инфраструктурных объектах различного назначения. Необходимые для реализации методик механико-математического моделирования данные об их конструктивном исполнении с доста-

¹Полянский Дмитрий Дмитриевич – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

Polyansky Dmitry Dmitrievich – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

точной степенью полноты представлены в работах [1, 4, 7, 8], где также излагаются принятые подходы к механическому расчету трубчатых теплообменников и отмечается высокая степень неопределенности в соответствующих вычислительных алгоритмах, обусловленная значительными по величине разбросами в значениях неконтрастных исходных физико-механических и геометрических параметров. Указанные разбросы связаны с погрешностями экспериментальных данных о физико-механических свойствах используемых конструкционных материалов, вводимыми технологическими допусками, вариативными субъективными экспертными оценками для некоторых базовых характеристик конструкций. Получение оценок для разбросов эндогенных параметров расчетов трубчатых теплообменников на базе применения методов вероятностно-стохастического анализа во многих случаях на практике осложнено недостаточными объемами статистически корректной информации о требующих учета разбросах, необходимостью одновременного учета неконтрастности для большого числа исходных параметров и заведомого выбора вариантов однотипных частотных распределений для исходных и результирующих неконтрастных характеристик модели. В принципиальном плане, в качестве варианта решения проблем учета параметрической неопределенности для моделей термомеханического деформирования, в цикле работ [9–17] предложено и реализовано использование методов теории нечетких множеств [18, 19] с менее строгими требованиями к характеру неопределенной исходной информации. Применяемый в указанных работах подход предполагает переход к нечетко-множественным описаниям неконтрастных исходных параметров в расчетных соотношениях для эндогенных характеристик детерминистических версий рассматриваемых моделей и расширение областей определения функциональных расчетных соотношений этих моделей на аргументы нечетко-множественного типа с применением модифицированного альфа-уровневого варианта эвристического принципа обобщения. В соответствии с представленными соображениями, целью реализуемых в данной работе исследований является разработка и апробация нечетко-множественной методики учета погрешностей в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров при получении эндогенных характеристик модели механического расчета размещаемого в деформируемом корпусе трубчатого теплообменника.

1. Детерминистический вариант соотношений модели механического расчета теплообменника. Согласно описаниям моделей механического расчета размещаемых в деформируемых корпусах трубчатых (кожухо-трубчатых) теплообменников [8], его основными заданиями являются определение прочностных параметров корпуса, в том числе с устанавливаемым на нем компенсатором, трубных решеток и их элементов, развальцовочных соединений.

В расчетных соотношениях для определения температурных напряжений в трубах и корпусе [8] исходными параметрами являются длина труб (корпуса) l ; коэффициенты линейного теплового расширения для материалов труб α_T и корпуса α_K ; модули Юнга для материалов труб E_T и корпуса E_K ; параметры температуры труб t_T , корпуса t_K и начальной температуры изготовления тепло-

обменника t_0 ; площади поперечного сечения всех труб F_T и корпуса F_K ; d_B , d_H – соответственно внутренний и внешний диаметры труб в решетке теплообменника; D_K – внутренний диаметр аппарата; P_T , P_K – соответственно параметры давлений в трубах и конструкции корпуса; n – количество труб в конструкции решетки теплообменника. Записываемые расчетные соотношения для температурных напряжений в трубах σ_T и корпусе σ_K получены для случая $\alpha_T > \alpha_K$, $t_T > t_K$ и имеют вид [8]

$$\sigma_T = \Phi_{\sigma T}(\alpha_T, \alpha_K, E_T, E_K, F_T, F_K, t_T, t_K, t_0) = \quad (1)$$

$$= (\alpha_T(t_T - t_0) - \alpha_K(t_K - t_0))(E_T F_T + E_K F_K)^{-1} E_T E_K F_K, \\ \sigma_K = \Phi_{\sigma K}(\alpha_T, \alpha_K, E_T, E_K, F_T, F_K, t_T, t_K, t_0) = \quad (2) \\ = (\alpha_T(t_T - t_0) - \alpha_K(t_K - t_0))(E_T F_T + E_K F_K)^{-1} E_T E_K F_T.$$

В случае установки на корпус теплообменника компенсатора [8]

$$\sigma_{*T} = \Phi_{*\sigma T}(\alpha_T, \alpha_K, E_T, E_K, F_T, F_K, t_T, t_K, t_0, l, S, N, E_L, D_1, D_2, D_K, \alpha_1) = \quad (3)$$

$$= l F_T^{-1} (\alpha_T(t_T - t_0) - \alpha_K(t_K - t_0)) (l (E_T F_T)^{-1} + l (E_K F_K)^{-1} + m E_L^{-1})^{-1},$$

$$\sigma_{*K} = \Phi_{*\sigma K}(\alpha_T, \alpha_K, E_T, E_K, F_T, F_K, t_T, t_K, t_0, l, S, N, E_L, D_1, D_2, D_K, \alpha_1) = \quad (4)$$

$$= l F_K^{-1} (\alpha_T(t_T - t_0) - \alpha_K(t_K - t_0)) (l (E_T F_T)^{-1} + l (E_K F_K)^{-1} + m E_L^{-1})^{-1},$$

где

$$m = 0.06 N \alpha_1 (\pi S^3)^{-1} (1 - D_K D_2^{-1}) D_1^2, \quad (5)$$

E_L – модуль Юнга материала компенсатора; N – количество одинаковых линз в конструкции компенсатора; D_1 , D_2 , D_K – геометрические параметры компенсатора (D_1 – внутренний диаметр линз, D_2 – внешний диаметр линз); S – толщина стенки линзы компенсатора; α_1 – эмпирический коэффициент со значениями, устанавливаемыми в зависимости от величины параметра $\beta = D_K/D_2$. Для осевого усилия Q , растягивающего трубы и корпус теплообменника с компенсатором, записывается представление [8]

$$Q = \Phi_Q(P_K, P_T, D_K, d_B, d_H, n) = (\pi/4) P_K (D_K^2 - n d_H^2) + (\pi/4) n P_T d_B^2. \quad (6)$$

Для напряжений в развальцовочном соединении [8] используется представление

$$\sigma_C = \Phi_C(\alpha_T, \alpha_K, E_T, E_K, F_T, F_K, t_T, t_K, t_0, n, D_K, d_B, d_H) = \quad (7)$$

$$= ((\pi/4) P_K (D_K^2/n - d_H^2) + (\pi/4) P_T d_B^2 + \\ + ((\alpha_T(t_T - t_0) - \alpha_K(t_K - t_0))(E_T F_T + E_K F_K)^{-1} E_T E_K F_K) ((\pi/4) d_H^2 - d_B^2)) (\pi d_H)^{-1}.$$

Задача представляемого исследования заключается в переходе в расчетных отношениях (1)–(7) к нечетко-множественным аргументам в виде нормальных нечетких трапецеидальных интервалов, описывающих связанную с наличием

разбросов значений неконтрастность всех элементов множества исходных параметров.

2. Нечетко-множественный расчетный алгоритм. Исходным этапом построения нечетко-множественного расчетного алгоритма для получения оценок разбросов параметров (1)–(7) является применение представленных в [18, 19] методических приемов нечетко-интервальной фаззификации имеющихся массивов экспериментальных и экспертных данных о разбросах значений неконтрастных исходных параметров. Поскольку все расчетные соотношения (1)–(7) представлены арифметическим выражениями, то после введения для совокупности неконтрастных исходных параметров модели $\alpha_T, \alpha_K, E_T, E_K, F_T, F_K, t_T, t_K, t_0, D, D_K, d_B, d_H, P_T, P_K, l, S, E_L, D_1, D_2, \alpha_1$ нечетко-интервальных описаний $\tilde{\alpha}_T, \tilde{\alpha}_K, \tilde{E}_T, \tilde{E}_K, \tilde{F}_T, \tilde{F}_K, \tilde{t}_T, \tilde{t}_K, \tilde{t}_0, \tilde{D}, \tilde{D}_K, \tilde{d}_B, \tilde{d}_H, \tilde{P}_T, \tilde{P}_K, \tilde{l}, \tilde{S}, \tilde{E}_L, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{\alpha}_1$ с кортежами реперных значений

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_T &= (\alpha_{T1}, \alpha_{T2}, \alpha_{T3}, \alpha_{T4}), & \tilde{\alpha}_K &= (\alpha_{K1}, \alpha_{K2}, \alpha_{K3}, \alpha_{K4}), \\ \tilde{E}_T &= (E_{T1}, E_{T2}, E_{T3}, E_{T4}), & \tilde{E}_K &= (E_{K1}, E_{K2}, E_{K3}, E_{K4}), \\ \tilde{F}_T &= (F_{T1}, F_{T2}, F_{T3}, F_{T4}), & \tilde{F}_K &= (F_{K1}, F_{K2}, F_{K3}, F_{K4}), \\ \tilde{t}_T &= (t_{T1}, t_{T2}, t_{T3}, t_{T4}), & \tilde{t}_K &= (t_{K1}, t_{K2}, t_{K3}, t_{K4}), \\ \tilde{t}_0 &= (t_{01}, t_{02}, t_{03}, t_{04}), & \tilde{D} &= (D_1, D_2, D_3, D_4), \\ \tilde{D}_K &= (D_{K1}, D_{K2}, D_{K3}, D_{K4}), & \tilde{d}_B &= (d_{B1}, d_{B2}, d_{B3}, d_{B4}), \\ \tilde{d}_H &= (d_{H1}, d_{H2}, d_{H3}, d_{H4}), & \tilde{l} &= (l_1, l_2, l_3, l_4), \\ \tilde{S} &= (S_1, S_2, S_3, S_4), & \tilde{E}_L &= (E_{L1}, E_{L2}, E_{L3}, E_{L4}), \\ \tilde{P}_T &= (P_{T1}, P_{T2}, P_{T3}, P_{T4}), & \tilde{P}_K &= (P_{K1}, P_{K2}, P_{K3}, P_{K4}), \\ \tilde{D}_1 &= (D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}), & \tilde{D}_2 &= (D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}), \\ \tilde{\alpha}_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}),\end{aligned}\tag{8}$$

применение эвристического принципа расширения к рассматриваемым функциональным соотношениям сводится к получению их варианта, котором неконтрастные параметры заменяются нечетко-интервальными, а обычные арифметические операции – операциями арифметики нечетких трапецеидальных интервалов [18, 19]. При этом эндогенные и промежуточные нечетко-множественные расчетные характеристики также будут представлять собой нечетко-интервальные величины

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_T &= (\sigma_{T1}, \sigma_{T2}, \sigma_{T3}, \sigma_{T4}), & \tilde{\sigma}_K &= (\sigma_{K1}, \sigma_{K2}, \sigma_{K3}, \sigma_{K4}), \\ \tilde{\sigma}_{*T} &= (\sigma_{*T1}, \sigma_{*T2}, \sigma_{*T3}, \sigma_{*T4}), & \tilde{\sigma}_{*K} &= (\sigma_{*K1}, \sigma_{*K2}, \sigma_{*K3}, \sigma_{*K4}), \\ \tilde{m} &= (m_1, m_2, m_3, m_4), & \tilde{Q} &= (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), & \tilde{\sigma}_C &= (\sigma_{C1}, \sigma_{C2}, \sigma_{C3}, \sigma_{C4}).\end{aligned}\tag{9}$$

Реализуя описанный переход можно последовательно найти

$$\sigma_{T1} = (\alpha_{T1}(t_{T1} - t_{04}) - \alpha_{K4}(t_{K4} - t_{01}))(E_{T4}F_{T4} + E_{K4}F_{K4})^{-1}E_{T1}E_{K1}F_{K1}, \quad (10)$$

$$\sigma_{T2} = (\alpha_{T2}(t_{T2} - t_{03}) - \alpha_{K3}(t_{K3} - t_{02}))(E_{T3}F_{T3} + E_{K3}F_{K3})^{-1}E_{T2}E_{K2}F_{K2},$$

$$\sigma_{T3} = (\alpha_{T3}(t_{T3} - t_{02}) - \alpha_{K2}(t_{K2} - t_{03}))(E_{T2}F_{T2} + E_{K2}F_{K2})^{-1}E_{T3}E_{K3}F_{K3},$$

$$\sigma_{T4} = (\alpha_{T4}(t_{T4} - t_{01}) - \alpha_{K1}(t_{K1} - t_{04}))(E_{T1}F_{T1} + E_{K1}F_{K1})^{-1}E_{T4}E_{K4}F_{K4};$$

$$\sigma_{K1} = (\alpha_{T1}(t_{T1} - t_{04}) - \alpha_{K4}(t_{K4} - t_{01}))(E_{T4}F_{T4} + E_{K4}F_{K4})^{-1}E_{T1}E_{K1}F_{T1}, \quad (11)$$

$$\sigma_{K2} = (\alpha_{T2}(t_{T2} - t_{03}) - \alpha_{K3}(t_{K3} - t_{02}))(E_{T3}F_{T3} + E_{K3}F_{K3})^{-1}E_{T2}E_{K2}F_{T2},$$

$$\sigma_{K3} = (\alpha_{T3}(t_{T3} - t_{02}) - \alpha_{K2}(t_{K2} - t_{03}))(E_{T2}F_{T2} + E_{K2}F_{K2})^{-1}E_{T3}E_{K3}F_{T3},$$

$$\sigma_{K4} = (\alpha_{T4}(t_{T4} - t_{01}) - \alpha_{K1}(t_{K1} - t_{04}))(E_{T1}F_{T1} + E_{K1}F_{K1})^{-1}E_{T4}E_{K4}F_{T4};$$

$$m_1 = 0.08N\alpha_{11}(\pi S_4^3)^{-1}(1 - D_{K4}D_{21}^{-1})D_{11}^2, \quad (12)$$

$$m_2 = 0.08N\alpha_{12}(\pi S_3^3)^{-1}(1 - D_{K3}D_{22}^{-1})D_{12}^2,$$

$$m_3 = 0.08N\alpha_{13}(\pi S_2^3)^{-1}(1 - D_{K2}D_{23}^{-1})D_{13}^2,$$

$$m_4 = 0.08N\alpha_{14}(\pi S_1^3)^{-1}(1 - D_{K1}D_{24}^{-1})D_{14}^2;$$

$$\sigma_{*T1} = l_1F_{T4}^{-1}(\alpha_{T1}(t_{T1} - t_{04}) - \alpha_{K4}(t_{K4} - t_{01})) \times \quad (13)$$

$$\times (l_4(E_{T1}F_{T1})^{-1} + l_4(E_{K1}F_{K1})^{-1} + m_4F_{L1}^{-1})^{-1},$$

$$\sigma_{*T2} = l_2F_{T3}^{-1}(\alpha_{T2}(t_{T2} - t_{03}) - \alpha_{K3}(t_{K3} - t_{02})) \times$$

$$\times (l_3(E_{T2}F_{T2})^{-1} + l_3(E_{K2}F_{K2})^{-1} + m_3F_{L2}^{-1})^{-1},$$

$$\sigma_{*T3} = l_3F_{T2}^{-1}(\alpha_{T3}(t_{T3} - t_{02}) - \alpha_{K2}(t_{K2} - t_{03})) \times$$

$$\times (l_2(E_{T3}F_{T3})^{-1} + l_2(E_{K3}F_{K3})^{-1} + m_2F_{L3}^{-1})^{-1},$$

$$\sigma_{*T4} = l_4F_{T1}^{-1}(\alpha_{T4}(t_{T4} - t_{01}) - \alpha_{K1}(t_{K1} - t_{04})) \times$$

$$\times (l_1(E_{T4}F_{T4})^{-1} + l_1(E_{K4}F_{K4})^{-1} + m_1F_{L4}^{-1})^{-1};$$

$$\sigma_{*K1} = l_1F_{K4}^{-1}(\alpha_{T1}(t_{T1} - t_{04}) - \alpha_{K4}(t_{K4} - t_{01})) \times \quad (14)$$

$$\times (l_4(E_{T1}F_{T1})^{-1} + l_4(E_{K1}F_{K1})^{-1} + m_4F_{L1}^{-1})^{-1},$$

$$\sigma_{*K2} = l_2F_{K3}^{-1}(\alpha_{T2}(t_{T2} - t_{03}) - \alpha_{K3}(t_{K3} - t_{02})) \times$$

$$\times (l_3(E_{T2}F_{T2})^{-1} + l_3(E_{K2}F_{K2})^{-1} + m_3F_{L2}^{-1})^{-1},$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{*K3} &= l_3 F_{K2}^{-1} (\alpha_{T3} (t_{T3} - t_{02}) - \alpha_{K2} (t_{K2} - t_{03})) \times \\
 &\quad \times (l_2 (E_{T3} F_{T3})^{-1} + l_2 (E_{K3} F_{K3})^{-1} + m_2 F_{L3}^{-1})^{-1}, \\
 \sigma_{*K4} &= l_4 F_{K1}^{-1} (\alpha_{T4} (t_{T4} - t_{01}) - \alpha_{K1} (t_{K1} - t_{04})) \times \\
 &\quad \times (l_1 (E_{T4} F_{T4})^{-1} + l_1 (E_{K4} F_{K4})^{-1} + m_1 F_{L4}^{-1})^{-1}; \\
 Q_1 &= (\pi/4) P_{K1} (D_{K1}^2 - n d_{H4}^2) + (\pi/4) n P_{T1} d_{B1}^2, \\
 Q_2 &= (\pi/4) P_{K2} (D_{K2}^2 - n d_{H3}^2) + (\pi/4) n P_{T2} d_{B2}^2, \\
 Q_3 &= (\pi/4) P_{K3} (D_{K3}^2 - n d_{H2}^2) + (\pi/4) n P_{T3} d_{B3}^2, \\
 Q_4 &= (\pi/4) P_{K4} (D_{K4}^2 - n d_{H1}^2) + (\pi/4) n P_{T4} d_{B4}^2;
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{C1} &= ((\pi/4) P_{K1} (D_{K1}^2 - n d_{H4}^2) + (\pi/4) n P_{T1} d_{B1}^2 + ((\alpha_{T1} (t_{T1} - t_{04}) - \\
 &\quad - \alpha_{K4} (t_{K4} - t_{01})) (E_{T4} F_{T4} + E_{K4} F_{K4})^{-1} E_{T1} E_{K1} F_{K1}) ((\pi/4) (d_{H1}^2 - d_{B4}^2)) (\pi d_{H4})^{-1} \\
 \sigma_{C2} &= ((\pi/4) P_{K2} (D_{K2}^2 - n d_{H3}^2) + (\pi/4) n P_{T2} d_{B2}^2 + ((\alpha_{T2} (t_{T2} - t_{03}) - \\
 &\quad - \alpha_{K3} (t_{K3} - t_{02})) (E_{T3} F_{T3} + E_{K3} F_{K3})^{-1} E_{T2} E_{K2} F_{K2}) ((\pi/4) (d_{H2}^2 - d_{B3}^2)) (\pi d_{H3})^{-1}, \\
 \sigma_{C3} &= ((\pi/4) P_{K3} (D_{K3}^2 - n d_{H2}^2) + (\pi/4) n P_{T3} d_{B3}^2 + ((\alpha_{T3} (t_{T3} - t_{02}) - \\
 &\quad - \alpha_{K2} (t_{K2} - t_{03})) (E_{T2} F_{T2} + E_{K2} F_{K2})^{-1} E_{T3} E_{K3} F_{K3}) ((\pi/4) (d_{H3}^2 - d_{B2}^2)) (\pi d_{H2})^{-1}, \\
 \sigma_{C4} &= ((\pi/4) P_{K4} (D_{K4}^2 - n d_{H1}^2) + (\pi/4) n P_{T4} d_{B4}^2 + ((\alpha_{T4} (t_{T4} - t_{01}) - \\
 &\quad - \alpha_{K1} (t_{K1} - t_{04})) (E_{T1} F_{T1} + E_{K1} F_{K1})^{-1} E_{T4} E_{K4} F_{K4}) ((\pi/4) (d_{H4}^2 - d_{B1}^2)) (\pi d_{H1})^{-1}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Представления (10)–(16) образуют систему нечетко-множественных расчетных соотношений рассматриваемой модели.

3. Пример численной реализации расчетного алгоритма. Пример реализации построенного нечетко-множественного расчетного алгоритма относится к получению оценок влияния эффектов разбросов значений исходных параметров для оценки параметров напряженно-деформированного состояния в конструкции кожухо-трубчатого теплообменника с корпусом из стали-20 и с $n = 37$ трубками из медно-никелевого сплава МНЖМц 30-1-1. Теплообменник характеризуется следующим набором неконтрастных нечетко-интервальных модельных исходных параметров, отвечающих стандартам изготовления данных аппаратов [1–8]:

$$\tilde{l} = (0.98l_*, 0.99l_*, 1.0l_*, 1.01l_*),$$

$$\tilde{\alpha}_T = (15.8\alpha_*, 15.9\alpha_*, 16.0\alpha_*, 16.2\alpha_*),$$

$$\tilde{\alpha}_K = (11.52\alpha_*, 11.57\alpha_*, 11.6\alpha_*, 11.62\alpha_*),$$

$$\tilde{E}_T = (1.42E_*, 1.44E_*, 1.45E_*, 1.47E_*),$$

$$\tilde{E}_K = (2.10E_*, 2.12E_*, 2.13E_*, 2.15E_*),$$

$$\tilde{t}_T = (68t_*, 69.5t_*, 70.0t_*, 71.0t_*), \tilde{t}_K = (28t_*, 29.5t_*, 30.0t_*, 31.0t_*),$$

$$\tilde{t}_0 = (19t_*, 19.5t_*, 20.0t_*, 20.5t_*),$$

$$\tilde{D}_K = (0.2626 l_*, 0.2628 l_*, 0.263 l_*, 0.2633 l_*),$$

$$\tilde{d}_B = (0.0178 l_*, 0.0179 l_*, 0.018 l_*, 0.0181 l_*),$$

$$\tilde{d}_H = (0.0198 l_*, 0.0199 l_*, 0.02 l_*, 0.0205 l_*),$$

$$\tilde{F}_T = (21.85S_*, 21.96S_*, 22.07S_*, 26.91S_*),$$

$$\tilde{F}_K = (29.20S_*, 29.45S_*, 29.62S_*, 29.92S_*),$$

$$\tilde{P}_K = (1,01250 \cdot 10^{-6} E_*, 1.01280 \cdot 10^{-6} E_*, 1.01325 \cdot 10^{-6} E_*, 1.01350 \cdot 10^{-6} E_*),$$

$$\tilde{P}_T = (2,02500 \cdot 10^{-6} E_*, 2.02560 \cdot 10^{-6} E_*, 2.02650 \cdot 10^{-6} E_*, 2.02700 \cdot 10^{-6} E_*),$$

$$l_* = 1 \text{ [м]}, \quad \alpha_* = 10^{-6} \text{ [}^\circ\text{}^{-1}\text{]}, \quad E_* = 10^{11} \text{ [Па]}, \quad S_* = 10^{-4} \text{ [м}^2\text{]}.$$

В результате расчетов с использованием соотношений (10), (11), (15), (16) для рассматриваемого случая получены представления неконтрастных эндогенных характеристик $\tilde{\sigma}_T$, $\tilde{\sigma}_K$, $\tilde{Q}$, $\tilde{\sigma}_C$ в виде отражающих разбросы их значений нечетко-интервальных величин

$$\tilde{\sigma}_T = (0.268 \sigma_*, 0.629 \sigma_*, 0.679 \sigma_*, 1.132 \sigma_*),$$

$$\tilde{\sigma}_K = (0.201 \sigma_*, 0.469 \sigma_*, 0.506 \sigma_*, 1.018 \sigma_*),$$

$$\tilde{Q} = (6.112 Q_*, 6.202 Q_*, 6.246 Q_*, 6.294 Q_*),$$

$$\tilde{\sigma}_C = (0.116 \sigma_{**}, 0.155 \sigma_{**}, 0.168 \sigma_{**}, 0.249 \sigma_{**}),$$

$$\sigma_* = 10^8 \text{ Па}, \quad Q_* = 10^3 \text{ Н}, \quad \sigma_{**} = 10^6 \text{ Па},$$

с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_T}(\sigma_T)$, $\mu_{\tilde{\sigma}_K}(\sigma_K)$, $\mu_{\tilde{Q}}(Q)$, $\mu_{\tilde{\sigma}_C}(\sigma_C)$, изображенными на рисунках 1–4.

