

ISSN 2415-7058

Вестник Донецкого национального университета



НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ

*Основан
в 1997 году*

Серия А
**Естественные
науки**

2 / 2021

**Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального
университета. Серия А: Естественные науки»**

Главный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**

Зам. главного редактора — д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**

Ответственный секретарь: канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