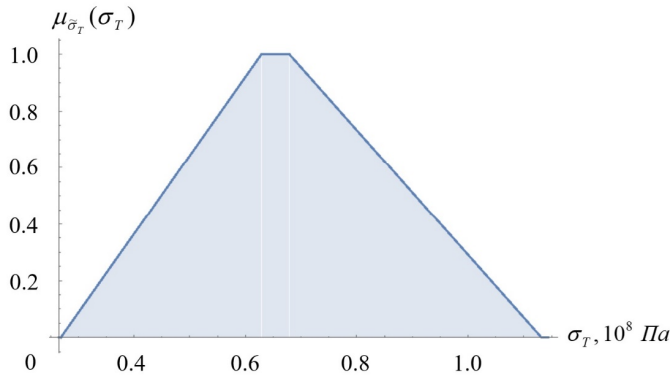


Рис. 1. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_T}(\sigma_T)$ для нечетко-интервальной величины $\tilde{\sigma}_T$

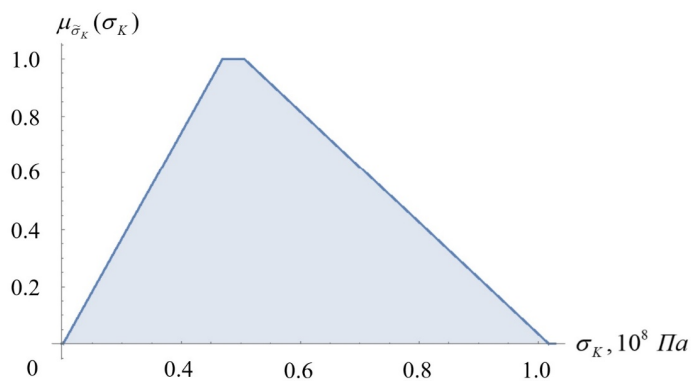


Рис. 2. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_K}(\sigma_K)$ для нечетко-интервальной величины $\tilde{\sigma}_K$

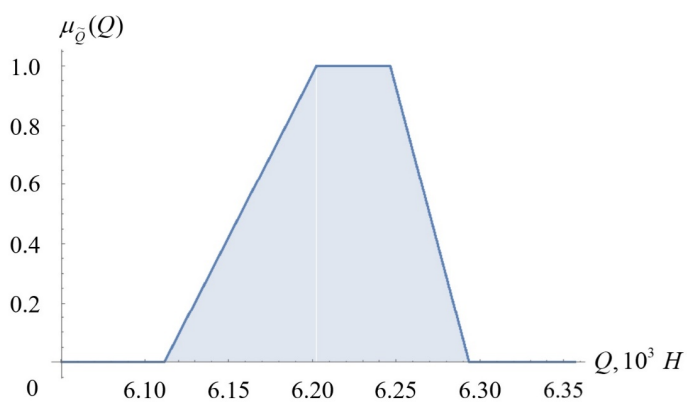


Рис. 3. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{Q}}(Q)$ для нечетко-интервальной величины $\tilde{Q}$

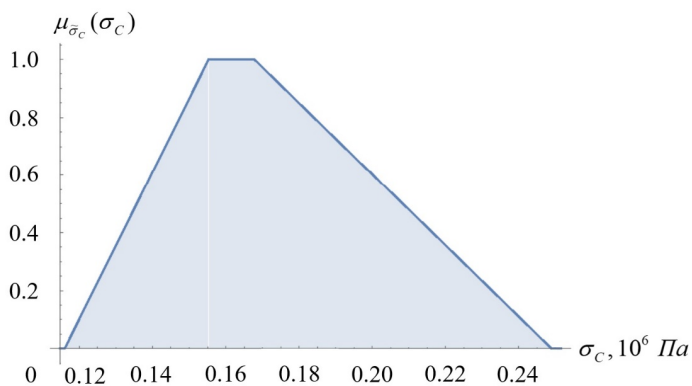


Рис. 4. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_C}(\sigma_C)$ для нечетко-интервальной величины $\tilde{\sigma}_C$

Выводы. В результате проведенных исследований разработана нечетко-множественная методика учета погрешностей в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров при получении эндогенных характеристик модели механического расчета размещаемого в деформируемом корпусе-кожухе трубчатого теплообменника. Учитываемые в расчетах разбросы могут быть обусловлены погрешностями экспериментальных данных о физико-механических свойствах используемых материалов, предусматриваемыми при изготовлении технологическими допусками, вариативными субъективными экспертными оценками для отдельных базовых характеристик конструкций. Методика базируется на интерпретации неконтрастных экзогенных характеристик модели нечетко-множественными величинами в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов и использовании их в качестве аргументов в расчетных выражениях детерминистической версии исследуемой модели, расширяемых на данный тип переменных с применением аппарата нечетко-множественных вычислений.

1. *Поникаров И.И.* Расчеты машин и аппаратов химических производств и нефтегазопереработки. / И.И. Поникаров, С.И. Поникаров, С.В. Рачковский. – М: Альфа-М, 2008. – 720 с.
2. *Лашинский А.А.* Конструирование сварных химических аппаратов. – Л.: Альянс, 2008. – 384 с.
3. *Лашинский А.А.* Основы конструирования и расчета химической аппаратуры: справочник / А.А. Лашинский, А.Р. Толчинский. – М.: Альянс, 2008. – 752 с.
4. *Дытнерский Ю.И.* Основные процессы и аппараты химической технологии: пособие по проектированию. – М.: Альянс, 2007. – 495 с.
5. *Павлов К.Ф.* Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии / К.Ф. Павлов, П.Г. Романков, А.А. Носков. – М.: Альянс, 2007. – 576 с.
6. *Банных О.П.* Основные конструкции и тепловой расчет теплообменников / О.П. Банных. – СПб: СПбНИУ ИТМО, 2012. – 42 с.
7. *Шемпелев А.Г.* Проектирование рекуперативных теплообменных аппаратов / А.Г. Шемпелев, И.В. Шестаков. – Киров: Изд-во ВятГУ, 2010. – 89 с.
8. *Семакина О.К.* Машины и аппараты химических, нефтеперерабатывающих и нефтехимических производств / О.К. Семакина. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2016. – 160 с.
9. *Дремов В.В.* Нечетко-множественные модификации расчетных соотношений для усредненных термомеханических характеристик пакета слоистого углепластика: теоретический алгоритм / В.В. Дремов, Н.И. Захаров, С.В. Сторожев, Д.Д. Полянский // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 3 (80). – С. 77–88. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-3-77-88. – EDN: PPIRKN.
10. *Номбре С.Б.* Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – №4 (81). – С. 63–76. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-4-63-76. – EDN: TOGBNE.
11. *Номбре С.Б.* Нечетко-множественный анализ параметрической неопределенности в расчетных моделях термоупругого деформирования балок / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1 (82). – С. 81–92. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-1-81-92. – EDN: PQQQXY.
12. *Номбре С.Б.* Учет параметрической неопределенности в модели температурных воздействий на внутреннюю поверхность упругого полого шара / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 56–66. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-56-66. – EDN: TVWFZT.

13. Гольцев А.С. Нечетко-множественный учет разброса параметров в модели термомеханических воздействий на поверхности упругого полого шара / А.С. Гольцев, С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3 (84). – С. 102–114. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-3-102-114. – EDN: VJEVZB.
14. Гольцев А.С. Учет параметрической неопределенности при расчете скоростей термоупругих волн / А.С. Гольцев, С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 4 (85). – С. 72–80. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-4-72-80. – EDN: SGWSTG.
15. Номбре С.Б. Нечетко-множественный учет параметрической неопределенности в модели расчета критической температуры потери устойчивости пологой цилиндрической оболочки / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 1 (86). – С. 73–82. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-1-73-82. – EDN: URZFFM.
16. Номбре С.Б. Нечетко-множественный учет фактора параметрической неопределенности в прикладной модели оценки характеристик изгиба биметаллических пластин со свободным краем / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 3 (88). – С. 79–88. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-3-79-88. – EDN: LHFJGQ.
17. Малютина Т.П. Нечетко-множественный анализ эффектов параметрической неопределенности в модели деформирования толстостенного цилиндра из материала с температурозависимыми свойствами / Т.П. Малютина, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 4 (89). – С. 84–94. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-4-84-94. – EDN: VPSYOI.
18. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
19. Нгуен Куок Ши. Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.

D.D. Polyansky

Fuzzy-set accounting for parametric uncertainty in a model of mechanical calculation of a tubular heat exchanger.

A fuzzy-set method for accounting for errors in the values of the initial physical, mechanical and geometric parameters has been developed when obtaining endogenous characteristics of the mechanical calculation model of a tubular heat exchanger placed in a deformable casing. The presented approach is based on the interpretation of non-contrasting exogenous characteristics of the model by fuzzy-set quantities in the form of normal trapezoidal fuzzy intervals, and their use as arguments in the calculation expressions of the deterministic version of the model under study, extended to this type of variables using the apparatus of fuzzy-set calculations. Some results of the computational implementation of the developed method are presented.

Keywords: *tubular heat exchanger in a casing, thermal effects, thermomechanical deformation model, stresses in a tube sheet, errors in the values of the initial parameters, fuzzy-set accounting of uncertainty, arithmetic of fuzzy trapezoidal intervals.*

*Статья поступила в редакцию 09.01.2025;
доработана 05.02.2025;
рекомендована к печати 11.02.2025.*

УДК 514.85:004.94

doi:10.24412/0136-4545-2025-1-62-72

EDN:BKLZOE



©2025. О.И. Ведяйкина¹, В.А. Коновалова², М.В. Старикова³,
П.А. Хазов⁴, А.А. Сатанов⁵

АЭРОДИНАМИКА ВЫСОТНЫХ КОМПЛЕКСОВ С ИНТЕГРИРОВАННЫМИ ВЕТРОГЕНЕРИРУЮЩИМИ УСТАНОВКАМИ

Статья посвящена изучению рациональной геометрической формы башен с целью одновременного увеличения поверхности контакта с воздушными массами для наиболее эффективной работы интегрированных ветрогенерирующих установок и, при этом, снижения общей ветровой нагрузки на конструкции зданий. Исследуются три модели профилей башен, а именно профиля без уменьшения поперечного сечения и профилей с линейным и параболическим характером его уменьшения. Сравнение производится исходя из вопросов надежности, аэродинамики и экономической целесообразности. Статья освещает актуальность исследования, описывает методы геометрической оптимизации форм башен и представляет результаты экспериментов, подтверждающие сделанные выводы.

Ключевые слова: аэродинамическое воздействие, ветровая нагрузка, строительная аэродинамика, ветрогенератор, компьютерное моделирование, энергоэффективные здания.

¹Ведяйкина Ольга Ивановна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. общей физики и теоретической механики ННГАСУ, Нижний Новгород, e-mail: razvnauki@rambler.ru.

Vediaikina Olga Ivanovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Chair of General Physics and Theoretical Mechanics.

²Коновалова Виктория Александровна – студент ННГАСУ, Нижний Новгород, e-mail: K0n0val0vaVika@yandex.ru.

Konovalova Viktoriia Aleksandrovna – student, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod.

³Старикова Марина Валерьевна – студент, ННГАСУ, Нижний Новгород, e-mail: marina.starick0va@yandex.ru.

Starikova Marina Valerievna – student, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod.

⁴Хазов Павел Алексеевич – канд. техн. наук, доцент каф. теории конструкций и технической механики ННГАСУ, Нижний Новгород, e-mail: khazov.nngasu@mail.ru.

Khazov Pavel Alekseevich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Chair of Theory of Structures and Technical Mechanics.

⁵Сатанов Андрей Андреевич – науч. сотр. ИПМ РАН – филиала ИПФ им. А.В. Гапонова-Грехова, Нижний Новгород, e-mail: andrewsatanov@gmail.com.

Satanov Andrey Andreevich – Research Associate, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences – Branch of the A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod.

Введение. Взаимодействие воздушных потоков с твердыми телами – фундаментальная проблема прикладной механики, традиционно изучаемая в контексте баллистики и летательных аппаратов [1–4]. Однако, стремительная урбанизация и рост масштабов городских застроек выводят аэродинамику на передний план и в архитектурно-строительной области [5, 6].

Классически строительная аэродинамика фокусируется на минимизации воздействий ветровых нагрузок на здания, в целях снижения контакта конструкций с воздушными массами, при этом используются методы компьютерного моделирования [7, 8], в том числе нейросетевого [9]. Но, в настоящее время, задачи аэродинамики выходят далеко за рамки простого снижения нагрузок на сооружения. Перед современными проектировщиками возникает комплексная задача по проектированию зданий, эффективно взаимодействующих с ветром, то есть задача использования энергии ветра, например, путем интеграции ветрогенерирующих установок непосредственно в конструкции высотных объектов [10, 11].

Научной новизной представленной работы является достижение двух, в некотором роде альтернативных целей: рационализации формы здания исходя из требований, с одной стороны, снизить сопротивление воздушным потокам и, тем самым, снизить значения общей ветровой нагрузки, а, с другой стороны, увеличить площадь контакта с воздушными потоками так, чтобы захватить как можно большую воздушную массу и направить её в турбину ветрогенератора.

Применение плохообтекаемых, геометрически невыгодных с аэродинамической точки зрения форм может приводить к повышенным ветровым нагрузкам, а, следовательно, к увеличению массы конструкций и излишнему расходу материалов, а также к возникновению нежелательных резонансных эффектов за счет возрастания инерционных сил в системе при динамических нагрузках. В свою очередь, грамотная геометрическая проработка способна приводить к наиболее рациональному контакту объектов с аэродинамическими потоками, а также целесообразному использованию энергии ветра. Это означает, что итоговое распределение скоростей воздуха, давлений и иных параметров напрямую зависит от принятой геометрии системы [12].

Для оценки эффективности проектируемых зданий используются такие критерии, как коэффициент увеличения скорости и показатель суммарной реакции на аэродинамическое воздействие. Первый параметр отражает действенность захвата воздушного потока поверхностью здания и направления его в ветрогенерирующие установки. Высокий коэффициент свидетельствует об эффективном взаимодействии здания с ветром и максимальном использовании его энергии. Второй показатель оценивает величину ветровой нагрузки на конструкцию объекта, его минимизация имеет первостепенное значение для обеспечения безопасной эксплуатации, а также для экономической обоснованности строительства.

1. Материалы и методы. На первом этапе геометрической организации архитектурной формы объекта необходимо определить наиболее выгодный профиль башен. Возникает задача максимально снизить объемы воздуха, взаимо-

действующие с объектом, для уменьшения ветровой нагрузки. При этом важно задействовать большие объемы воздуха с целью увеличения вырабатываемой ветрогенераторами энергии.

В качестве предпосылки к дальнейшему исследованию можно с высокой уверенностью предполагать, что площадь поперечного сечения башен в плане для уменьшения ветровой нагрузки, а также для компенсации резонансных эффектов, должна поступательно уменьшаться с высотой (рис. 1, а). Таким образом, на отметках, где скорости потока имеют наивысшие значения, площадь поверхности уменьшается, что приводит к уменьшению равнодействующей нагрузок и опрокидывающего момента. Можно отметить, что вследствие описанных мероприятий, снижаются массы на больших отметках, и это позволяет снизить инерционные нагрузки в околорезонансных зонах при колебаниях (рис. 1, б). Однако остается открытым вопрос характера изменения размеров поперечного сечения по высоте.

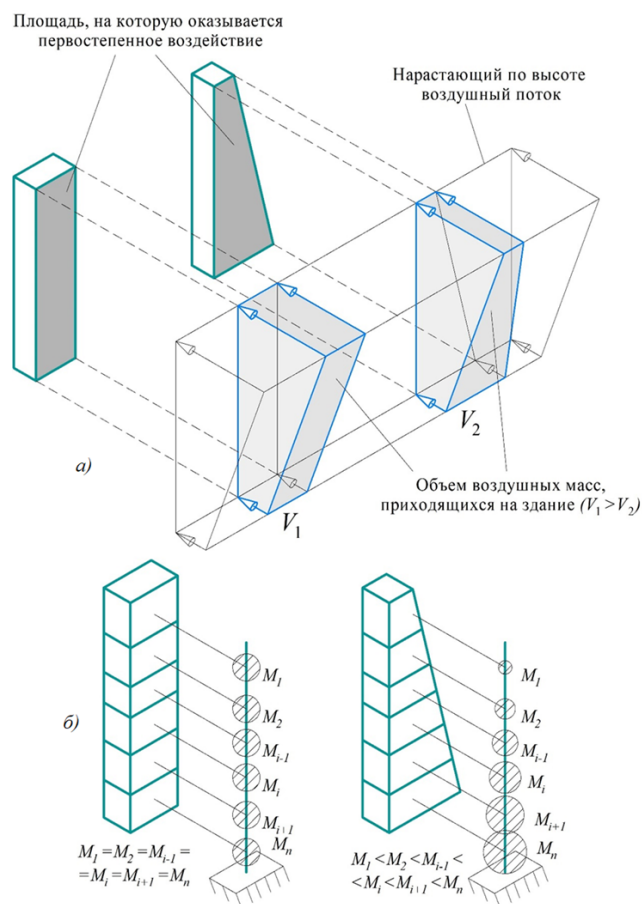


Рис. 1. Уменьшение ветровой нагрузки (а) и улучшение инерционных свойств (б) за счет выбора рациональной вертикальной конфигурации башен

На примерах проектирования высотных объектов можно заметить широкое разнообразие применяемых профилей башен. В рамках текущего исследования остановимся на трех возможных вариантах геометрических профилей башен (рис. 2, а). Сравнение аэродинамических характеристик моделей № 2 и № 3 видится наиболее перспективным с точки зрения определения оптимальной геометрической формы по отношению к профилю башни постоянного сечения. Соответственно, производится выбор линейного или параболического характера уменьшения поперечного сечения этажа по высоте при концептуальном проектировании.

Модель № 1 выступает в качестве контрольной для подтверждения или опровержения оснований проводимого исследования.

Для наибольшего захвата воздушных потоков необходимо выбрать рациональную обтекаемую форму (рис. 2, б), которая не приведет к увеличению ветровых нагрузок, но при этом позволит обеспечить максимальную выработку электроэнергии [11]. На первом этапе принципиальная форма поперечного сечения выбирается около-произвольно и является общим постоянным параметром для всех трех моделей.

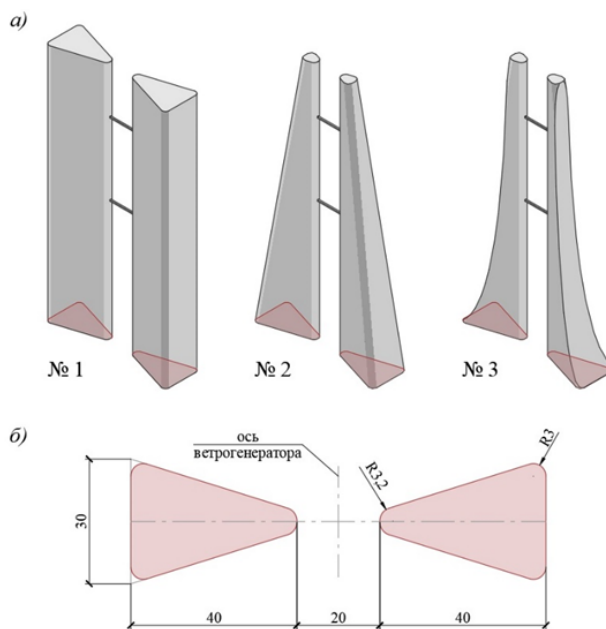


Рис. 2. Изучаемые варианты вертикальной конфигурации башен: трехмерная визуализация моделей (а) и принятая форма поперечного сечения (б)

Стоит отметить, что уменьшение площади поперечного сечения по высоте влияет на эксплуатационные характеристики. При сохранении постоянной высоты башен, подобные модификации его формы приводят к существенному сокращению полезных площадей помещений, что может осложнить применяемые объемно-планировочные решения, обострить вопросы эргономики. Характер из-

менения поперечного сечения по высоте также оказывает на это влияние: потенциальная полезная площадь объекта, проектируемого в соответствии с моделью № 2, обещает быть кратно большей, в сравнении с объектом аналогичной высоты, имеющим профиль модели № 3. Модель № 1 в вопросах простоты и, зачастую, надежности конструктивных и объемно-планировочных решений может оставаться в приоритете. Однако, решающим аргументом в пользу выбора той или иной архитектурной формы остается картина ее аэродинамического обтекания.

Для объектов нестандартной геометрической формы встает вопрос получения аналитического решения проблемы, учитывающего все возможные особенности поверхности, а также явления турбулентности, срыва вихрей и прочего. Ответ сводится к получению решения систем дифференциальных уравнений Навье-Стокса, которое описывает обтекание твердых преград потоками ветра [7, 10]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{V} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}, \quad (1)$$

где ∇ – оператор набла, Δ – векторный оператор Лапласа, t – время, μ – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность, p – давление, $\vec{V}$ – векторное поле скоростей, $\vec{f}$ – векторное поле массовых сил.

На данный момент точного единого решения таких систем, как исследуемая, нет, поэтому необходимо прибегать к численным методам. При этом для получения численного решения было разработано множество программных пакетов, в частности использованный в настоящем исследовании для проведения вычислительных экспериментов программный комплекс ANSYS Workbench [13].

Для моделирования были созданы геометрические схемы как самих зданий, так и окружающего их пространства, определяющего расчетную область и обладающего свойствами газовой среды. Размеры расчетной области принимаются в несколько раз большими габаритов исследуемых объектов с целью выравнивания воздушных потоков после их возмущений при столкновении с объектами [14]. С одной стороны расчетной области задаются параметры, с которыми воздушный поток начинает двигаться, а с противоположной стороны – условие отсутствия избыточного давления, позволяющее обеспечить отсутствие влияния границы расчетной области на результаты эксперимента. Для исследуемых зданий вводится параметр, характеризующий возможность отсутствия проникания воздушного потока сквозь поверхность, и при этом свободного проскальзывания вдоль неё. Одним из важных вопросов является выбор модели турбулентности течения, позволяющей адекватно описать столкновение частиц среды с препятствиями. В данном случае, наиболее подходящей является модель SST, достаточно точно работающая при малых и средних скоростях потока, возникающих в архитектурно-строительной аэродинамике.

Метод конечных элементов в компьютерном эксперименте реализуется за счет разбиения расчетной области и построения сетки конечных объемов. Для достаточно точного выполнения расчета применяется адаптивная сетка, изме-

няющая своё разрешение в зависимости от важности области моделирования, то есть сгущение сетки производится у зданий и в непосредственной близости от них, а на расстояниях, где изменения параметров среды незначительны, сетка укрупняется.

Корректность предлагаемых подходов компьютерного моделирования подтверждается неоднократной верификацией в аэродинамических установках, что отражено в других работах авторов [8, 15].

2. Результаты исследования. Моделирование аэродинамического обтекания моделей производилось для единственного направления (угла) ветровой атаки, перпендикулярного главному фасаду. Для задания характеристик набегающего потока применялись данные для I ветрового района [16]. При этом учитывалось нарастание скорости по высоте, характерное для городской местности. Таким образом, на отметке +100.00 скорость потока составляет 24.83 м/с, на отметке +160.00 – 27.27 м/с (рис. 1, а).

Отметки расположения мостов для ветрогенераторов выбраны таким образом, чтобы городские препятствия не создавали преград для аэродинамических потоков, но, при этом, конструкции еще достаточно влияли на вовлечение воздушных масс в рабочую зону ветрогенератора.

На рисунках 3–5 представлены результаты компьютерного моделирования аэродинамического обтекания вышеописанных моделей.

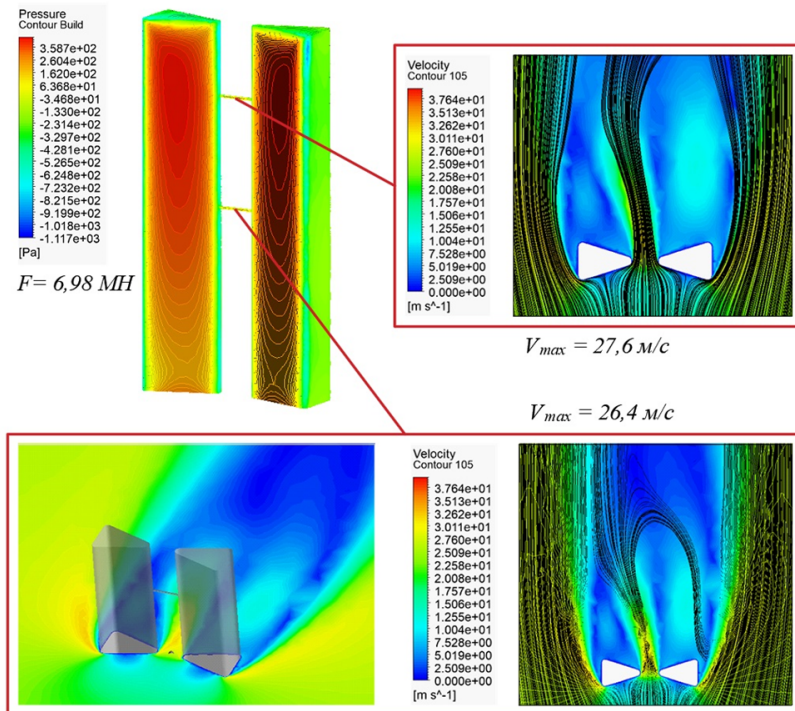


Рис. 3. Распределение давлений и скоростей в уровнях ветрогенераторов для цифровой модели № 1

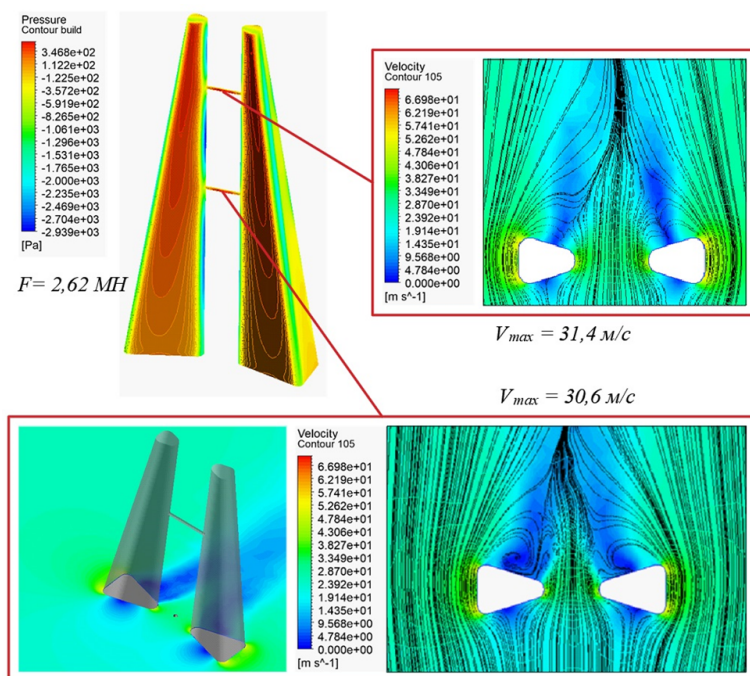


Рис. 4. Распределение давлений и скоростей в уровнях ветрогенераторов для цифровой модели № 2

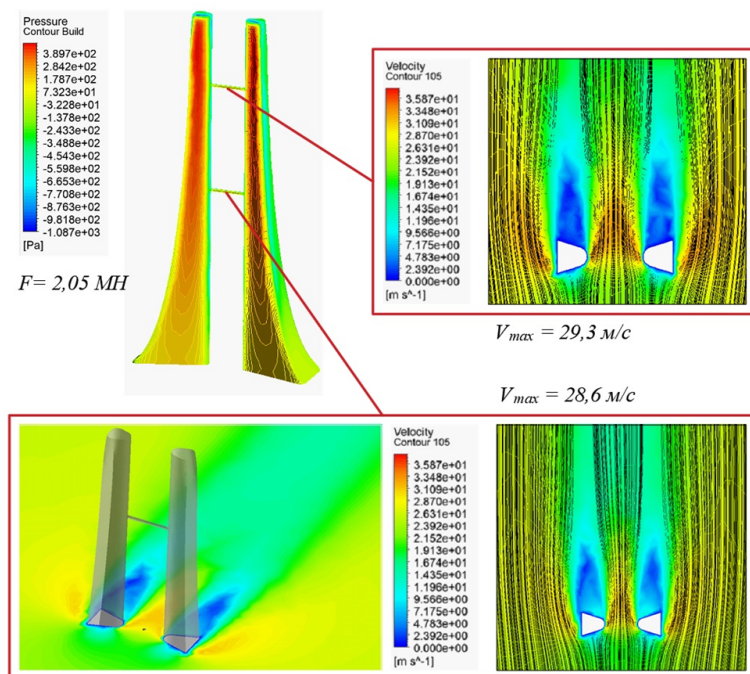


Рис. 5. Распределение давлений и скоростей в уровнях ветрогенераторов для цифровой модели № 3

Контрастность представленных результатов для каждой из цифровых моделей говорит о высокой степени влияния вертикальной конфигурации на аэродинамические параметры. Существуют радикально отличные картины распределения скоростей ветровых потоков. Таким образом, модель № 1 создает обширный турбулентный след с подветренной стороны, чего нельзя сказать о моделях № 2 и № 3. Явления срыва вихрей, наблюдаемые при этом, могут привести к непредсказуемым скачкам амплитуды колебаний конструкций в направлении, поперечном движению воздушных потоков.

Также, не стоит забывать об эффекте буферизации, оказываемом на соседствующие объекты сравнимых габаритов. Таким образом, нахождение объекта по цифровой модели № 1 в составе комплекса высотных строений может негативно сказаться на аэродинамической среде всего района в целом.

Абсолютные значения скоростей потоков на отметках ветрогенераторов для разных цифровых моделей также значительно отличаются. Диаграмма сравнения скоростей для каждой из моделей представлена на рисунке 6, а. Разброс значений достигает 14–16%.

Для нахождения оптимального профиля башен комплекса в качестве критерия рационально использовать коэффициент увеличения скорости ветровых потоков, представляющий собой отношение скорости в окрестности ветрогенератора к скорости невозмущенного потока. Данный коэффициент является достаточно достоверным фактором, отображающим эффективность работы турбины ветрогенератора, а также может быть экстраполирован на объемы вырабатываемой электроэнергии [11]. Диаграмма сравнения коэффициентов увеличения скорости потоков отображена на рисунке 6, б.

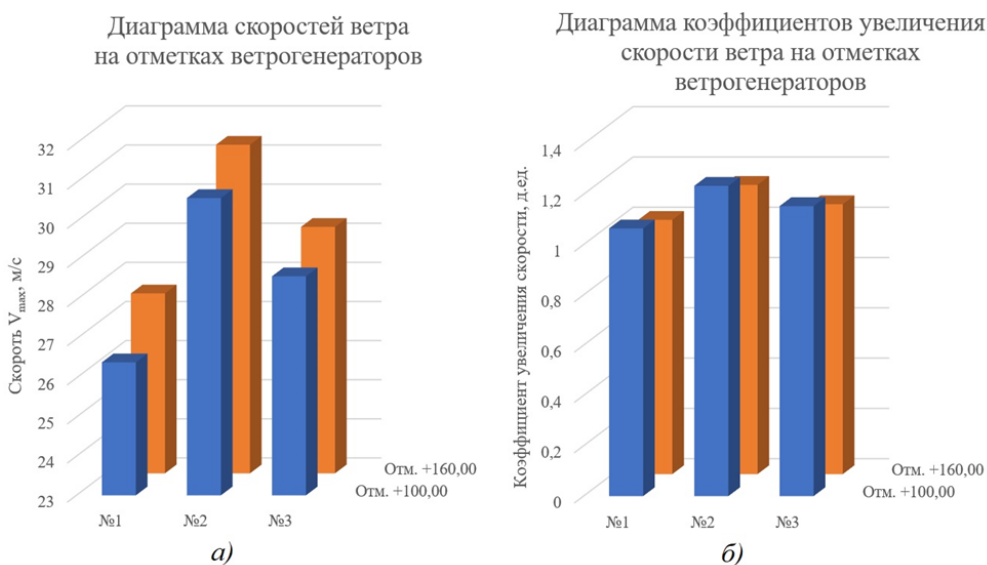


Рис. 6. Диаграммы скоростей (а) и коэффициентов увеличения скорости $k = v_k/v_{вх}$ (б)

Диаграммы, представленные на рисунке 6, выделяют модель № 2 в качестве наиболее оптимальной для интеграции ветровых установок. Модель характеризуется как наибольшими абсолютными значениями скоростей ветровых потоков в точках измерения, так и наивысшими коэффициентами ускорения.

Тем не менее, целесообразно введение критерия экономической эффективности строительства объекта. В случае с аэродинамическим взаимодействием его цель – указать на необходимость проектирования объекта таким образом, чтобы итоговые ветровые нагрузки имели меньшие значения, что, в свою очередь, приведет к упрощению применяемых инженерных решений, уменьшению объема требующихся строительных материалов, и, как следствие, к удешевлению строительных работ. В качестве такого критерия выделено значение равнодействующей ветровой нагрузки, распределенной по поверхности объекта.

Диаграмма реакций каждой из моделей на аэродинамическое воздействие представлена на рисунке 7. Наблюдаемая картина оставляет верным утверждение о слабой приспособленности моделей с неизменным по высоте поперечным сечением к противодействию ветровым воздействиям. Равнодействующая ветровой нагрузки на модель № 1 превосходит аналогичный показатель моделей № 2 и № 3 более чем на 200%.



Рис. 7. Диаграмма суммарных реакций

Модель № 3 характеризуется наименьшим значением аэродинамической реакции, однако потенциальная экономическая выгода может быть нивелирована затратами на реализацию ее сложной архитектурной формы, потерей в энергоэффективности в сравнении с моделью № 2, а также, как обозначалось выше, сложностью принятия объемно-планировочных решений на малых площадях этажа.

Все вышеперечисленное заставляет остановиться на вертикальной конфигурации модели № 2, как на наиболее выгодной в энергетическом и экономическом планах.

Выводы. Проведенное исследование показало, что выбор геометрического профиля башни имеет значительное влияние на эффективность работы ветро-

генераторов в энергоэффективных зданиях. На основе анализа мирового опыта, нормативных документов и компьютерных моделей было установлено, что профиль башни с линейным уменьшением поперечного сечения обладает наибольшей эффективностью как в энергетическом, так и в экономическом аспектах.

Компьютерное моделирование ветровых потоков подтвердило, что модель с таким профилем обладает наибольшими абсолютными значениями скоростей ветровых потоков в точках измерения и наивысшими коэффициентами ускорения, что способствует увеличению производительности ветрогенераторов. Использование этого профиля также более выгодно в экономическом плане, так как оно обладает более простыми формами по сравнению со зданием с параболическим уменьшением поперечного сечения, но при этом значение равнодействующей ветровой нагрузки увеличивается незначительно.

Полученные результаты имеют важное практическое значение для архитекторов и инженеров, занимающихся проектированием энергоэффективных зданий с интегрированными ветрогенераторами. Они предоставляют рекомендации по выбору оптимальных конструктивных решений, которые способствуют повышению энергоэффективности и снижению влияния ветровых нагрузок, а значит затрат на реализацию проектов.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение влияния других факторов, таких как анализ ветровых условий района и определение рациональной ориентации с учетом розы ветров, а также влияние выбора различных форм башен в плане определения выгодного взаимного расположения башен.

1. Герасимов С.И. Спектр сверхзвукового обтекания вокруг летательного аппарата с управляемыми тормозными щитками / С.И. Герасимов, А.А. Глухов, В.А. Кикеев [и др.]. // Научная визуализация. – 2023. – Т. 15, № 5. – С. 136–148. – DOI: 10.26583/sv.15.5.11.
2. Герасимов С.И. Математическое моделирование и экспериментальное исследование бесконтактного измерительного сечения в задаче высокоскоростной аэробаллистики / С.И. Герасимов, В.И. Ерофеев, А.В. Зубанков [и др.]. // Инженерно-физический журнал. – 2021. – Т. 94, № 1. – С. 174–179.
3. Вермель В.Д. Выполнение требований к точности и качеству обводообразующих поверхностей агрегатов аэродинамических моделей летательных аппаратов, изготавливаемых в автоматизированных производственных технологиях / В.Д. Вермель, В.В. Зиняев, А.Н. Казимирова [и др.]. // Автоматизация в промышленности. – 2024. – № 4. – С. 30–36. – DOI: 10.25728/avtprom.2024.04.06.
4. Богатырев В.В. Критерии сравнения аэродинамических профилей применительно к задаче исследования процесса обледенения агрегатов летательных аппаратов / В.В. Богатырев, А.В. Левицкий, П.М. Николаев [и др.]. // Автоматизация в промышленности. – 2023. – № 2. – С. 55–58. – DOI: 10.25728/avtprom.2023.02.11.
5. Симиу Э. Воздействия ветра на здания и сооружения / Э. Симиу, Р. Сканлан // М.: Стройиздат, 1984. – 360 с. – Перевод изд.: WindEffectsonStructures / E. Simiu, R. Scanlan (1978).
6. Савицкий Г.А. Ветровая нагрузка на сооружения / Г.А. Савицкий. – Москва: Изд-во литературы по строительству, 1972. – 111 с.
7. Гувернюк С.В. Численное и физическое моделирование ветрового воздействия на группу высотных зданий / С.В. Гувернюк, О.О. Егорычев, С.А. Исаев [и др.]. // Вестник МГСУ. – 2011. – Т. 1, № 3. – С. 185–191.
8. Сатанов А.А. Экспериментальное исследование распределения аэродинамических коэф-

- фициентов по поверхностям уникального высотного здания. / А.А. Сатанов, А.А. Молева, Е.П. Исаева, Н.Г. Абраамян // Приволжский научный журнал. – 2023. – № 2(66). – С. 61–68.
9. Саиян С.Г. Расчетные аэродинамические исследования комплекса Московского международного делового центра «Москва-Сити» при последовательном возведении зданий / С.Г. Саиян, А.М. Ефимова // Вестник МГСУ. – 2024. – № 19(6). – С. 906–941. – DOI: 10.22227/1997-0935.2024.6.906-941.
 10. Хазов П.А. Оптимизация форм энергоэффективных зданий с ветрогенераторами / П.А. Хазов, М.Л. Поздеев // Приволжский научный журнал. – 2021. – № 4 (60). – С. 55–63.
 11. Хазов П.А. Геометрическая оптимизация аэродинамики высотного здания с интегрированными ветрогенераторами / П.А. Хазов, С.С. Шилов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Строительство и архитектура». – 2024. – № 3. – С. 73–82. – DOI: 10.14529/build240307.
 12. Ким Д.А. Анализ ветрового воздействия на здания различных форм / Д.А. Ким, М.К. Зюева // Инженерный вестник Дона. – 2022. – № 10. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2022/7946>.
 13. Шилов С.С. Численное моделирование и оптимизация ориентации высотного здания по розе ветров / С.С. Шилов, Е.С. Кашкина, П.А. Хазов // Приволжский научный журнал. – 2023. – № 3(67). – С. 42–50.
 14. Темам Р. Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ – 2-е изд. / Р. Темам. – Москва: Мир, 1981. – 408 с.
 15. Лампси Б.Б. Численное и физическое моделирование ветровых потоков на большепролетное покрытие / Б.Б. Лампси, С.С. Шилов, П.А. Хазов // Вестник МГСУ. – 2022. – Т. 17, № 1. – С. 21–31. – DOI: 10.22227/1997-0935.2022.1.21-31.
 16. СП 20.13330.2016 Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. – М.: Стандартинформ, 2016. – 90 с.

O.I. Vediaikina, V.A. Konovalova, M.V. Starikova, P.A. Khazov, A.A. Satanov
Aerodynamics of high-rise complexes with integrated wind generating plants.

The article is devoted to the search for the optimal geometric shape of towers in order to simultaneously increase the contact surface with air masses for the most efficient operation of integrated wind generating plants, while reducing the overall wind load on building structures. Three models of tower profiles are being investigated, namely profiles without reducing the cross-section and profiles with linear and parabolic reduction patterns. The comparison is based on the issues of reliability, aerodynamics and economic feasibility. The article highlights the relevance of the research, describes methods for geometric optimization of tower shapes, and presents experimental results confirming the conclusions reached.

Keywords: aerodynamic force, wind load, construction aerodynamics, wind turbine, computer modeling, energy efficient buildings.

*Статья поступила в редакцию 27.01.2025;
доработана 14.02.2025;
рекомендована к печати 25.02.2025.*

УДК 51-74:510.22:519.6: 539.3
doi:10.24412/0136-4545-2025-1-73-82
EDN:FPJDLX



©2025. Т.П. Малютина¹, С.Б. Номбре², С.В. Сторожев³

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МОДИФИКАЦИИ РАСЧЕТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕТАЛЛОКЕРАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Получены базирующиеся на применении методов теории нечетких множеств обобщенные расчетные соотношения для определения приведенных параметров в функциональных законах описания неоднородности физико-механических свойств создаваемых на базе аддитивных технологий металлокерамических функционально-градиентных материалов с учетом разбросов значений аргументов в детерминистических версиях указанных расчетных формул. Реализация предлагаемого подхода заключается в переходе к разнoвариантным нечетко-множественным описаниям неконтрастных параметров с разбросами и на применении модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения при расширении областей определения используемых функциональных расчетных соотношений на аргументы нечетко-множественного типа.

Ключевые слова: функционально-градиентные металлокерамические материалы, описание физико-механической неоднородности, параметры функциональных законов, учет разбросов свойств ингредиентов, нечетко-множественная методика, эвристический принцип обобщения.

Введение и цели исследования. Теоретическое описание физико-механических свойств инновационных функционально-градиентных нанокomпозитных

¹Малютина Татьяна Петровна – канд. техн. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Makeevka, e-mail: t.p.malutina@donnasa.ru.

Malytina Tatyana Petrovna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

²Номбре Светлана Борисовна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Makeevka, e-mail: s.b.nombre@donnasa.ru.

Nombre Svetlana Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Makeevka, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

материалов является одной из актуальных проблем современных исследований в области механико-математического моделирования. Обзор широкого ряда работ по данной проблематике отражен в обзорных публикациях [1–10]. Ряд ведущих результатов передового уровня в этой области теоретических исследований изложен в работах [1–14] применительно к задаче расчета приведенных параметров для функционально-градиентной металлокерамики.

Вместе с тем, одной из важных задач в совершенствовании методов расчета эффективных физико-механических характеристик функционально-градиентных материалов является учет неконтрастности значений исходных геометрических и физико-механических параметров в предлагаемых расчетных соотношениях, а именно наличие разбросов их величин, связанных с погрешностями экспериментальных данных о свойствах используемых при изготовлении ингредиентов, с технологическими допусками относительно возможных расхождений задаваемых проектных значений, с вариативными субъективными экспертными оценками для величин отдельных расчетных параметров.

Для решения проблемы учета параметрической неопределенности в расчетных функциональных соотношениях для приведенных характеристик непрерывно-неоднородных материалов, ввиду большого числа подлежащих одновременно введению неконтрастных исходных параметров в соответствующих функциональных представлениях, ввиду отсутствия отвечающей требованиям статистической корректности информации о характере экспериментальных и экспертно оцениваемых технологических разбросов значений этих параметров, а также необходимости введения предположений о выборе одного из стандартизированных вариантов идентичных частотных распределений для экзогенных и эндогенных характеристик расчетных моделей при попытках применения для решения данной проблемы вероятностно-стохастических методик, в качестве одного из возможных методических приемов может рассматриваться апробированное применение методов теории нечетких множеств [15–18]. Применение такого подхода в задаче учета параметрической неопределенности при определении эффективных модулей упругости отдельных типов композиционных материалов на базе нескольких вариантов моделей усреднения было реализовано в работах [19, 20].

С учетом представленных соображений, целью данной работы является получение и апробация нечетко-множественных модификаций расчетных соотношений для определения эффективных физико-механических характеристик слоя из нанокompозитного функционально-градиентного металлокерамического материала с учетом факторов разброса значений исходных параметров.

1. Детерминистические варианты моделей расчета физико-механических характеристик металлокерамических функционально-градиентных материалов. В представляемом исследовании используется несколько описываемых в работах [8, 9] и подлежащих обобщению на случай неконтрастных исходных параметров моделей введения функциональных зависимостей для физико-механических характеристик слоя из металлокерамического

функционально-градиентного материала с однонаправленной одноосной непрерывной неоднородностью по толщине. При введении данных зависимостей рассматривается отнесенный к прямоугольным координатам $Ox_1x_2x_3$ деформируемый слой толщины h , занимающий область $\Omega = \{(x_1, x_2) \in R^2, (-h/2) \leq x_3 \leq (h/2)\}$.

В рамках степенной модели описания непрерывной одноосной неоднородности свойств материала слоя [8], изменение каждой из его физико-механических характеристик, в данном случае модуля Юнга E , коэффициента Пуассона ν и модуля сдвига G , описывается зависимостями вида

$$F(x_3) = \Phi_1(x_3, h, F_m, F_c, \mu_F) = (F_c - F_m)V_{\mu_F}(x_3) + F_m, \quad (1)$$

$$V_{\mu_F}(x_3) = (x_3/h + 1/2)^{\mu_F},$$

в которых функция $F(x_3)$ обладает свойствами

$$F(-h/2) = F_m, F(h/2) = F_c, \quad (2)$$

F_m, F_c – соответственно описываемые характеристики свойств металлического и керамического ингредиентов; μ_F – параметр меры изменения для соотношения ингредиентов по толщине слоя. Случаи одинаковых или отличающихся значений μ_F для описываемых физико-механических характеристик отвечают моделям однофакторной либо многофакторной неоднородности.

В экспоненциальной модели однофакторной одноосной неоднородности рассматриваемого металлокерамического слоя по его толщине функциональные зависимости для всех физико-механических характеристик имеют вид [8]

$$F(x_3) = \Phi_2(x_3, h, F_m, F_c) = F_m \exp(h^{-1}(x_3 + h/2) \ln(F_c/F_m)), \quad (3)$$

и также обладают свойствами (2).

В сигмоидальной модели [8] для описания свойств одноосной неоднородности в областях верхнего и нижнего полуслоев вводятся функциональные зависимости

$$V_{\mu_F}^+(x_3) = 1 - (1/2)(1 - 2x_3/h)^{\mu_F} \quad x_3 \in \{0, h/2\}, \quad (4)$$

$$V_{\mu_F}^-(x_3) = (1/2)(1 + 2x_3/h)^{\mu_F} \quad x_3 \in \{-h/2, 0\}, \quad (5)$$

при использовании которых соответственно

$$F(x_3) = \Phi_3(x_3, h, F_m, F_c, \mu_F) = F_c V_{\mu_F}^+(x_3) + F_m(1 - V_{\mu_F}^+(x_3)) \quad x_3 \in \{0, h/2\}, \quad (6)$$

$$F(x_3) = \Phi_4(x_3, h, F_m, F_c, \mu_F) = F_c V_{\mu_F}^-(x_3) + F_m(1 - V_{\mu_F}^-(x_3)) \quad x_3 \in \{-h/2, 0\}. \quad (7)$$

2. Нечетко-множественные обобщения расчетных соотношений. Переход к нечетко-множественным модификациям вышеприведенных расчетных

соотношений для определения эффективных физико-механических характеристик металлокерамических функционально-градиентных материалов с одноосной непрерывной неоднородностью предполагает в качестве исходного этапа введение нечетко-множественных расширений для неконтрастных исходных параметров и реализацию процедуры фазсификации массивов доступных экспериментальных и экспертных данных о разбросах их значений [15–18].

Для исходных F_m , F_c , μ_F , h и результирующих $F(x_3)$ параметров в расчетных соотношениях (1)–(7) вводятся в рассмотрение их нечетко-множественные расширения $\tilde{F}_m$, $\tilde{F}_c$, $\tilde{\mu}_F$, $\tilde{h}$, $\tilde{F}(x_3)$, которые записываются в форме разложений по множествам α – уровней

$$\tilde{F}_m = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{m\alpha}, \overline{F}_{m\alpha}], \quad \tilde{F}_c = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{c\alpha}, \overline{F}_{c\alpha}], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_F &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_{F\alpha}, \overline{\mu}_{F\alpha}], \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha], \\ \tilde{F}(x_3) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_\alpha(x_3), \overline{F}_\alpha(x_3)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Нечетко-множественные обобщения исходных параметров рассматриваемых моделей альтернативно представляются треугольными нормальными нечеткими числами

$$\begin{aligned} \tilde{F}_m &= (F_{m1}, F_{m2}, F_{m3}), \\ \underline{F}_{m\alpha} &= (1 - \alpha)F_{m1} + \alpha F_{m2}, \quad \overline{F}_{m\alpha} = \alpha F_{m2} + (1 - \alpha)F_{m3}; \\ \tilde{F}_c &= (F_{c1}, F_{c2}, F_{c3}), \\ \underline{F}_{c\alpha} &= (1 - \alpha)F_{c1} + \alpha F_{c2}, \quad \overline{F}_{c\alpha} = \alpha F_{c2} + (1 - \alpha)F_{c3}; \\ \tilde{\mu}_F &= (\mu_{F1}, \mu_{F2}, \mu_{F3}), \\ \underline{\mu}_{F\alpha} &= (1 - \alpha)\mu_{F1} + \alpha\mu_{F2}, \quad \overline{\mu}_{F\alpha} = \alpha\mu_{F2} + (1 - \alpha)\mu_{F3}; \\ \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3), \quad \underline{h}_\alpha = (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \overline{h}_\alpha = \alpha h_2 + (1 - \alpha)h_3, \end{aligned} \quad (10)$$

либо несимметричными квазигауссовыми нормальными нечеткими числами, для которых в представлениях (8)

$$\begin{aligned} \underline{F}_{m\alpha} &= m_{*F_m} - \sigma_{*lF_m} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{F}_{m\alpha} = m_{*F_m} + \sigma_{*rF_m} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{F}_{c\alpha} &= m_{*F_c} - \sigma_{*lF_c} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{F}_{c\alpha} = m_{*F_c} + \sigma_{*rF_c} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{\mu}_{F\alpha} &= m_{*\mu_F} - \sigma_{*l\mu_F} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{\mu}_{F\alpha} = m_{*\mu_F} + \sigma_{*r\mu_F} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{h}_\alpha &= m_{*h} - \sigma_{*lh} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{h}_\alpha = m_{*h} + \sigma_{*rh} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Переход к обобщенным нечетко-множественным аргументам в расчетных соотношениях (1)–(7) реализуется с применением модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения, вспомогательным этапом которого является анализ свойств знакопостоянства частных производных по исходным параметрам-аргументам функциональных расчетных соотношений в полных областях их совокупного изменения [18]. На этом промежуточном этапе при допущениях $F_c \geq F_m$, $\mu_F \geq 0$ получены оценки

$$\partial\Phi_1/\partial F_m \geq 0, \quad \partial\Phi_1/\partial F_c \geq 0, \quad \partial\Phi_1/\partial h \geq 0, \quad \partial\Phi_1/\partial \mu_F \leq 0; \quad (12)$$

$$\partial\Phi_2/\partial F_m \geq 0, \quad \partial\Phi_2/\partial F_c \leq 0, \quad \partial\Phi_2/\partial h \leq 0;$$

$$\partial\Phi_3/\partial F_m \geq 0, \quad \partial\Phi_3/\partial F_c \geq 0, \quad \partial\Phi_3/\partial h \leq 0, \quad \partial\Phi_3/\partial \mu_F \geq 0;$$

$$\partial\Phi_4/\partial F_m \geq 0, \quad \partial\Phi_4/\partial F_c \geq 0, \quad \partial\Phi_4/\partial h \geq 0, \quad \partial\Phi_4/\partial \mu_F \leq 0.$$

а при допущениях $F_m \geq F_c$, $\mu_F \geq 0$ – оценки

$$\partial\Phi_1/\partial F_m \geq 0, \quad \partial\Phi_1/\partial F_c \geq 0, \quad \partial\Phi_1/\partial h \geq 0, \quad \partial\Phi_1/\partial \mu_F \geq 0; \quad (13)$$

$$\partial\Phi_2/\partial F_m \geq 0, \quad \partial\Phi_2/\partial F_c \leq 0, \quad \partial\Phi_2/\partial h \leq 0;$$

$$\partial\Phi_3/\partial F_m \geq 0, \quad \partial\Phi_3/\partial F_c \geq 0, \quad \partial\Phi_3/\partial h \geq 0, \quad \partial\Phi_3/\partial \mu_F \leq 0;$$

$$\partial\Phi_4/\partial F_m \geq 0, \quad \partial\Phi_4/\partial F_c \geq 0, \quad \partial\Phi_4/\partial h \leq 0, \quad \partial\Phi_4/\partial \mu_F \geq 0.$$

Соответственно полученным оценкам (12) в представлениях для нечетко-множественных эндогенных параметров $\tilde{F}(x_3)$, имеющих общий вид (9), для модели (1)

$$\underline{F}_\alpha = \Phi_1(x_3, \underline{h}_\alpha, \underline{F}_{m\alpha}, \underline{F}_{c\alpha}, \underline{\mu}_{F\alpha}), \quad \overline{F}_\alpha = \Phi_1(x_3, \overline{h}_\alpha, \overline{F}_{m\alpha}, \overline{F}_{c\alpha}, \underline{\mu}_{F\alpha}); \quad (14)$$

для модели (3)

$$\underline{F}_\alpha = \Phi_2(x_3, \overline{h}_\alpha, \underline{F}_{m\alpha}, \overline{F}_{c\alpha}), \quad \underline{F}_\alpha = \Phi_2(x_3, \underline{h}_\alpha, \overline{F}_{m\alpha}, \underline{F}_{c\alpha}); \quad (15)$$

для модели (6), (7) в верхнем полуслое

$$\underline{F}_\alpha = \Phi_3(x_3, \overline{h}_\alpha, \underline{F}_{m\alpha}, \underline{F}_{c\alpha}, \underline{\mu}_{F\alpha}), \quad \underline{F}_\alpha = \Phi_3(x_3, \underline{h}_\alpha, \overline{F}_{m\alpha}, \overline{F}_{c\alpha}, \underline{\mu}_{F\alpha}); \quad (16)$$

в нижнем полуслое

$$\underline{F}_\alpha = \Phi_4(x_3, \underline{h}_\alpha, \underline{F}_{m\alpha}, \underline{F}_{c\alpha}, \underline{\mu}_{F\alpha}), \quad \underline{F}_\alpha = \Phi_4(x_3, \overline{h}_\alpha, \overline{F}_{m\alpha}, \overline{F}_{c\alpha}, \underline{\mu}_{F\alpha}). \quad (17)$$

При оценках (13) для модели (6), (7) в верхнем полуслое

$$\underline{F}_\alpha = \Phi_3(x_3, \underline{h}_\alpha, \underline{F}_{m\alpha}, \underline{F}_{c\alpha}, \underline{\mu}_{F\alpha}), \quad \underline{F}_\alpha = \Phi_3(x_3, \overline{h}_\alpha, \overline{F}_{m\alpha}, \overline{F}_{c\alpha}, \underline{\mu}_{F\alpha}); \quad (18)$$

в нижнем полуслое

$$\underline{F}_\alpha = \Phi_4(x_3, \overline{h}_\alpha, \underline{F}_{m\alpha}, \underline{F}_{c\alpha}, \underline{\mu}_{F\alpha}), \quad \underline{F}_\alpha = \Phi_4(x_3, \underline{h}_\alpha, \overline{F}_{m\alpha}, \overline{F}_{c\alpha}, \underline{\mu}_{F\alpha}). \quad (19)$$

3. Примеры реализации нечетко-множественных расчетных соотношений. Представляемые случаи применения расчетных соотношений (13)–(16) относятся к следующим вариантам задания в форме треугольных нормальных нечетких чисел значений неконтрастных исходных параметров рассматриваемых моделей определения физико-механических параметров слоя металло-керамики, металлическая фаза которого представлена титаном, а керамическая – оксидом алюминия:

$$\tilde{E}_m = (106E_*, 112E_*, 118E_*), \tilde{\nu}_m = (0.31, 0.32, 0.325),$$

$$\tilde{G}_m = (38.6E_*, 39, 2E_*, 39.9E_*);$$

$$\tilde{E}_A = (364E_*, 370E_*, 375E_*), \tilde{\nu}_c = (0.225, 0.23, 0.238),$$

$$\tilde{G}_c = (122E_*, 126E_*, 129E_*);$$

$$\tilde{h} = (1.8l_*, 2.0l_*, 2.1l_*), \quad \tilde{\mu}_F = (1.7, 2.0, 2.2), \quad E_* = 10^9 \text{Па}, \quad l_* = 10^{-3} \text{м}.$$

На рисунках 1–3 для рассматриваемого случая соответственно приведены рассчитанные с применением соотношений (14) в рамках модели (1) распределения по толщине функционально-градиентного металлокерамического слоя для значений границ носителей $\underline{E}_0(x_3)$, $\overline{E}_0(x_3)$ (линии $\alpha = 0$) и модальной величины $\underline{E}_1(x_3) = \overline{E}_1(x_3)$ (линия $\alpha = 1$) нечетко-множественной характеристики модуля Юнга; для значений границ носителей $\underline{\nu}_0(x_3)$, $\overline{\nu}_0(x_3)$ и модальной величины $\underline{\nu}_1(x_3) = \overline{\nu}_1(x_3)$ нечетко-множественной характеристики коэффициента Пуассона; для значений границ носителей $\underline{G}_0(x_3)$, $\overline{G}_0(x_3)$ и модальной величины $\underline{G}_1(x_3) = \overline{G}_1(x_3)$ нечетко-множественной характеристики модуля сдвига.

Результаты аналогичных расчетов на основе соотношений (15) для модели (3) представлены на рисунках 4–6.

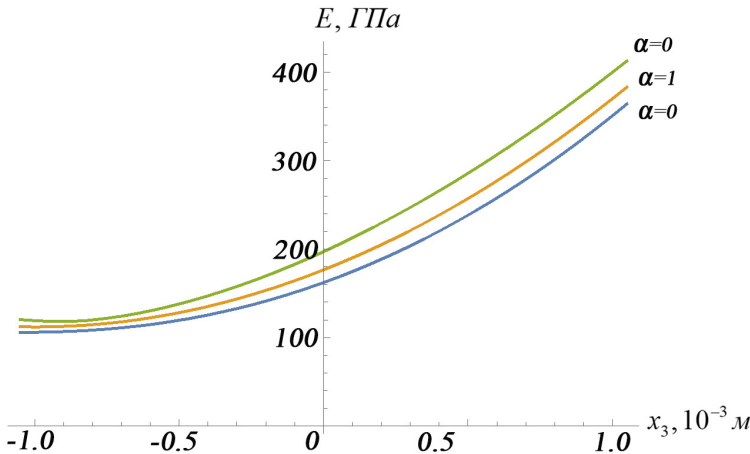


Рис. 1. Распределения значений границ носителей и модального значения по толщине слоя для нечетко-множественной величины модуля Юнга (степенная модель (1))

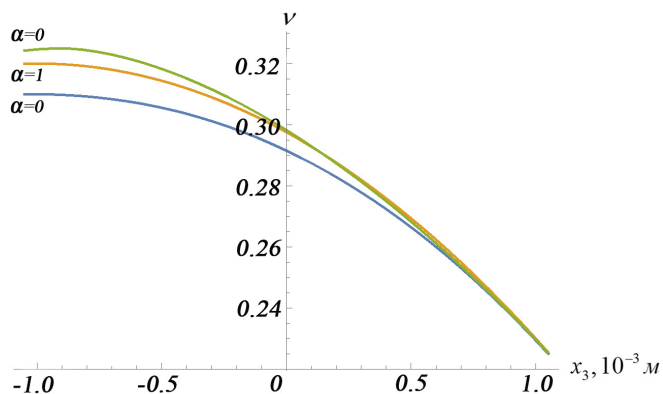


Рис. 2. Распределения значений границ носителей и модального значения по толщине слоя для нечетко-множественной величины коэффициента Пуассона (степенная модель (1))

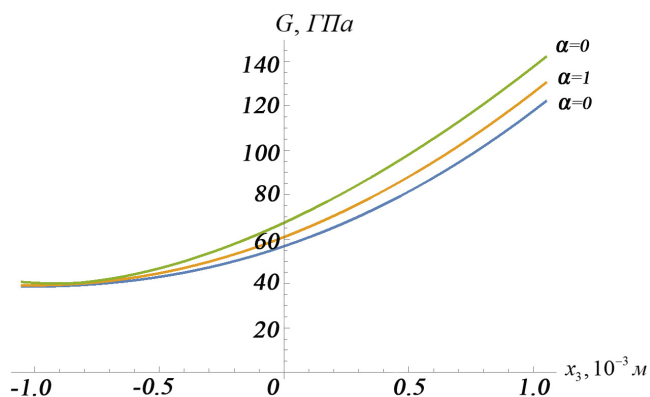


Рис. 3. Распределения значений границ носителей и модального значения по толщине слоя для нечетко-множественной величины модуля сдвига (степенная модель (1))

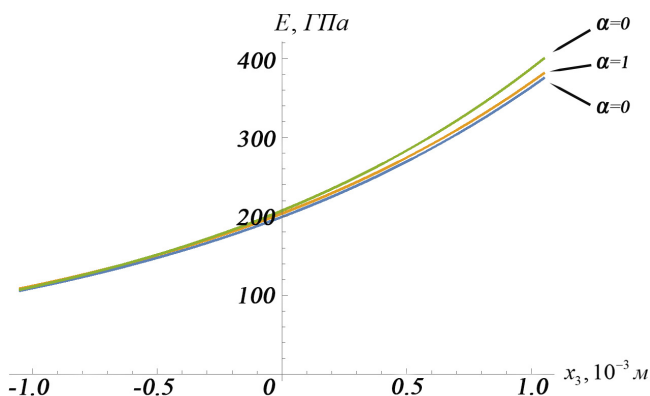


Рис. 4. Распределения значений границ носителей и модального значения по толщине слоя для нечетко-множественной величины модуля Юнга (экспоненциальная модель (3))

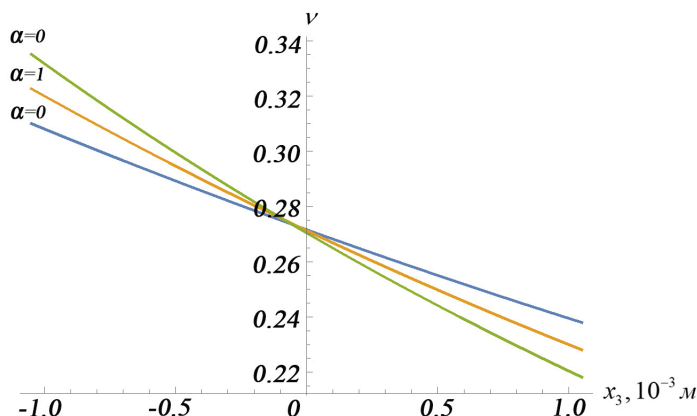


Рис. 5. Распределения значений границ носителей и модального значения по толщине слоя для нечетко-множественной величины коэффициента Пуассона (экспоненциальная модель (3))

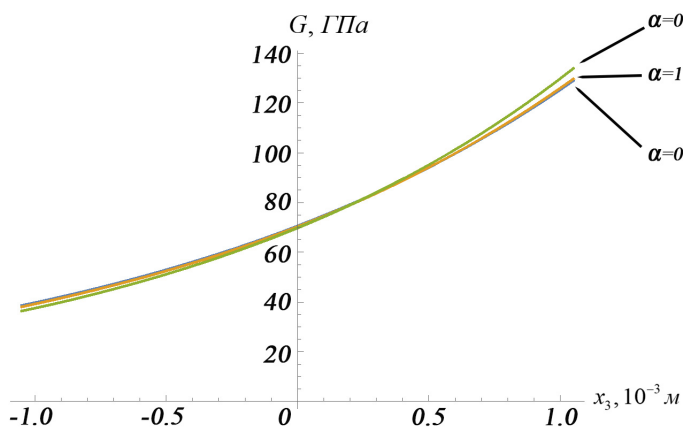


Рис. 6. Распределения значений границ носителей и модального значения по толщине слоя для нечетко-множественной величины модуля сдвига (экспоненциальная модель (3))

Представленные расчетные данные указывают, в частности, на существенно меньший разброс значений эндогенных механических характеристик модуля Юнга и модуля сдвига при идентичных разбросах значений исходных параметров в случае применения экспоненциальной модели описания закономерностей изменения свойств функционально-градиентного металлокерамического слоя по его толщине.

Заключение. В результате представленных исследований получены нечетко-множественные обобщения комплексов расчетных соотношений степенной, экспоненциальной и сигмоидальной моделей определения приведенных параметров в функциональных законах описания неоднородности физико-механических свойств создаваемых на базе аддитивных технологий металлокерамических функционально-градиентных материалов с учетом разбросов значений аргументов в детерминистических версиях указанных расчетных формул. Реализация

развиваемого подхода состоит в переходе к разнотипным нечетко-множественным описаниям для исходных параметров рассматриваемых моделей с разбросами значений и в последующем применении модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения при расширении областей определения используемых функциональных расчетных соотношений на аргументы нечетко-множественного типа. Получены модифицированные варианты расчетных соотношений для случаев описания неконтрастных исходных параметров нормальными треугольными нечеткими числами и несимметричными квазигауссовыми нечеткими числами. Представлены отдельные примеры использования разработанной методики применительно к описанию распределений по толщине параметров модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига функционально-градиентного металлокерамического слоя с фракциями из титана и оксида алюминия.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Birman V.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L.W. Byrd // ASME Applied Mechanics Reviews. – 2007. – Vol. 60. – P. 195–216.
2. *Udupa G.* Functionally graded composite materials: An overview / G. Udupa, Rao S. Shrikantha, R.V. Gangadharan // Procedia Materials Science. – 2014. – Vol. 5. – P. 1291–1299.
3. *Gupta A.* Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures / A. Gupta, M. Talha // Progress in Aerospace Science. – 2015. – Vol. 79. – P. 1–14.
4. *Naebe M.* Functionally Graded Materials: a review 244 of fabrication and properties / M. Naebe, K. Shrivanimoghaddam // Applied Materials Today. – 2016. – Vol. 5. – P. 223–245.
5. *Mahmood R.M.* Functionally graded materials / R.M. Mahmood, E.T. Aktinlabi. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2017. – 118 p.
6. *Bhavar V.* A review of functionally gradient materials (FGM's) and their applications / V. Bhavar, P. Kattire, S. Patil, R.K.P. Singh // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol. 229. – 012021. – DOI: 10.1088/1757-899X/229/1/012021.
7. *Birman V.* Functionally graded materials and structures / V. Birman. – In: Encyclopaedia of Thermal Stresses. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. – 83 p. – DOI: 10.1007/978-94-007-2739-7.
8. *Boggarapu V.* State of the art in functionally graded materials / V. Boggarapu, R. Gujjala, S. Ojha, S. Acharya, P. Venkateswara babu, S. Chowdary, D.K. Gara // Composite Structures. – 2021. – Vol. 262. – 113596. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.113596.
9. *Жаворонок С.И.* Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 1. / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27, № 2. – С. 227–260. – DOI: 10.33113/mkmm.ras.2021.27.02.227_260.06.
10. *Suresh S.* Fundamentals of Functionally Graded Materials / S. Suresh, A. Mortensen. – London: IOM Communications, 1998. – 165 p. – DOI: 10.1016/S1369-7021(98)80023-0.
11. *Koizumi M.* The concept of FGM / M. Koizumi // Ceramics Transactions: Functionally Graded Materials. – 1993. – Vol. 34. – P. 3–10.
12. *Kaysser W.A.* FGM research activities in Europe / W.A. Kaysser, B. Ilsener // MRS Bulletin. – 1995. – Vol. 20. – P. 22–26.
13. *Bharti I.* Novel applications of functionally graded nano, optoelectronic and thermoelastic materials / I. Bharti, N. Gupta, K. Gupta // Int. J. of Materials, Mechanics and Manufacturing. – 2013. – Vol. 1. – No. 3. – P. 221–224.
14. *Liu L.S.* The optimization design on Metal/Ceramic, FGM armor with neutral net and conjugate gradient method / L.S. Liu, Q.J. Zhang, P.C. Zhai // Functionally Graded Materials: VII

- Proceedings of 7th International Symposium on Functionally Graded Materials “FGM2000”, Materials Science Forum. – 2000. – P. 423–435.
15. Дилигенский Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В.Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение - 1, 2004. – 397 с.
 16. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
 17. Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
 18. Нгуен Куок Ши. Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
 19. Болнокин В.Е. Нечеткие оценки эффективных характеристик микронеоднородных материалов для конструкций гидроакустического экранирования / В.Е. Болнокин, Зыюнг Минь Хай, С.В. Сторожев // Системы управления и информационные технологии – 2017. – № 4 (70). – С. 4–8.
 20. Павлыш В.Н. Нечетко-множественное моделирование в задачах определения эффективных модулей упругости волокнистых композиционных материалов / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Труды ИПММ. – 2021. – Вып. 35. – С. 66–76.

T.P. Malutina, S.B. Nombre, S.V. Storozhev

Fuzzy-set modifications of calculation relations for determining effective physical-mechanical characteristics of metal-ceramic functional-gradient materials.

Generalized calculation relationships based on the application of fuzzy set theory methods are obtained for determining the given parameters in the functional laws for describing the heterogeneity of physical and mechanical properties of metal-ceramic functionally graded materials created using additive technologies, taking into account the spread of argument values in the deterministic versions of the specified calculation formulas. The implementation of the proposed approach consists in the transition to multi-variant fuzzy-set descriptions of non-contrasting parameters with spreads and in the application of a modified alpha-level version of the heuristic principle of generalization when expanding the domains of definition of the used functional calculation relationships to arguments of a fuzzy-set type.

Keywords: *functionally graded metal-ceramic materials, description of physical and mechanical heterogeneity, parameters of functional laws, taking into account the spread of ingredient properties, fuzzy-set technique, heuristic principle of generalization.*

*Статья поступила в редакцию 29.01.2025;
доработана 19.02.2025;
рекомендована к печати 25.02.2025.*

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.831, 622.23.02

doi:10.24412/0136-4545-2025-1-83-90

EDN:DGJQXI



©2025. Н.Н. Грищенко¹, Е.А. Бардакова²

ОСОБЕННОСТИ ВЛИЯНИЯ РАЗМЕРОВ ЗОН ВОДОПРОВОДЯЩИХ ТРЕЩИН НА ПРОЦЕСС СДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЗАТОПЛЕНИИ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК

В статье рассмотрено влияние размеров зоны водопрводящих трещин на величину оседаний земной поверхности, при затоплении горных выработок ликвидируемых угольных шахт. Установлено влияние литологического состава массива на размеры зон водопрводящих трещин. Обосновано влияние затопления глубоких горизонтов на активизацию геомеханических процессов на поверхности.

Ключевые слова: Водонасыщение, горная порода, напряжение, деформационные свойства, ликвидация, конечно-элементная модель, зона водопрводящих трещин, активизация сдвижений, затопление выработок.

Введение. Затопление шахтными водами выработанного пространства неизбежно ведет к обводнению горного массива и уменьшению его прочности, о чём свидетельствуют работы [1–4]. В результате изменения физико-механических свойств горных пород происходит активизация геомеханических процессов, провоцирующая оседания земной поверхности, на которой нередко расположены урбанизированные территории.

¹Грищенко Николай Николаевич – доктор техн. наук, зав. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: gringm@gmail.com.

Grishchenkov Nikolai Nikolaevich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

²Бардакова Елена Александровна – мл. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: bardakova-kgr@mail.ru.

Bardakova Elena Aleksandrovna – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

Подавляющее большинство физико-механических характеристик горных пород (кроме плотности) обладают значительной изменчивостью в пределах одной литологической разности. Это обусловлено пространственными изменениями факторов, влияющих на указанные характеристики, среди которых можно выделить закономерно изменяющиеся в пространстве катагенез, глубину и условия залегания пород. Кроме того, на физико-механические характеристики горных пород влияют случайно изменяющиеся по мощности и протяженности слоя породы ее структура и состав цемента [5–11].

Стоит отметить, что распределение горных пород в массиве крайне неравномерно, и содержание различных литологических типов может изменяться в несколько раз от свиты к свите [12–13].

Результаты обследования нескольких тысяч подработанных зданий на территории Донбасса в зонах влияния затопливаемых работ показывают наличие развивающихся повреждений таких зданий. При этом зафиксированы повреждения зданий, находящихся как в зоне влияния горных выработок с глубинами до 500 метров, так и объектов поверхности в зоне влияния более глубоких горных работ.

Для обеспечения безопасности объектов поверхности проекты затопления горных выработок зачастую содержат требования к закладке наблюдательных станций. Анализ существующих наблюдений, выполненных в различных угленосных районах Донбасса, приведен в таблице 1.

Таблица 1. Результаты наблюдений за сдвижением земной поверхности при затоплении горных выработок

Шахта	Год затопления	Глубина затопления на момент наблюдений, м	Отметка затопления, м	Величина максимального оседания, мм
Запореваляная	2003	656	-418,00	55,00
Кочегарка	1997	880	-600,00	69,00
Красный Профинтерн	2002	865	-630,00	119,00
Брянковская	1996	700	-500,00	80,00
Замковская	1995	650	-450,00	85,00
им. Ильича	1996	600	-400,00	80,00
им. И.В. Чеснокова	1998	430	-230,00	40,00
«Центральная-Ирмино»	1995	900	-713,00	60,00

Стоит отметить, что приведенные результаты наблюдений противоречат методике расчета остаточной мощности, описанной в документе [14] и представленной формулой:

$$m_0 = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot m_v, \quad (1)$$

где K_1 – коэффициент, зависящий от степени метаморфизма углей (угли марки А – $K_1 = 1,0$; угли марок ТС, Т, ОС, КС, КЖ, К, Ж – $K_1 = 0,8$; угли марок ГЖС, ГЖ, Г, ДГ, Д – $K_1 = 0,6$); K_2 – коэффициент, зависящий от последующих подработок горной выработки нижележащими пластами ($K_2 = 1,0$, если выработка

не была подработана; $K_2 = 0,8$, если выработка подработана одним пластом; $K_2 = 0,5$, если выработка была подработана 2-мя и более пластами); K_3 – коэффициент, зависящий от наличия пустот и зон разуплотнений (принимается по результатам дополнительных исследований); K_4 – коэффициент зависящий от обводнённости горных пород ($K_4 = 0,5$, если горные выработки затоплены, и $K_4 = 1,0$, если горные выработки не затоплены); K_5 – коэффициент зависящий от глубины горных работ ($K_5 = 1,0$ если $H < 100$ м, $K_5 = 0,5$ при H в пределах 101 - 200 м, $K_5 = 0,3$ при H в пределах 201-300 м, $K_5 = 0,1$ при H в пределах 300-500 м, если $H > 500$ м, $K_5 = 0$); m_b – вынутая мощность пласта, м.

В результате наблюдений зафиксировано оседание земной поверхности, которое вызвано затоплением горных выработок глубоких горизонтов (с глубинами более 500 метров). Анализ существующих методик позволяет сделать вывод, что действующие нормативные документы практически не учитывают влияние литологического состава и параметров техногенной пустотности [15], что в свою очередь существенно снижает точность прогноза.

Определение влияния структуры горного массива на параметры сдвижения земной поверхности при затоплении шахт по натурным наблюдениям затруднено отсутствием последовательных наблюдений за сдвигами земной поверхности от начала затопления до момента прекращения сдвижений, поэтому одним из наиболее эффективных способов прогноза поведения массива, является моделирование. Имитация геомеханических процессов в конечно-элементных моделях при различных параметрах зоны водопроводящих трещин позволит определить горнотехнические условия, при которых наиболее вероятна непрогнозируемая активизация сдвижений земной поверхности, вызванных затоплением горных выработок, что является целью исследования.

1. Методика исследования. При моделировании очистных горных работ достаточно большие разногласия возникают при определении величины и формы зон деформаций над лавой. Так, в исследованиях [16] описано влияние литологических особенностей массива на характер разрушения пород над лавой. Авторы подчеркивают различный характер разрушения горного массива при различных типах основной и непосредственной кровли над лавой. Стоит отметить, что согласно [17], упругие свойства горных пород увеличиваются в соответствии с повышением степени метаморфизма углей (рис. 1).

Анализ описанных в [18] моделей позволяет сделать вывод о достаточно сложном алгоритме прогноза условий образования трещин и, как следствие, невозможности точного определения характеристик трещиноватых зон. На основании исследований [18–21] можно сделать вывод, что зона деформаций над лавой зависит от преобладающей в районе марки угля и может быть рассчитана по формуле

$$H = K_{H_{3BT}} \cdot m_b, \quad (2)$$

где $K_{H_{3BT}}$ – коэффициент, отражающий влияние добываемой марки угля на размеры зоны водопроводящих трещин, безразмерная величина; m_b – выемочная мощность пласта, м.

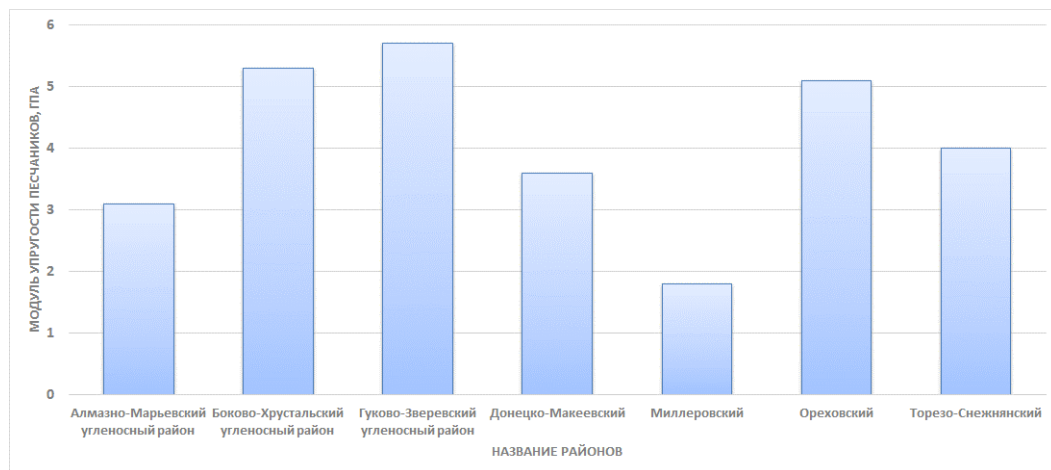


Рис. 1. Модули упругости песчаников на глубине от 400 до 500 метров, свойственные для различных районов Донбасса

На рисунке 2 приведены величины коэффициентов K_{H3BT} для марок угля, свойственных основным районам Донбасса (рис. 2).

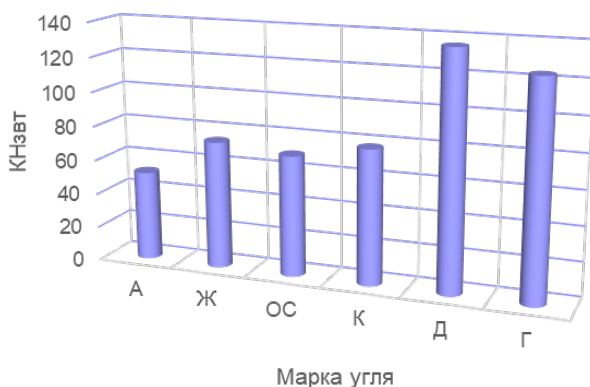


Рис. 2. Показатели коэффициента, отражающего влияние добываемой марки угля на размеры зоны водопроводящих трещин (K_{H3BT}) для марок угля, свойственных основным районам Донбасса

Как видно из рисунка 2 и формулы 2, при угольном пласте мощностью 1 метр зона водопроводящих трещин может распространяться на расстояние от 45 до 136 метров над очистной горной выработкой. Для определения характера влияния величины зоны водопроводящих трещин на параметры процесса сдвига проводились исследования на конечно-элементной модели. Построение геомеханической модели подрабатываемого массива методом конечных элементов производилось в несколько этапов.

На первом этапе производилось построение геометрической модели заданного участка стратиграфии горного массива вместе с очистными выработками.

На втором этапе была сформирована база данных горных пород, из которых состоят слои пород в геометрической модели, построенной на первом этапе. Для каждой породы задаётся набор ряда физико-механических свойств, необходимых для расчёта модели согласно исследованиям [21] (табл. 2).

На третьем этапе производилась привязка элементов геометрической модели к соответствующим элементам базы данных горных пород, т.е. каждому пространственному блоку ставилась в соответствие определённая горная порода со своим набором физико-механических свойств. На этом этапе осуществляется также создание конечно-элементной расчётной сетки, т.е. разбиение пространственных блоков на ряд простых пространственных фигур.

Таблица 2.

Принятые в базовой модели физико-механические характеристики горных пород

Тип породы	Объёмный вес, т/м ³	Е, МПа	Коэффициент Пуассона	Сцепление, МПа	Угол внутреннего трения, град
Песчаник	2,5	26000	0,16	22,5	30
Песчаный сланец	2,48	22000	0,18	16	30
Глинистый сланец	2,35	19100	0,32	12,5	28
Уголь	1,45	1600	0,37	2	34

На четвёртом этапе задаются граничные условия модели (ограничения смещений в определенных направлениях, исходная нагрузка в виде гравитационной силы).

Калибровка модели проводилась на основании действующего нормативного документа «Правила подработки» [22], который регламентирует правила расчета характера оседаний при добыче угля. Моделировалась конечно-элементная модель добычи угля, и по величине оседаний в различных расчетных точках производилось сравнение оседаний, получаемых с использованием конечно-элементных моделей и полученных при расчете по правилам подработки. В результате калибровки максимальные отклонения на краях мульды сдвижения составили порядка 12 процентов, и был достигнут характер формирования мульды сдвижения в модели, полностью соответствующий классическим представлениям (рис. 3).

Когда была достигнута удовлетворительная сходимость в результатах расчета конечно-элементной модели и существующих нормативных документов была отработана схема имитации затопления горного массива посредством изменения физико-механических свойств горных пород над очистной горной выработкой. Для определения характера влияния размеров зон деформаций над лавой на параметры сдвижения при затоплении горных выработок последовательно имитировались процессы затопления в модели для очистной выработки с различными размерами зон водопроводящих трещин. Величина зоны водопроводящих трещин последовательно изменялась от 50 до 200 метров. В пределах указанной зоны, согласно исследованиям [20], изменялись прочностные характеристики залегающих пород: для глинистых сланцев снижались в 3 раза, для песчаных

сланцев – в 2 раза, для песчаников – в 1,2 раза.

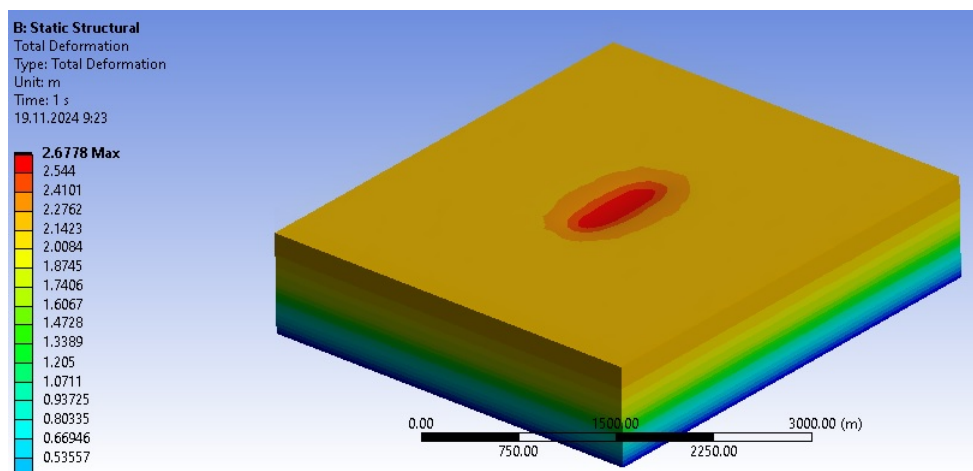


Рис. 3. Модель сдвижения земной поверхности при подработке

2. Анализ результатов. Результаты анализа моделей с имитацией затопления посредством изменения физико-механических свойств массива в пределах зон высокой трещиноватости представлены на рисунке 4.

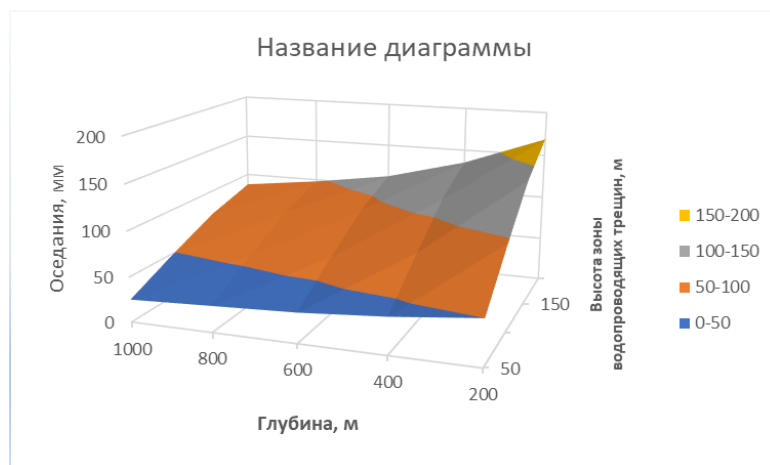


Рис. 4. Влияние глубины горных работ и размеров зоны водопродводящих трещин на величину оседаний

На основании анализа графика можно сделать вывод о наличии существенного влияния глубоких горных выработок на поверхность при условии распространения зон водопродводящих трещин на 150-200 метров над лавой.

Полученные результаты моделирования позволяют сделать вывод, что от строения горного массива зависит характер распространения в нем зон водопродводящих трещин, что напрямую влияет на параметры сдвижения земной

поверхности при затоплении горных выработок.

Выводы. Обосновано условие развития оседаний земной поверхности при затоплении глубоких горных выработок, которым является величина зон водопроводящих трещин, превышающая 100 метров. В результате выполненных работ было установлено, что деформации от затопления глубоких горизонтов следует с наибольшей вероятностью ожидать в районах залегания углей марки Г и Д (газовые и длиннопламенные). На основании литературного обзора и моделирования установлено влияние литологического состава на образование системы трещин в угленосном массиве и, как следствие, на характер оседаний земной поверхности. На моделях зафиксирована закономерность изменения величины сдвижений земной поверхности при активизации геомеханических процессов от размеров зоны водопроводящих трещин.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ FRSR-2023-0002).

1. *Алексеев А.Д.* Разрушение горных пород в объемном поле сжимающих напряжений / А.Д. Алексеев, В.Н. Ревва, Н.А. Рязанцев. – Киев: Наукова думка, 1989. – 166 с.
2. *Питаленко Е.И.* Определение безопасного уровня затопления горных выработок шахт, как критерий при их мокрой консервации / Е.И. Питаленко, А.В. Шиптенко, С.В. Педченко, П.Г. Артеменко // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2009. – № 5. – С. 131–143.
3. *Гавриленко Ю.Н.* Техногенные последствия закрытия угольных шахт Украины: Монография / под ред. Ю.Н. Гавриленко, В.Н. Ермакова. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 631 с.
4. *Шубин А.А.* Исследование процесса активизации сдвижения горных пород и земной поверхности вследствие затопления горных выработок / А.А. Шубин, П.А. Деменков // Проблемы современной науки и образования. – 2016. – № 8. – С. 177–179.
5. *Алексеев А.Д.* Деформационные процессы в горном массиве при закрытии угольных шахт / А.Д. Алексеев, Е.И. Питаленко, В.С. Маевский, В.Н. Ермаков // Физико-технические проблемы горного производства. – Донецк: ДонФТИ. – 1998. – С. 5–9.
6. *Белик И.В.* Расчет оседаний на локальном участке мульды сдвижения и сравнение полученных результатов с данными натурных многолетних инструментальных наблюдений / И.В. Белик // Доклады и тезисы IV научно-технической конференции вузов Украины «Маркшейдерское обеспечение горных работ». – Днепропетровск, 1996. – С. 77–80.
7. *Булат А.Ф.* Управление состоянием предельно-напряженного породного массива мало-энергоемкими воздействиями / А.Ф. Булат, А.Т. Курносов, Ю.А. Русанцов – Киев: Наукова думка, 1993. – 175 с.
8. *Булат А.Ф.* Исследование структурной нарушенности массива горных пород / А.Ф. Булат, Ю.Н. Пилипенко, С.Б. Вакарчук // Горная геофизика. – 1989. – С. 40–41.
9. Вопросы управления горным давлением на тонких крутых пластах Донбасса: Монография / Под ред. Александрова В.Г., Аксенова А.В., Алышева Н.А., Шаповала Н.А., Питаленко Е.И. и др. – Донецк: ООО Лебедь, 1998. – 228 с.
10. *Воскобоев Ф.Н.* Компрессионные свойства закладочного материала / Ф.Н. Воскобоев // Уголь Украины. – 1978. – № 7. – С. 12–13.
11. *Озеров И.Ф.* Расчет ожидаемой высоты уступа при разработке свит крутопадающих пластов в Центральном Донбассе / И.Ф. Озеров, В.И. Черняев // Доклады и тезисы III научно-технической конференции вузов Украины «Маркшейдерское обеспечение горных работ». – Донецк, 1995. – С. 36–41.
12. *Кутепов Ю.И.* Методология инженерно-геологического изучения гидрогеомеханических процессов в техногенно нарушенных массивах при разработке МПИ / Ю.И. Кутепов, Н.А. Кутепова // Горный информационно-аналитический бюллетень: научно-технический

- журнал. – 2014. – № 8. – С. 123–131.
13. Геология месторождений угля и горючих сланцев СССР / И.А. Кузнецов, В.В. Лагутин, М.Л. Левенштейн. – Москва: Гос. НТИ литературы по геологии и охране недр, 1963. – 1213 с.
 14. КД 12-12.004-98. Ликвидация угольных шахт, защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации / УкрНИМИ. – Донецк, 1998. – 46 с.
 15. *Питаленко Е.И.* Опыт геомеханических мониторингов на территории ликвидируемых шахт Донбасса / Е.И. Питаленко, А.В. Шиптенко, М.Д. Рожко // Горный информационно-аналитический бюллетень: научно-технический журнал. – 2007. – № 2. – С. 155–160.
 16. *Лобков Н.И.* Последовательность формирования области сдвижения породных слоев над выработанным пространством лав / Н.И. Лобков, А.Г. Радченко // Проблемы и перспективы комплексного освоения и сохранения земных недр: материалы 6 конференции международной научной школы академика РАН К.Н. Трубецкого. – Москва, 17-21 июня 2024 г. – С. 81–83.
 17. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород // Под ред. Н.В. Мельникова, В.В. Ржевского, М.М. Протодяконова. – Москва, 1975. – 279 с.
 18. *Ревва В.Н.* Критерий развития трещин в твердых телах / В.Н. Ревва, В.В. Васютина, Л.Н. Крижановская // Труды РАНИМИ. – 2023. – № 20–21 (35–36). – С. 112–118.
 19. *Борисенко Э.В.* Прогноз сдвижений земной поверхности на основе исследования деформационных свойств водонасыщенных горных пород / Э.В. Борисенко, Ф.М. Голубев, С.А. Попович // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2024. – № 5. – С. 73–80.
 20. *Гусев В.Н.* Определение параметров зоны водопроводящих трещин через горизонтальные деформации подрабатываемой толщи / В.Н. Гусев, Д.А. Илюхин, А.Г. Алексенко // Записки горного института: сб. науч. трудов. – 2013. – С. 69–73.
 21. *Голубев Ф.М.* Разработка метода прогноза сдвижения горного массива и земной поверхности при затоплении горных выработок закрывающихся угольных шахт / Ф.М. Голубев // Специальность 25.00.20 «Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика»: автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук. Научный руководитель доктор технических наук, профессор Н.Н. Грищенко. – Донецк, 2021. – 21 с.
 22. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Киев, 2004. – 127 с.

N.N. Grishchenkov, E.A. Bardakova

Features of the influence of the size of the zones of water supply cracks on the process of displacement of the Earth's surface during flooding of mine workings.

The article describes an approach to forecasting changes in the rate of flooding of mine workings based on the analysis of field observations, generalization of known patterns and the use of regression and correlation analysis methods. The described dependencies are the basis for the formation of basic patterns of changes in the magnitude of activation of movements of the earth's surface from the parameters of flooding of the mountain range.

Keywords: *water saturation, rock, stress, deformation properties, liquidation, finite element model, zone of water supply cracks, activation of displacements, flooding of workings.*

*Статья поступила в редакцию 10.01.2025;
доработана 04.02.2025;
рекомендована к печати 11.02.2025.*

УДК 622.831.24

doi:10.24412/0136-4545-2025-1-91-97

EDN:DLYVAX

©2025. Н.И. Лобков¹, А.Г. Радченко²

ОСОБЕННОСТИ СДВИЖЕНИЯ СЛОИСТОГО ПОРОДНОГО МАССИВА НАД ВЫРАБОТАННЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

В статье приведены основные закономерности сдвижения слоев породного массива над выработанным пространством и геомеханические основы формирования области интенсивных сдвижений пород кровли.

Ключевые слова: вмещающий массив, породный слой, изгиб слоя, разрушение слоя, разрушающее напряжение, группа слоев

Введение. В настоящее время при расчете величины опорного давления впереди очистного забоя и шага обрушения основной кровли для упрощения аналитических расчетов принимают модель сплошного породного массива от пласта до поверхности. С учетом того, что на практике массив осадочных пород является слоистым, изучение особенностей сдвижения слоистого породного массива над выработанным пространством является актуальной задачей.

Результаты натурных замеров сдвижения слоистого породного массива над выработанным пространством лавы [1] позволили получить общую схему сдвижения подработанного породного массива. На схеме (рис. 1) видно, что породы, залегавшие непосредственно над пластом, обрушаются над выработанным пространством, образуя зону № 1 беспорядочного обрушения. Над ней расположена зона № 2 упорядоченного обрушения и изгиба слоев с потерей несущей способности. Выше этой зоны залегают породные слои, изгибающиеся над выработанным пространством без потери несущей способности и представляющие собой зону № 3.

На основании исследований [1] принята представленная на рисунке 1 область интенсивных сдвижений пород над выработанным пространством одиночной лавы, работающей в массиве угля.

¹Лобков Николай Иванович – доктор техн. наук, зав. отд. управления геомеханическими и технологическими процессами РАНИМИ, Донецк, e-mail: nilobkov@mail.ru.

Lobkov Nikolay Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanical and Technological Processes Management.

²Радченко Александр Григорьевич – вед. инженер отд. управления геомеханическими и технологическими процессами РАНИМИ, Донецк, e-mail: aradov2022@yandex.ru.

Radchenko Aleksandr Grigor'evich – Leading Engineer, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanical and Technological Processes Management.

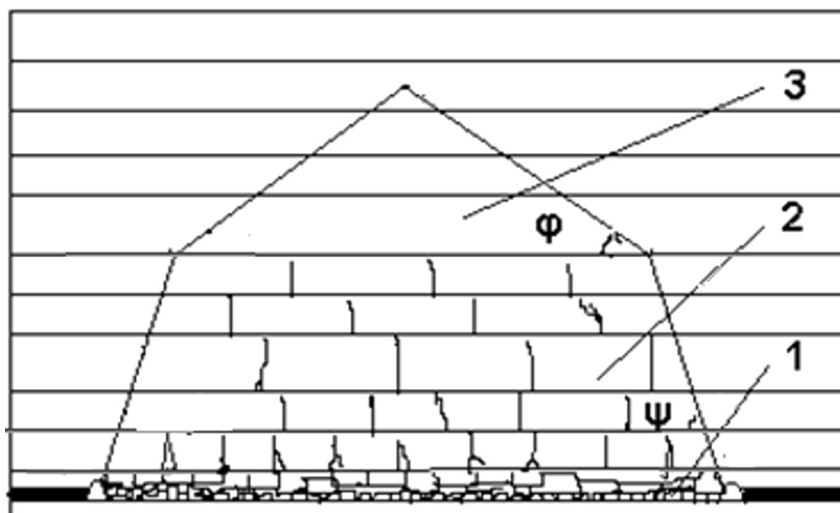


Рис. 1. Область сдвижения пород над выработанным пространством действующей лавы: 1, 2, 3 – соответственно зоны беспорядочного обрушения, упорядоченного обрушения и прогиба слоев без потери несущей способности

Зоны № 1 и № 2 ограничены линиями, проведенными под углом обрушения пород ψ к плоскости залегания пласта, а зона № 3 ограничена линиями, проведенными под углом изгиба пород φ .

Целью данной статьи является исследование особенности сдвижения породных слоев над выработанным пространством одиночной лавы, работающей в массиве угля.

1. Исследование особенности сдвижения породных слоев. Процесс сдвижения включает в себя изгиб, разрушение и обрушение породных слоев над выработанным пространством. Для определения шага обрушения породного слоя необходимо установить его геометрические и прочностные параметры. Строение породного массива определяется по геологоразведочным скважинам. На рисунке 2 приведено строение породного массива над пластом h_8 «Фоминской», полученное по геологоразведочной скважине.

При наличии в кровле пласта мощных и прочных породных слоев породный массив разбивается на группы слоев (рис. 2). Каждая группа состоит из несущего слоя (слой 1) и залегающих выше него менее прочных породных слоев (слои 2, 4). Слой 3 настолько тонок, что не может быть отображен на рисунке в данном масштабе. Слои 2, 4 будут изгибаться, разрушаться и обрушаться ранее несущего слоя, при этом служить ему дополнительной нагрузкой. Разделение породных слоев на группы является одной из особенностей сдвижения слоистого массива, рассматриваемой в трудах А.А. Борисова [2].

Для моделирования первичного обрушения с помощью программы «Ansys» произведем расчет, имитируя изгиб толстой балки на двух опорах. Для определения вторичных обрушений используется модель консольной балки. В резуль-

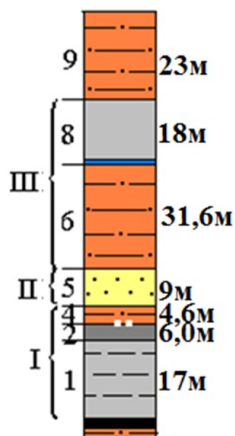


Рис. 2. Строение кровли пласта h_8 с указанием геометрических параметров; I, II, III – группы слоев кровли

тате расчета получим картину распределения горизонтальных растягивающих напряжений в несущем слое. В отличие от модели сплошного массива, применяемой для упрощения расчета изгиба слоя, в слоистом массиве в каждом слое формируются свои растягивающие напряжения (рис. 3). В местах заделки слоя над угольным пластом концентрируются горизонтальные сжимающие напряжения. Над ними, на верхней кромке изгибающегося слоя, концентрируются горизонтальные напряжения. Концентрация горизонтальных растягивающих напряжений происходит и на нижней кромке изгибающегося слоя над центром выработанного пространства. На верхней кромке концентрируются горизонтальные сжимающие напряжения (рис. 3). Очевидно, что при достижении предельного растягивающего напряжения произойдет разрушение породного слоя.

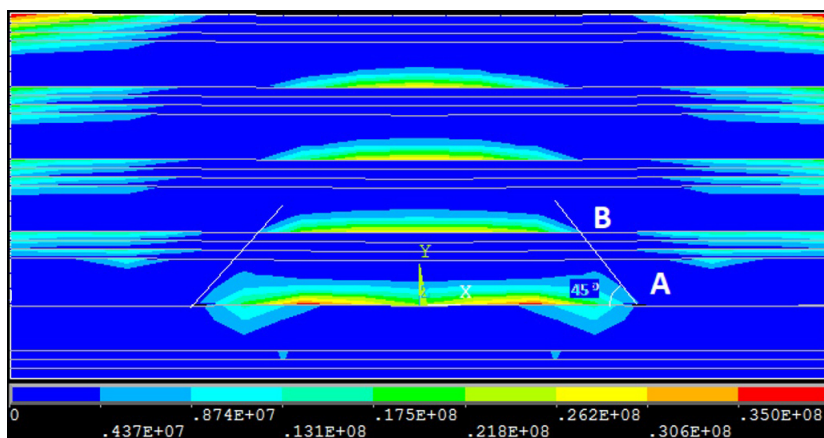


Рис. 3. Распределение горизонтальных напряжений в слоистом изгибающемся породном массиве: A - B – линия изгиба слоя

Процесс разрушения наглядно представлен при моделировании изгиба породных слоев [3] на модели из эквивалентных материалов (рис. 4).

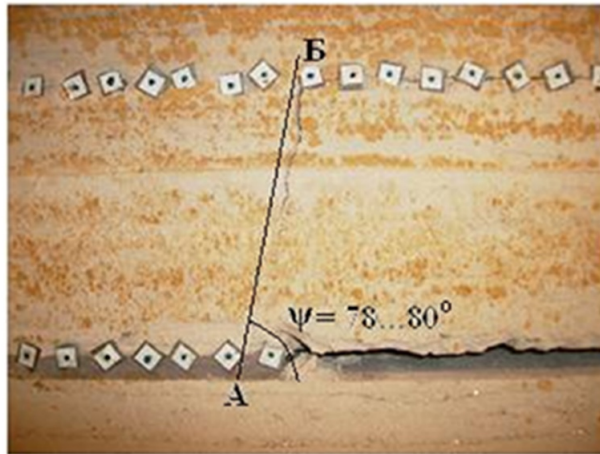


Рис. 4. Формирование разрушающей трещины: АБ – линия разрушения породного слоя; Ψ – угол наклона линии разрушения к плоскости пласта

Разрушение и обрушение слоя в модели произошло при отходе лавы от разрезной печи на максимальное (предельное) расстояние. Разрушающая трещина образовалась на верхней кромке изгибающегося слоя и распространилась по всей его мощности к нижней кромке (рис. 4).

На рисунке 5 приведена область сдвижения пород одиночной лавы над выработанным пространством для условий шахты «Прогресс» государственного предприятия «Торез-Антрацит».

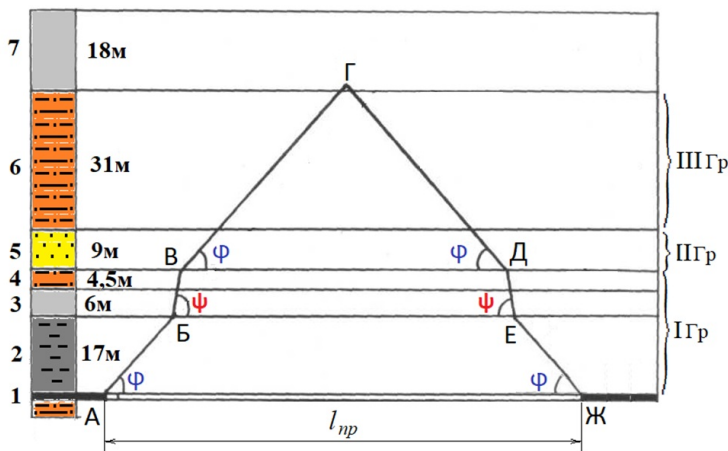


Рис. 5. Область сдвижения пород АБВГДЕЖ при работе одиночной лавы над выработанным пространством: 1-7 – породные слои в кровле пласта; I Gr, II Gr, III Gr – группы породных слоев; φ и ψ – соответственно углы наклона линии изгиба и обрушения к плоскости пласта; l_n – предельный пролет первой группы слоев

При обрушении первой группы слоев вторая группа изогнулась над выработанным пространством (рис. 5). Линия изгиба второй группы слоев ГД наклонена к плоскости залегания пласта под углом $\varphi = 45 \dots 50^\circ$. Угол наклона линии изгиба слоя прослеживается также и на моделях из эквивалентных материалов (рис. 6).

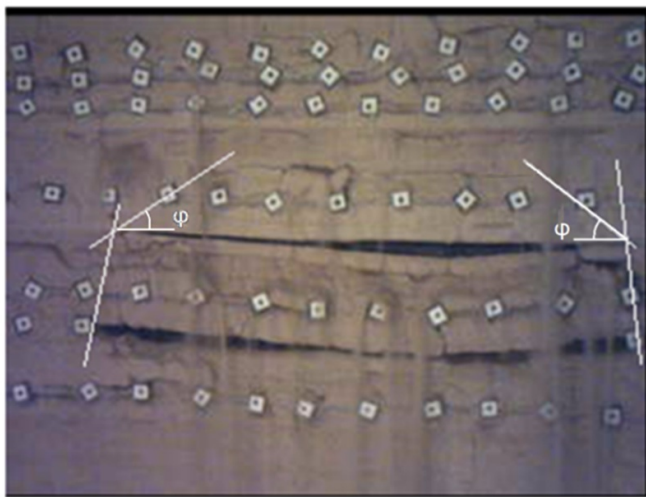


Рис. 6. Угол наклона линии изгиба изгибающегося слоя к плоскости залегания пород

Область интенсивных сдвижений кровли при отходе лавы от разрезной печи на предельное перед обрушением расстояние строится с использованием установленных выше закономерностей деформирования слоистого породного массива. Для построения необходимо рассчитать предельный пролет изгибающейся группы слоев перед обрушением.

Учитывая распределение горизонтальных напряжений в изгибающемся слое можно предположить, что образование разрушающей трещины происходит при отходе лавы на предельное расстояние. Поэтому перед разрушением и обрушением слоя реализуется условие:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{2EG}{\pi \ell_{kp}}} = \sigma_p = \frac{ql_n^2}{2h^2}, \text{ МПа}, \quad (1)$$

где σ_e – предел прочности породы по энергетическому критерию; σ_p – максимальное растягивающее напряжение при предельном пролете породного слоя [4], МПа; q – распределенная нагрузка, МПа; h – мощность слоя, м; E – эффективная поверхностная энергия разрушения, Дж/м²; G – модуль упругости породы, МПа; ℓ_{kp} – критическая длина трещины, м.

Из равенства (1) получается выражение для определения предельного пролета слоя перед обрушением [5].

При первичном обрушении породного слоя:

$$\ell_n^2 = \frac{2h}{\gamma} \sqrt{\frac{2EG}{\pi\ell_{kp}}}, \text{ м}^2, \quad (2)$$

где γ – объемный вес породы, тонн/м³.

При первичном обрушении группы слоев:

$$\ell_n^2 = \frac{2h^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_i h_i} \sqrt{\frac{2EG}{\pi\ell_{kp}}}, \text{ м}^2, \quad (3)$$

где h – мощность слоя, для которого рассчитывается предельный пролет, i – номер слоя в кровле, N – количество слоев пород кровли.

При вторичном обрушении породного слоя:

$$\ell_n^2 = \frac{h}{3\gamma} \sqrt{\frac{2EG}{\pi\ell_{kp}}}, \text{ м}^2. \quad (4)$$

При вторичном обрушении группы слоев:

$$\ell_n^2 = \frac{h}{3 \sum_{i=1}^N \gamma_i h_i} \sqrt{\frac{2EG}{\pi\ell_{kp}}}, \text{ м}^2. \quad (5)$$

В приведенном на рисунке 6 положении слой № 2 зависит над выработанным пространством лавы. Линия изгиба наклонена под углом φ к плоскости пласта. Слои № 3 и № 4 деформируются вместе со слоем № 2 и служат ему пригрузкой. Линия обрушения слоев наклонена к плоскости пласта под углом ψ . Залегающие выше вторая и третья группы слоев изгибаются над выработанным пространством. Угол наклона линии изгиба равен φ . С учетом вышесказанного образовалась область интенсивных сдвижений пород кровли на момент первичной посадки (АБВГДЕЖ). Дальнейшее подвигание лавы приведет к увеличению области интенсивных сдвижений кровли до отхода лавы от разрезной печи на расстояние, равное длине лавы (230 м). С использованием выражений (2)–(5), возможен расчет области полных сдвижений породных слоев от разрабатываемого пласта до поверхности.

Выводы. К особенностям сдвижения слоистого породного массива над выработанным пространством можно отнести следующее. Породный массив слоистых горных пород состоит из групп слоев. Каждая группа состоит из несущего слоя (породы «моста») и залегающих над ним менее прочных породных слоев, служащих ему пригрузкой при изгибе над выработанным пространством. Деформирование породного слоя проходит в три стадии: изгиб слоя в пределах упругости над выработанным пространством; квазихрупкое разрушение слоя;

обрушение слоя. Изгиб породного слоя происходит по линии, наклоненной к плоскости пласта под углом $\varphi = 45 \dots 50^\circ$. Разрушение породного слоя при изгибе происходит за счет возникновения и развития разрушающей трещины на верхней кромке слоя. При пересечении трещиной слоя по всей мощности происходит его обрушение. Линия обрушения наклонена к плоскости под углом $\varphi = 78 \dots 80^\circ$. С учетом линий изгиба и обрушения групп породных слоев строится область интенсивных сдвижений над выработанным пространством, высота которой не изменяется в процессе отработки выемочного поля лавы.

1. Канлыбаева Ж.М. Закономерности сдвижения горных пород в массиве / Ж.М. Канлыбаева. – М.: Наука, 1968. – 108 с.
2. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов / А.А. Борисов. – М.: Недра, 1980. – 360 с.
3. Лобков Н.И. Формирование разрушающих напряжений в породах кровли вокруг очистных выработок / Н.И. Лобков, Л.А. Крижановская // Труды РАНИМИ. – 2016. – № 1 (16). – С. 138–145.
4. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян. – М.: АСВ, 1995. – 568 с.
5. Лобков Н.И. Особенности формирования опорного давления впереди очистного забоя / Н.И. Лобков, Л.А. Драган, В.С. Маевский, А.А. Лобков // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 1 (70). – С. 67–75.

N.I. Lobkov, A.G. Radchenko

Features of the displacement of a layered rock mass above the developed space.

The article presents the main patterns of displacement of rock layers above the worked-out space and the geomechanical foundations of the formation of an area of intensive displacement of roof rocks.

Keywords: enclosing rock array, rock layer, bending and destruction of rock layer, destructive stress, group of layers.

*Статья поступила в редакцию 14.01.2025;
доработана 06.02.2025;
рекомендована к печати 11.02.2025.*

УДК 539.37

doi:10.24412/0136-4545-2025-1-98-108

EDN:CFGRBG

©2025. А.В. Манько¹, Е.А. Муравьева²

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕЩИНОВАТОГО СКАЛЬНОГО МАССИВА ФИЗИЧЕСКИМ ЭКСПЕРИМЕНТОМ НА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МАТЕРИАЛАХ

В статье рассмотрены вопросы, связанные с получением деформационных характеристик материала, который моделирует трещиноватый скальный массив с ортогональными трещинами. Полученные характеристики используются как эталонные при повторении опыта численным методом для выбора модели математического моделирования трещиноватых скальных массивов методом конечных элементов. Для начала выбирался состав эквивалентного материала для моделирования трещиноватого скального массива с усредненными физико-механическими показателями. Далее выбиралась его влажность, так как это влияет на характер разрушения материала. Основные исследования разделены на три этапа: на первом этапе рассматривались образцы ненарушенной структуры эквивалентного материала; на втором этапе образцы имели одну трещину под разными углами; на третьем этапе рассматривались ортогональные трещины. Третий этап впоследствии моделировался в МКЭ в объемной постановке для верификации возможности оптимизации математических моделей моделирования.

Ключевые слова: эквивалентный материал, деформированное состояние, трещиноватый скальный массив, трехосное сжатие, девиатор напряжения, деформационные свойства, математическое моделирование.

Введение. Математическое моделирование трещиноватых скальных массивов является весьма трудоемким процессом ввиду того, что механика разрушения предполагает отделение от монолитного массива горных пород его частей, что математически является разрывом сплошности.

В конце 70-х годов XX века для этих целей был разработан метод дискретных элементов (Discrete Element Method, DEM). Однако данный метод не получил широкого распространения в исследованиях отечественных ученых при моделировании скальных массивов в связи с тем, что данный метод оперирует в механике деформируемого твердого тела математическими моделями, которые не позволяют в полной мере учитывать математически реологические свойства

¹Манько Артур Владимирович – канд. техн. наук, доцент каф. механики грунтов и геотехники ФГБОУ ВО НИ МГСУ, Москва, e-mail: MankoAV@mgsu.ru.

Manko Artur Vladimirovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Chair of Soil Mechanics and Geotechnics.

²Муравьева Екатерина Александровна – преподаватель каф. механики грунтов и геотехники ФГБОУ ВО НИ МГСУ, Москва, e-mail: MuravievaEA@mgsu.ru.

Muraveva Ekaterina Alexandrovna – Lecturer, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Chair of Soil Mechanics and Geotechnics.

материала [1].

Основным методом моделирования трещиноватых скальных массивов на данный момент является метод конечных элементов (МКЭ), который применяется с середины 60-х годов XX века для моделирования напряженно-деформированного состояния скальных массивов в весьма большом числе задач [2]. Однако при его применении необходима верификация моделей расчетов, так как раскрытие трещины — это фактически разрыв расчетной схемы, нарушение сплошности, а это ведет к остановке в процессе моделирования и расчета [3]. В связи с тем, что классический МКЭ основан на упругой модели Гука, которая не допускает разрыва сплошности, широко используется модификация этой модели, основанная на упругопластической постановке. Самой первой упругопластической моделью, которая использовалась при расчете скального массива, была модель Кулона-Мора [4]. В дальнейшем были разработаны и другие упругопластические модели математического моделирования, но у них остался один недостаток — не было возможности моделировать разрыв сплошности расчетной схемы в виде трещин. Одним из вариантов учета разрыва сплошности стало применение при расчете контактных элементов [5].

В данной статье рассматриваются эксперименты на эквивалентных материалах, которые обладают необходимыми реологическими и деформационными свойствами реальных горных пород через масштабный коэффициент подобия. Этот коэффициент применим при выполнении некоторых условий — соблюдении геометрического, кинематического и динамического подобия. Исследуемый образец должен иметь правильную геометрическую форму, предпочтительно кубическую или цилиндрическую; при этом минимальный размер или диаметр должен составлять 5 см. Все испытания проводятся в соответствии с ГОСТ 12248.3-2020 «Грунты. Определение характеристик прочности и деформируемости методом трехосного сжатия».

Один из основоположников исследований (физических экспериментов) на искусственных материалах Г.Н. Кузнецов дал название новому материалу «эквивалентный» [6]. С начала XX века эквивалентные материалы начали использоваться в физике, с первой трети века они активно применялись в экспериментальных работах и продолжали использоваться вплоть до 1990-х годов. Впоследствии физическое моделирование стало уступать место математическому из-за стремительного прогресса в компьютерных технологиях. Тем не менее, исследования в области физического моделирования по-прежнему актуальны. Эквивалентные материалы обеспечивают уникальный способ изучения сложных физических систем без необходимости непосредственно взаимодействовать с ними. Они позволяют исследователям создавать модели, отражающие важнейшие свойства изучаемых объектов и процессов, что дает возможность проводить разнообразные эксперименты с экономией времени и ресурсов.

Физическое моделирование остается важным этапом проверки технических и научных гипотез. Компьютерные модели, хоть и обладают высокой точностью, иногда уступают в адаптивности и в понимании системы в реальных условиях,

где эквивалентные материалы продолжают быть востребованы. Научные изыскания в области создания новых эквивалентных материалов и их использования продолжают и по сей день, раскрывая новые возможности для глубокого понимания физики и расширения перспектив экспериментального моделирования [7].

В настоящей статье представлено научное исследование, целью которого являлось определение деформационных характеристик различных трещиноватых образцов эквивалентных материалов и сравнение полученных результатов с их плоскими (двумерными) математическими аналогами, которые вводятся при исследовании напряженно-деформированного состояния методами математического моделирования. В качестве предмета исследования был выбран эквивалентный материал, потому что только данный материал может обладать множественными деформационными характеристиками через масштабный коэффициент и моделировать широкий спектр горных пород. Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

- обобщить полученные авторами результаты по подбору рецептуры эквивалентного материала;
- определить деформационные характеристики материала с одиночной трещиной под различными углами падения;
- определить деформационные характеристики материала с ортогональными трещинами;
- по полученным результатам физического моделирования деформационных характеристик определить, при каких углах падения девиатор напряжений является самым большим, и этот эксперимент повторить методами математического моделирования.

1. Выбор рецептуры эквивалентного материала. В соответствии с ГОСТ 25100-2020 «Грунты. Классификация» к скальным грунтам относятся те горные породы, в которых преобладают химико-структурные связи. По классификации проф. М.М. Протоdjяконова [8, 9], в соответствии с вышеназванным ГОСТом, скальные грунты будут иметь коэффициент крепости от $f=4$ до $f=20$ и, следовательно, усредненным коэффициентом будет обладать горная порода с $f=6-7$.

Для лабораторных исследований применялось устройство осевого нагружения «СИ АСИС» ГТ 2.05-1 с камерой для трехосных испытаний ГТ 7.3.41-1 ООО «НПП ГЕОТЭК», максимальная величина бокового обжатия 10 кН, осевая нагрузка 10 кН. При проведении эксперимента образец испытывает трехосное равномерно распределенное давление в 200 кПа, 400 кПа и 800 кПа, которое создается дистиллированной водой. Испытуемый образец цилиндрической формы имеет диаметр 50 мм и длину 100 мм.

Все исследования, описанные в данной статье, проводились на эквивалентных материалах. Для подбора необходимой рецептуры и эквивалентных деформационных и физико-механических характеристик были использованы работы Козиной А.М. и Ко Ден Хо [10, 11]. Была опробована различная рецептура

материала. Первоначальная рецептура была следующей: гипс Г-16 вместе с порошком строительного мела МТД-2 в пропорции 75/25 процентов соответственно, затворен водой 1:4. Это два основных действующих вещества, указанных вышеназванными авторами, а остальные материалы вводят в состав лишь для придания эквивалентному материалу различных свойств или, как в случае с канцелярским клеем, для увеличения времени схватывания вяжущего материала.

В связи с тем, что в природном массиве трещины горных пород имеют различный угол падения к горизонту, было принято решение использовать систему трещиноватости, предложенную С.А. Юфиным и Е.В. Ламониной [12]. Под данную трещиноватость был подобран модифицированный рецепт эквивалентного материала, приведенный в таблице 1. Более подробно этот вопрос был рассмотрен в работе [13]. У модифицированного материала объемный вес составляет от $0,96 \text{ г/см}^3$ до $1,58 \text{ г/см}^3$ в зависимости от степени влажности материала. Полученный образец необходимо выдержать в естественных условиях сушки 28 суток или заменить на сушку в муфельной печи до стабилизации веса [14].

Таблица 1. Модификация рецепта эквивалентного материала.

Наименование материала	Вес материала, гр.	Соотношение, %
Гипс скульптурный Г-16	160	40.34
Мел для побелки МТД-2	16	4.03
Песок кварцевый, речной, мытый, мелкий	27	6.81
Клей канторский, силикатный	1.6	0.4
Вода (вес зависит от влажности материала)	192	48.41

Следующий шаг эксперимента направлен на то, чтобы подобрать влажность (и время сушки) и таким образом получить упругопластическую деформацию. В ходе эксперимента использовались несколько образцов с разным временем сушки. Первый образец (№ I) был произведен и испытан на следующий день после изготовления без предварительной просушки в муфельной печи. Его масса была 311 г, что соответствует плотности в $1,58 \text{ г/см}^3$. Второй образец (№ II) просушен при 108°C в течение четырех часов. Его масса составила 264 г, соответствующая плотности $1,35 \text{ г/см}^3$. Третий образец (№ III) просушен в течение 48 дней, что превышало стандартное время сушки. Его масса была 118 г, что соответствует плотности $0,96 \text{ г/см}^3$. Для образцов по методике [15] были рассчитаны масштабные коэффициенты, которые составили от 1 до 2: кинематическое подобие – 1; геометрическое подобие – 2; динамическое подобие – 1,9. Результаты проведенного опыта представлены на рисунке 1.

При анализе графиков можно сделать следующие выводы:

- опыт № 1 – эквивалентный материал соответствует упругопластическому разрушению;
- опыт № 2 – эквивалентный материал соответствует упругому разрушению;
- опыт № 3 – эквивалентный материал соответствует хрупкому разрушению.

Следовательно, для дальнейших исследований трещиноватых горных пород в упругопластической постановке, необходимо воспользоваться материалом и способом его изготовления, как в опыте № 1.

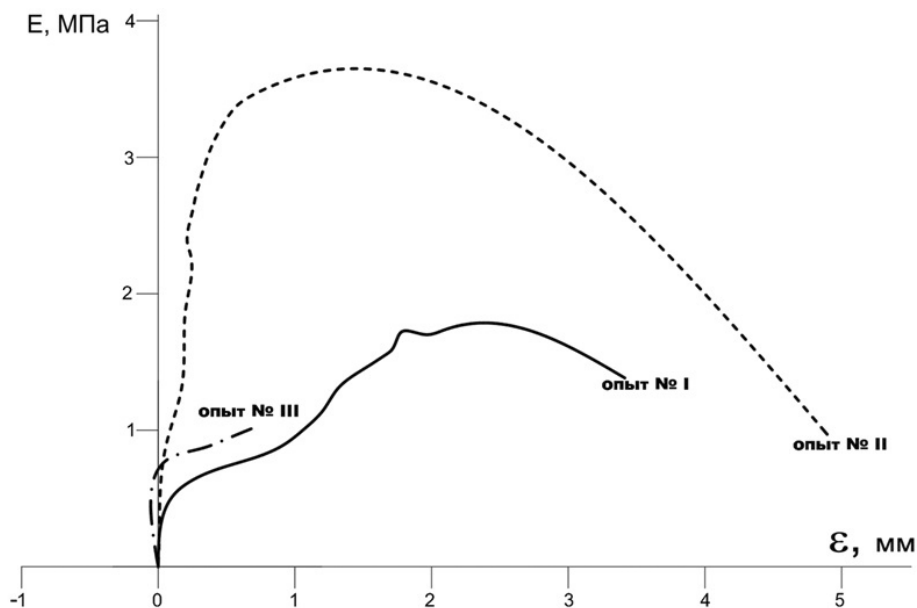


Рис. 1. График разрушения образцов

2. Лабораторные испытания образцов с одиночной и ортогональной системами трещиноватости. За основу одиночной системы трещиноватости была взята одна наклонная трещина, которая располагалась под углами 0, 5, 20, 45, 60 градусов. Все эти углы падения трещины, кроме 60 градусов, для сравнения были взяты из работы Д. Дира [16], а 60 градусов — из работы Р.Е. Гудмана [17].

По матрице планирования эксперимента [18] было подобрано необходимое число основных (первоначальных) физических экспериментов, которое составило от 1 до 3 для каждого угла наклона трещины. Сами трещины пилились уже в готовой заготовке, когда она набрала необходимую прочность. Заполнитель трещины был представлен легкоплавным эквивалентным материалом [19], который эквивалентен по деформационным и физико-механическим характеристикам глинистому материалу. Далее были сделаны усредненные графики экспериментов по каждому углу наклона трещины. Полученные графики для сравнения были сведены в один, показанный на рисунке 2.

Полученные результаты испытаний с одиночной трещиной выявили проблему с горизонтальной трещиной (угол падения 0 градусов). Полученные результаты отличались от остальных одиночных трещин в большую сторону в несколько раз. Поэтому было принято решение не рассматривать трещину 0 градусов в дальнейшем. Так же наличие горизонтальной трещины в классификационной системе RQD у Д. Дира [20] при длине образца менее 10 см является ослабля-

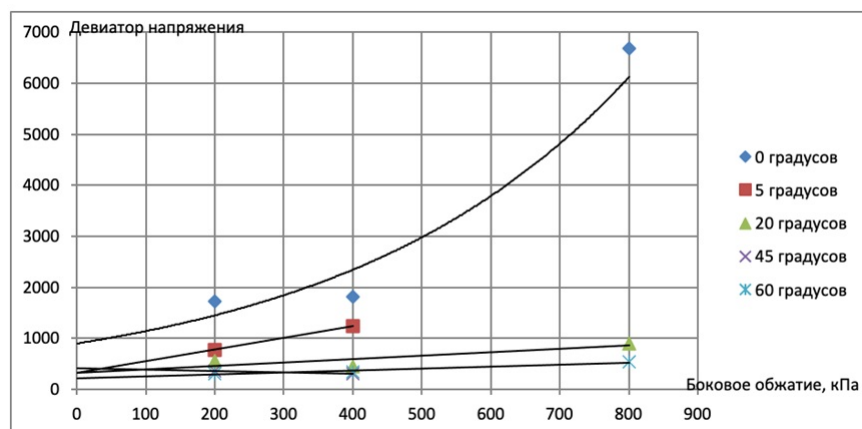


Рис. 2. Результаты испытания одиночной трещины

ющим параметром для расчета крепости породы, вплоть до полного его разрушения.

Остальные эксперименты показали близкие характеристики друг к другу – девиатор напряжения от 200 кПа до 1170 кПа, в среднем 600 кПа. При этом для трещин с углом наклона в 60 и 45 градусов результаты измерений показали близкие значения при любом боковом обжатии, а для трещины в 20 градусов после 200 кПа бокового обжатия, когда значения девиатора были близкими к значениям для других трещин, начали повышаться. Из этого следует, что для решения задач с ортогональными трещинами необходимо обратить первостепенное внимание на трещины с углами наклона 5, 20 и 60 градусов.

Для исследования ортогональных трещин были взяты образцы эквивалентных материалов с рецептурой, описанной выше. Образцы распиливались ортогональными взаимопересекающимися трещинами от геометрического центра образца, и после трещины заполнялись расплавленным пластилином. Это позволило «склеить» части образца. Были изготовлены образцы с углами 5, 20, 45, 60 и 90(0) градусов. Трещины с углом 90 градусов ранее не было. Эту трещину ввели в связи с невозможностью в явном виде провести две ортогональные трещины в 0 градусов и таким образом 90(0) градусов – это трещина вертикальная и перпендикулярно ей горизонтальная.

После проведения 3–5 опытов с каждым из углов наклона ортогональных трещин были выбраны наиболее характерные результаты. Наиболее интересными представляются результаты, отвечающие углам 5, 20, 60 и 90(0) градусов. Результаты испытаний приведены на рисунке 3.

По результатам проведенных испытаний ортогональных взаимопересекающихся трещин можно сделать вывод о том, что результаты для трещин 20 и 60 градусов совпали не только по времени испытания, но и по величине девиатора напряжений. Трещина с углом 5 градусов дольше всего сопротивлялась разрушению – деформация образца составила 32 мм, при этом усредненная деформация остальных образцов составила около 15 мм. Самый большой девиатор



Рис. 3. Результаты испытаний ортогональных трещин

1440 кПа отвечает ортогональной трещине 90(0) градусов, но для этого случая наблюдается и самое малое время, затраченное на разрушение образца.

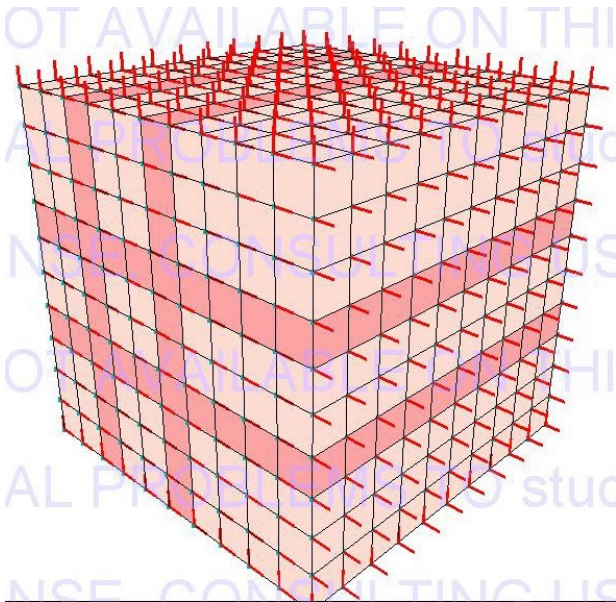
Следовательно, для первой, предварительной, трехмерной расчетной схемы математического моделирования применены результаты моделирования образца из эквивалентных материалов с ортогональными трещинами 90(0) градусов.

3. Численные исследования на основе математического моделирования. Дальнейшее исследование, намеченное после предварительного математического моделирования, направлено на оптимизацию математических моделей в упругопластической постановке для расчета трещиноватых скальных массивов. Но это задача будущего исследования.

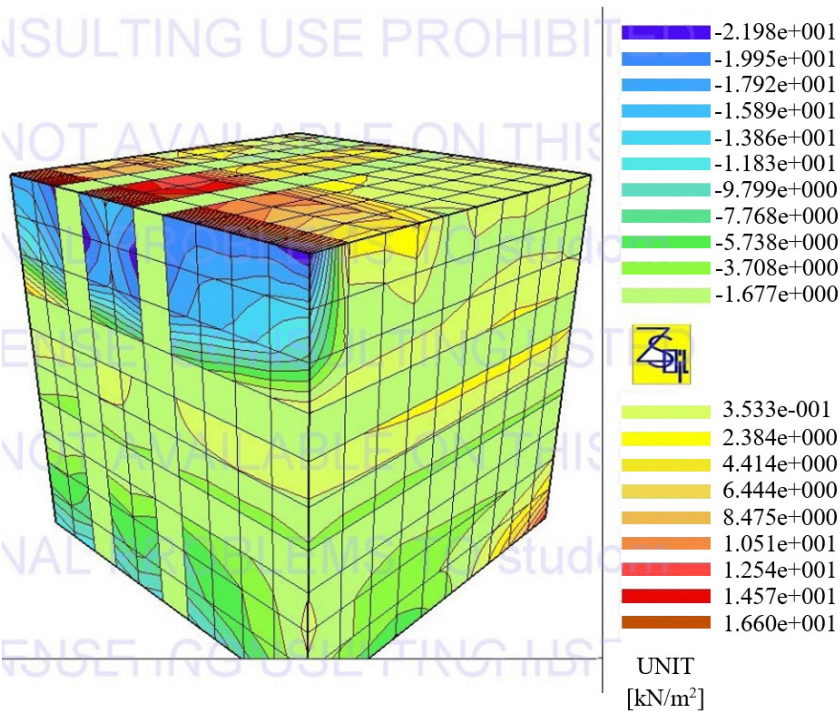
Ниже приведены результаты математического моделирования с использованием программного продукта ZSoil, реализующего метод конечных элементов.

Предварительно были построены двумерные расчетные схемы. Далее была построена и рассчитана трехмерная модель с ортогональными трещинами 90(0) градусов. Была принята математическая модель схематизации массива Кулона-Мора. На рисунке 4 представлены результаты моделирования.

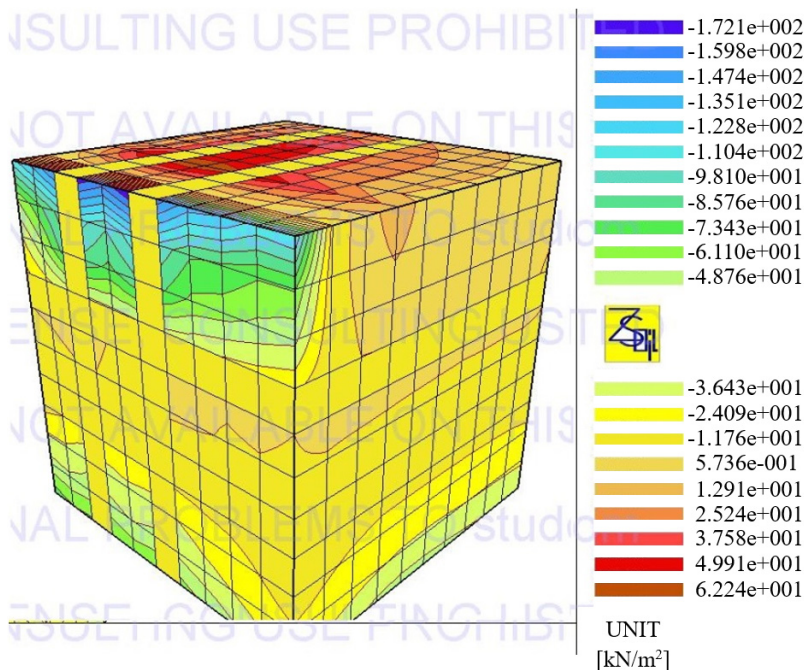
При математическом моделировании была принята кубическая форма образца. Учитывая масштабные коэффициенты, принятые в физическом моделировании образцов цилиндрической формы, к образцу были приложены соответствующие нагрузки и воздействия (на расчетной схеме трехосная нагрузка условно не показана). В результате установлено, что для последующих численных экспериментов необходимо брать трехмерную модель цилиндрической формы с иными масштабными коэффициентами.



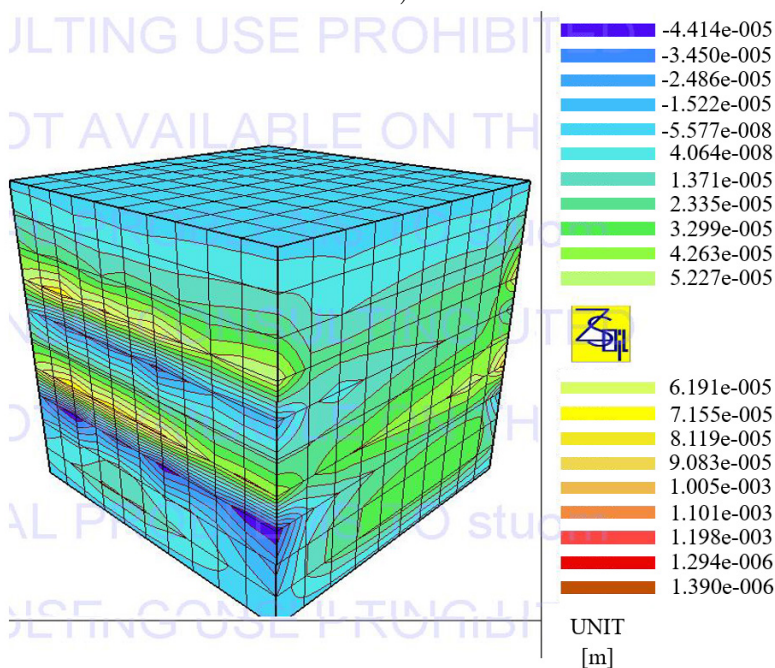
a)



б)



б)



г)

Рис. 4. Результаты 3D моделирования образца природного трещиноватого массива с ортогональными трещинами 90(0) градусов: а) – расчетная схема; б) главные напряжения по оси XX; в) главные напряжения по оси YY; г) перемещения по оси Y.

Выводы. Таким образом в результате проведенных исследований одиночной и ортогональных трещин было выявлено, что наиболее интересными для дальнейшего анализа являются углы наклона трещин в 90(0) градусов и поэтому, она была выбрана для предварительного математического моделирования. Математическая модель Кулона-Мора была применена для всех расчетов в упругопластической постановке. При проведении предварительных расчетов была выбрана кубическая форма образца со стороной 20 см в соответствии с рассчитанными масштабными коэффициентами эквивалентного материала. Однако полученные результаты указывают на необходимость пересмотра формы и размеров расчетной схемы в пользу цилиндрической.

Поставленные цели и задачи данного исследования были решены и позволяют определить задания будущих исследований: провести дополнительные физические эксперименты в соответствии с теорией планирования эксперимента для получения большей библиотеки результатов в целях последующего сравнения; проведение экспериментов методом математического моделирования в объемной постановке на цилиндрической расчетной схеме в соответствии с геометрическими масштабными коэффициентами и сравнение полученных результатов с данными физического моделирования.

1. *Cundall P.A.* A discrete numerical model for granular assemblies / P.A. Cundall, O.D.L. Strack // *Geotechnique*. – 1979. – Vol. 29. – P. 47–65. – DOI: 10.1680/geot.1979.29.1.47.
2. *Бате К.Ю.* Методы конечных элементов / К.Ю. Бате. – М.: Физматлит, 2010. – 1022 с.
3. *Леденев В.В.* Теоретические основы механики деформирования и разрушения: монография / В.В. Леденев, В.Г. Однолько, З.Х. Нгуен – Тамбов: ТГТУ, 2013. – 312 с.
4. *Yufin S.A.* Numerical modeling of jointed rock masses using existing models of continua / S.A. Yufin, E.V. Lamonina, O.K. Postolskaya, A.N. Vlasov, T. Zimmermann // *Alaska Rock 2005: Rock Mechanics for Energy, Mineral and Infrastructure Development in the Northern Regions, Anchorage*. – Anchorage: Curran Associates, Inc. – 2005. – Vol.1. – P. 1058–1067.
5. *Тусупов М.Т.* Модель системной трещиноватости массива горных пород и ее приложения: специальность 01.02.07: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Тусупов М.Т. – Алматы, 1994. – 39 с.
6. *Кузнецов Г.Н.* Приборы и способы измерения, применяемые при исследовании вопросов горного давления на моделях методом эквивалентных материалов / Г.Н. Кузнецов, М.Н. Будько. – Доклад на Семинаре по приборам, применяемым при исследованиях горного давления при ИГД им. А.А. Скочинского. – Л: ВНИМИ, 1962. – 16 с.
7. *Мартыненко С.В.* Новые составы эквивалентных материалов для повышения качества комплексных научных исследований / С.В. Мартыненко, В.Н. Коваленко, В.Ф. Панибратченко // *Горный информационно-аналитический бюллетень*. – 2003. – № 6. – С. 172–175.
8. *Протодяконов М.М.* Давление горных пород на рудничную крепь: (Теория рудничного крепления) / М.М. Протодяконов. – Екатеринбург: типография Губернского земства, 1907. – 103 с.
9. *Протодяконов М.М.* Давление горных пород и рудничное крепление / М.М. Протодяконов. – 2-е изд. – М; Л: Огиз; Красный печатник, 1931. – 128 с.
10. *Козина А.М.* Техника моделирования эквивалентными материалами / А.М. Козина. – М: Углетехиздат, 1957. – 27 с.
11. *Ко Ден Хо.* Исследование эквивалентных материалов для моделирования проявлений горного давления / Ко Ден Хо. – М.: Углетехиздат, 1958. – 26 с.
12. *Юфин С.А.* Анализ напряженно-деформированного состояния трещиноватых скальных пород с использованием численных методов / С.А. Юфин, Е.В. Ламонина // *Горный*

- информационно-аналитический бюллетень. – 2008. – № 10. – С. 268–277.
13. Манько А.В. О создании модели расчета трещиноватых скальных массивов при тектонических нагрузках методом эквивалентных материалов / А.В. Манько, С.В. Влад // Инженерный вестник Дона. – 2015. – № 2–2(36). – URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3014>.
 14. Требования по технике и методике моделирования методом эквивалентных материалов. Министерство угольной промышленности СССР. – Л: ВНИМИ, 1973. – 55 с.
 15. Панчурин Н.А. Конспект лекций по теории подобия и гидравлическому моделированию / Н.А. Панчурин. – Л: Министерство речного флота РСФСР, ЛИВТ, 1966. – 96 с.
 16. Deere D.U. Technical Description of Rock Cores for Engineering Purposes Rock Mechanics and Geology / D.U. Deere // Rock Mechanics and Engineering Geology, 1964. – № 1 – P. 17–22.
 17. Goodman R.E. Introduction to rock mechanics / R.E. Goodman. – New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons, 1989. – 562 p.
 18. Бойко А.Ф. Точный метод расчета необходимого количества повторных опытов / А.Ф. Бойко, Е.Ю. Кудеников // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. – 2016. – № 8. – С. 128–132.
 19. Хмяляйнен В.А. Авторское свидетельство № 1154465 А1 СССР, МПК Е21С 39/00. Способ создания модели горных пород с трещинами с помощью эквивалентных материалов : № 3700141 : заявл. 13.02.1984 : опубл. 07.05.1985 / В.А. Хмяляйнен, А.В. Угляница, Г.Я. Олендер ; заявитель Научно-исследовательский институт строительства угольных и горно-рудных предприятий "Кузниишахтострой".
 20. Шапошник Ю.Н. Определение качественной характеристики (RQD) и рейтинга (RMR) рудного массива в подземных выработках шахты "Скалистая" / Ю.Н. Шапошник, В.А. Усков // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2017. – Т. 2, № 2. – С. 99–107.

A.V. Manko, E.A. Muraveva

Study of deformed state of fractured rock massif by physical experiment on equivalent materials.

The paper deals with the issues related to obtaining deformation characteristics of samples of equivalent material, which models a fractured rock massif with orthogonal cracks. The obtained characteristics are used as reference ones when repeating the experiment by numerical method to select the model of mathematical modelling of fractured rock massifs by finite element method. First, the composition of the equivalent material for modelling the fractured rock massif with averaged physical and mechanical parameters was selected. Next, its moisture content was selected, as it affects the fracture character of the material. The main research is divided into three stages: the first stage considered samples of undisturbed structure of equivalent material; in the second stage the samples had one crack at different angles; the third stage had orthogonal cracks. The third stage was subsequently modelled in FEM in the volumetric formulation to verify the possibility of optimizing the mathematical models of the simulation

Keywords: *equivalent material, deformed state, fractured rock massif, triaxial compression, stress deviator, deformation properties, mathematical modelling.*

*Статья поступила в редакцию 30.01.2025;
доработана 12.02.2025;
рекомендована к печати 25.02.2025.*

УДК 622.831, 622.23.02

doi:10.24412/0136-4545-2025-1-109-116

EDN:WNPZAY

©2025. Ф.М. Голубев¹, Е.В. Ребенок²

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТРУКТУРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ГОРНОГО МАССИВА НА ПАРАМЕТРЫ СДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ДОБЫЧЕ УГЛЯ

В статье определены факторы, влияющие на характер распределения сдвижений в горном массиве и на земной поверхности. Установлена взаимосвязь граничных углов с упругими параметрами горного массива, что позволяет обосновать несовпадение проектных зон локализации деформаций с фактическими. Приведенные зависимости являются основой для математического моделирования и интерпретации результатов полевых исследований.

Ключевые слова: *подработка, свойства горных пород, граничные углы, модуль Юнга, сдвигение земной поверхности.*

Введение. В работах [1–2] установлено, что при сравнении расчетных параметров мульды сдвижений с фактическими возникают погрешности определения величины оседаний до 30 %, что приводит к существенному искажению в проектах участков локализации всех видов относительных деформаций.

Согласно работам [3–4], параметры процесса сдвижения горных пород при добыче угля зависят от физико-механических характеристик массива в целом, и каждой горной породы, как его составляющей. Как указано в работах [3–4], свойства горных пород практически всегда являются нелинейными. Однако, общая закономерность деформируемости горных пород существует, ее можно выразить в конкретных показателях физико-механических свойств. Разные горные породы имеют различную склонность к деформированию, и чем большим является модуль упругости породы, тем большие нагрузки она способна выдерживать не разрушаясь. Одним из наиболее полных пособий, содержащих характеристики сухих горных пород является «Справочник (кадастр) физических свойств горных пород» [5]. Данный источник отличается широким охватом территории, на которой исследовались свойства различных горных пород.

¹Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, зав. отд. геодинамических и геофизических процессов РАНМИ, Донецк, e-mail: f_golubev@list.ru.

Golubev Philipp Maksimovich – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geodynamic and Geophysical Processes.

²Ребенок Евгений Вадимович – мл. науч. сотр. отд. геодинамических и геофизических процессов РАНМИ, Донецк, e-mail: genich2008@yandex.ru.

Rebenok Evgeny Vadimovich – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geodynamic and Geophysical Processes.

Влияние физико-механических свойств пород на процесс сдвижения горного массива изучался рядом авторов. Так, в работе [6] отмечено значительное влияние физико-механических свойств геоматериалов на фактические деформации горного массива. В работе [7] указано, что одним из основополагающих параметров, влияющих на деформации поверхности, является пористость горных пород.

В работе [8] автор исследует влияние крепости горных пород на деформации горного массива и земной поверхности. В результате данного исследования устанавливается статистическая связь между разностью измеренных и фактических оседаний, и показателем крепости горных пород, которая выражается следующей эмпирической формулой

$$\Delta\eta = 0,31 \cdot P - 2,54, \quad (1)$$

где $\Delta\eta$ – разность между фактическими и расчетными оседаниями, мм; P – средневзвешенная крепость горных пород, безразмерный параметр.

Учитывая указанную взаимосвязь, автор приводит формулу максимальных оседаний, указанную в [9–10], к виду

$$\eta_m^p = q_0 \cdot m \cdot \cos \alpha \cdot N_1 \cdot N_2 + 0,31 \cdot P - 2,54, \quad (2)$$

где q_0 – относительная величина максимального оседания, безразмерная величина; m – вынимаемая мощность пласта или эффективная мощность пласта при работе с закладкой выработанного пространства, м; α – угол падения пласта в пределах очистной выработки, градус; N_1, N_2 – условные коэффициенты, характеризующие степень подработанности земной поверхности, соответственно вкрест простирания и по простиранию, безразмерные величины. При ее использовании, сумма квадратов отклонения между фактическими и расчетными значениями снижается почти в три раза. Таким образом подтверждается тот факт, что учет прочностных свойств пород при расчете оседаний земной поверхности может существенно повышать качество прогноза.

Стоит отметить, что определяя величину сдвижений земной поверхности, следует корректировать и зону локализации их максимальных проявлений, а также размеры зоны влияния горной выработки на поверхность. Данный факт подтверждается натурными наблюдениями, и требует проведения дополнительных исследований, что является целью данной работы.

1. Методика исследования. Нормативные документы [9–10] регламентируют определение граничных углов на основе информации о марках угля, что является интерпретацией косвенного учета физико-механических характеристик горных пород, свойственных угленосному району.

В соответствии с распределением, указанным в нормативных документах [9–10], и с учетом данных, приведенных в [11], для основных районов Донбасса характерны показатели граничных углов, приведенные в таблице 1.

Стоит отметить, что согласно [11], упругие свойства горных пород указанных в таблице районов увеличиваются в соответствии с повышением степени метаморфизма углей.

Таблица 1. Граничные углы, характерные для различных районов Донбасса

Название района	Марки углей [11]	Граничные углы [9,10]
Алмазно-Марьевский угленосный район	Г, Ж, К, ОС	70
Боково-Хрустальский угленосный район	А	75
Гуково-Зверевский угленосный район	А	75
Донецко-Макеевский	К, Д, Ж, КЖ	70
Миллеровский	ДБ, Г, Г-Ж	70
Ореховский	А	75
Торезо-Снежнянский	Т, ПА, А	75
Западный Донбасс	Д, Г+К	65

На основе анализа марочного состава углей и свойств песчаников в разных угледобывающих районах Донбасса можно сделать вывод о наличии прямой взаимосвязи величины граничного угла и прочностных (упругих) параметров массива. Взаимосвязь граничного угла с модулем упругости песчаников, отобранных на глубинах 400–500 метров, согласно [5], в районах с различными марками угля от ДГ до А, приведены на рисунке 1.

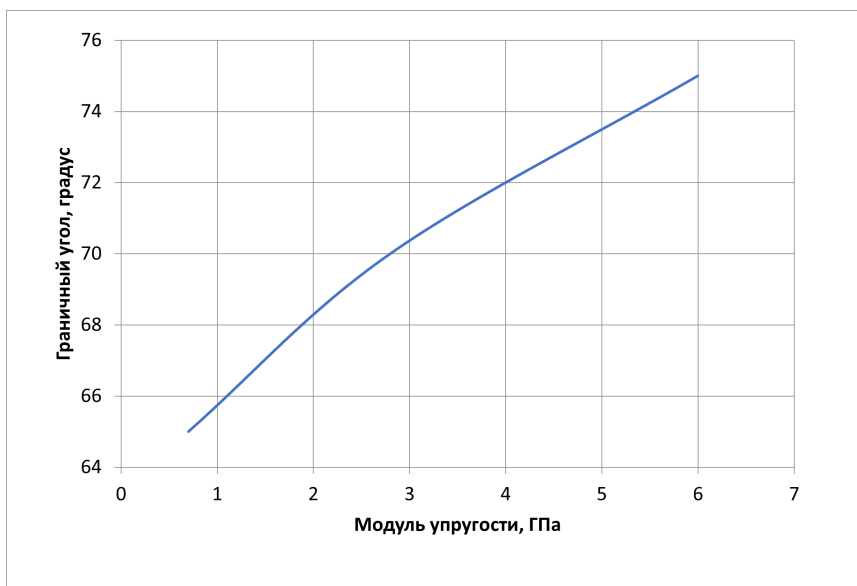


Рис. 1. График взаимосвязи граничного угла с модулем упругости песчаников, отобранных на глубинах 400–500 метров

Немаловажным замечанием является тот факт, что упругие параметры горного массива не являются константой, и существенно изменяются в результате многократной подработки. Стоит отметить, что на территории Донбасса подавляющее большинство шахт отрабатывало более 3 пластов, а зоны влияния горных выработок зачастую пересекаются, образуя принципиально новую геомеханическую систему, в которой развиваются принципиально новые закономерности сдвижения горного массива и земной поверхности (рис. 2).

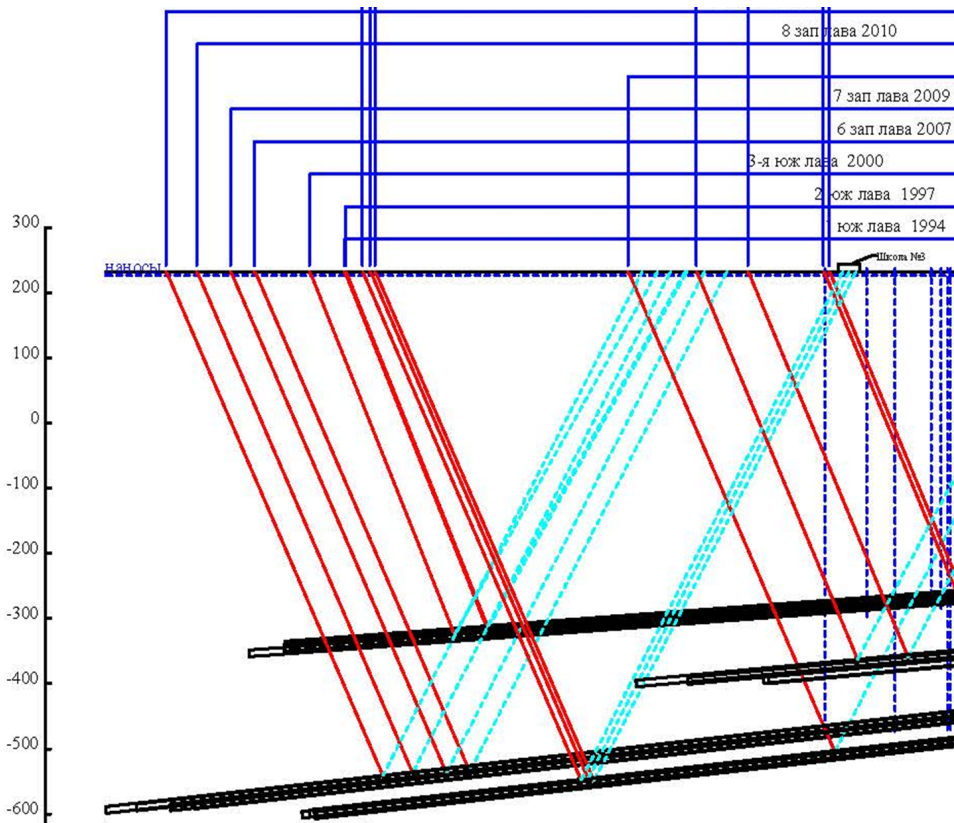


Рис. 2. Часть разреза зон влияния горных выработок шахты «Комсомолец Донбасса» в пределах города Кировское

Действующие нормативные документы не в полной мере позволяют оценить влияние степени подработанности горного массива на изменение его свойств, что приводит к отклонениям расчетных и фактических зон влияния горных работ на сотни метров (рис. 3) [12].

С увеличением мульды сдвижения будет происходить и изменение участка локализации максимальных относительных деформаций, несущих опасность для объектов поверхности. Определение характера распределения деформаций по простиранию в полумульде, согласно [9], производится на основании следующей зависимости

$$\varepsilon_x = 0,5a_0 \frac{\eta_m}{L_3} S''(z_x) S(z_y), \quad (3)$$

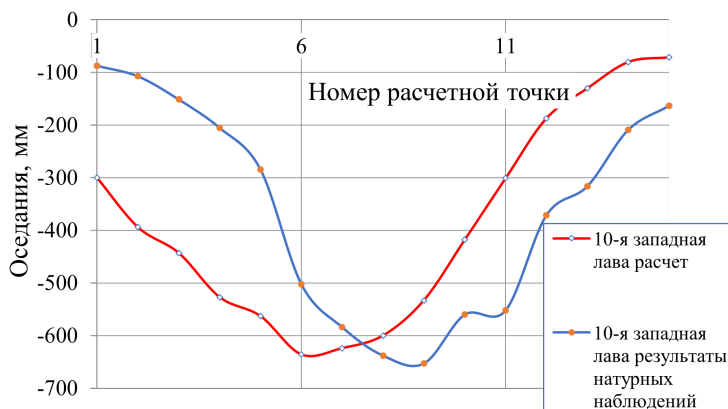


Рис. 3. Отклонение фактических оседаний от расчетных

где η_m – максимальное оседание земной поверхности, мм; L_3 – длина полумульды по простираанию пласта, м; a_0 – относительная величина максимального горизонтального сдвигания, безразмерная величина; $S''(z_x)$, $S(z_y)$ – значения функций единичных кривых оседаний [9], безразмерные величины.

При этом показатель L_3 в условиях полной подработки с учетом особенностей структуры рельефа определяется как

$$L_3 = (H_i - h - h_m) \cdot \operatorname{ctg} \delta_0 + h_m \cdot \operatorname{ctg} \delta_{0m} + h \cdot \operatorname{ctg} \varphi_0 + H_i \cdot \operatorname{ctg} \psi_3, \quad (4)$$

где L_3 – длина полумульды по простираанию пласта, м; H_i – динамическая глубина разработки, м; h – мощность наносов, м; h_m – мощность мезозойских отложений, м; δ_0 – граничные углы соответственно по простираанию, градус; φ_0 – граничные углы в наносах, градус; δ_{0m} – граничные углы в мезозойских отложениях, градус; ψ_3 – углы полных сдвижений в соответствии с [9], градус.

Пример расчета зон влияния горных работ с разницей в плане граничных углов в 5 градусов приведен на рисунке 4.

Стоит отметить, что на сегодняшний день вопросы изменения механических свойств горного массива при подработке изучены довольно слабо. Однако, существует ряд исследований по изучению влияния многократной подработки на параметры проницаемости. Согласно исследованиям [13], в результате многократной подработки проницаемость горных пород может увеличиваться до пяти порядков.

Для перехода от значений проницаемости к значениям модуля Юнга возможно воспользоваться соотношением, приведенным в работе [14]:

$$E = 8,1 \cdot T_s (1/k_{pr})^{1/2}, \quad (5)$$

где E – модуль Юнга, МПа; T_s – эффективная поверхностная энергия, Дж/м²; k_{pr} – коэффициент проницаемости, Дарси.

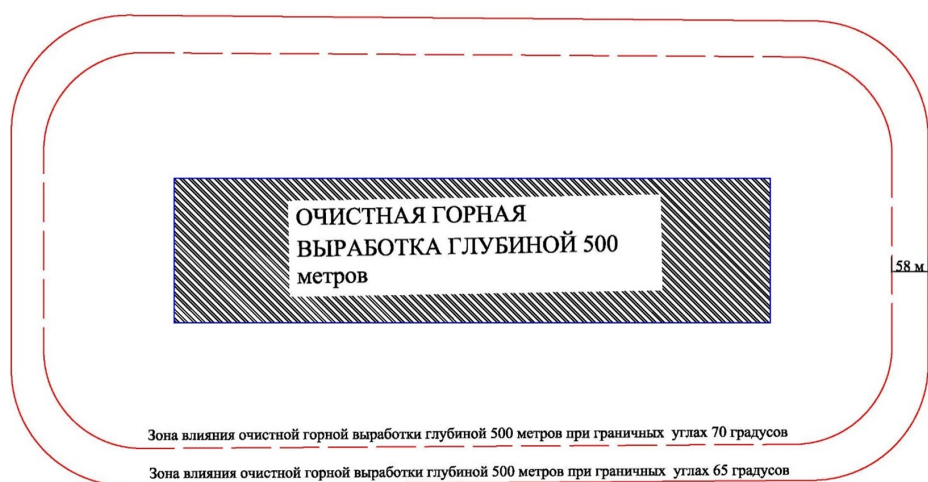


Рис. 4. Зоны влияния идентичных горных выработок при граничном угле 70 градусов и при граничном угле 65 градусов

2. Анализ результатов. Как видно из приведенной зависимости, увеличение на один порядок коэффициента проницаемости горных пород приводит к снижению упругих свойств массива в 3–4 раза. Стоит отметить, что согласно существующим исследованиям, в пределах купола полных сдвижений проницаемость горных пород может изменяться до 5 порядков.

Учитывая наличие взаимосвязи граничного угла и модуля упругости горных пород, приведенного на рисунке 1, закономерно утверждать, что возможно существенное изменение граничных углов при многократной подработке горного массива, что, в свою очередь, ведет к изменению участков локализации горизонтальных сдвижений и относительных горизонтальных деформаций в пределах мульды (рис. 5).

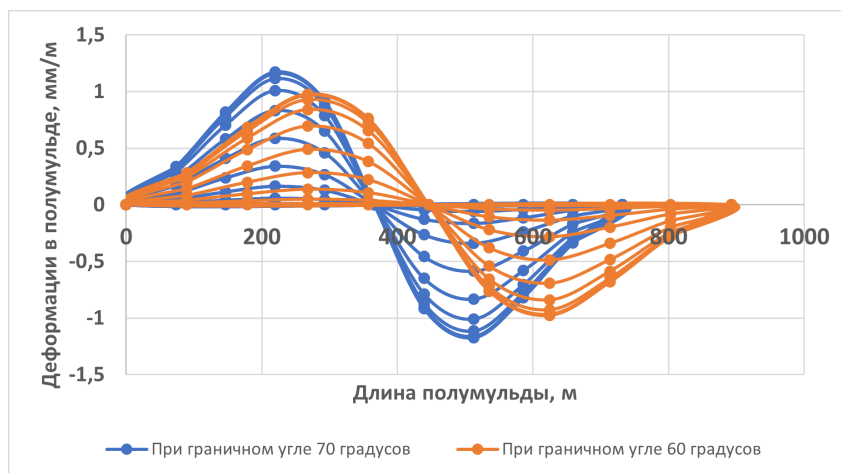


Рис. 5. Распределение деформаций земной поверхности при прочих равных условиях и при граничных углах 70 градусов и 60 градусов

Выводы. На основании проведенных исследований подтверждается наличие влияния параметров отработанных ранее горизонтов на величину граничного угла при отработке нижележащих пластов. Установлена взаимосвязь граничных углов с упругими параметрами горного массива, что позволяет обосновать несовпадение проектных зон локализации деформаций с фактическими. Уточнение взаимосвязи модуля Юнга с базовыми прочностными и фильтрационными характеристиками горного массива может являться основой для интерпретации результатов полевых исследований с использованием методов разведочной геофизики. Приведенные зависимости являются базовыми для уточнения параметров деформирования земной поверхности на основании методов математического моделирования.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124061700022-3).

1. Скаженник В.Б. Совершенствование методики прогноза последствий подработки территорий угольными шахтами на основе цифровых моделей / В.Б. Скаженник, Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев, Л.А. Иванова // Труды РАНИМИ. – 2024. – № 3–1(41). – С. 35–48.
2. Бугаёва Н.А. Определение параметров деформаций земной поверхности по стохастическим мульдам оседания / Н.А. Бугаёва, К.В. Яремчук, В.В. Назимко // Проблемы горного давления. – 2009. – № 17. – Режим доступа: <http://ea.donntu.edu.ua/handle/123456789/4879>.
3. Баклашов И.В. Механика горных пород / И.В. Баклашов, Б.А. Картозия. – М.: Недра. – 1975. – 271 с.
4. Гмид Л.П. Литологические аспекты изучения карбонатных пород-коллекторов / Л.П. Гмид // Нефтегазовая геология. Теория и практика. – 2006. – № 1. – 23 с.
5. Мельников Н.В. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород / Н.В. Мельников, В.В. Ржевский, М.М. Протодияконов. – М.: Недра. – 1975. – 279 с.
6. Акимов А.Г. К расчету наибольших горизонтальных сдвижений земной поверхности при разработке пологих пластов / А.Г. Акимов // Труды ВНИМИ. – 1960. – № 34. – С. 294–304.
7. Мазеин С.В. Зависимость осадок дневной поверхности / С.В. Мазеин, А.М. Павленко // Неделя горняка. – 2007. – № 15. – С. 171–176.
8. Посыльный Ю.В. Методика исследования влияния толщи горных пород на максимальное оседание земной поверхности / Ю.В. Посыльный // Неделя горняка. – 2007. – № 2. – С. 115–123.
9. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Киев. – 2004. – 127 с.
10. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях: ПБ 07-269-98: утв. Госгортехнадзором России 16.03.1998: введ. в действие с 01.10.1998. – М., 1998. – 203 с.
11. Геология месторождений угля и горючих сланцев СССР / И.А. Кузнецов, В.В. Лагутин, М.Л. Левенштейн. – М.: Гос. НТИ литературы по геологии и охране недр, 1963. – 1213 с.
12. Грищенко Н.Н. Пространственное моделирование зон многократной подработки горными выработками участков со сложной структурой рельефа / Н.Н. Грищенко, В.Б. Скаженник, Е.А. Бардакова, И.В. Чернышенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 3 (88). – С. 89–99. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-3-89-99. – EDN: KВUHPС.
13. Дрибан В.А. Фильтрационная модель многократно подработанного массива / В.А. Дрибан, Н.А. Дуброва // Сборник научных трудов Донбасского государственного технического университета. – 2017. – № 7 (50). – С. 31–37.
14. Семашко С.В. Современные движения флюидов в земной коре / С.В. Семашко // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2011. – № 2. – С. 51–67.

Ph.M. Golubev, E.V. Rebenok

Study of the influence of structural features of a mountain massif on the parameters of earth's surface displacement during coal mining.

The article defines the factors influencing the nature of the distribution of displacements in the rock mass and on the earth's surface. The relationship between the boundary angles and the elastic parameters of the rock mass is established, which allows us to justify the discrepancy between the design zones of deformation localization and the actual ones. The given dependencies are the basis for mathematical modeling and interpretation of the results of field studies.

Keywords: *Undermining, properties of rocks, boundary angles, Young's modulus, displacement of the earth's surface.*

*Статья поступила в редакцию 31.01.2025;
доработана 14.02.2025;
рекомендована к печати 25.02.2025.*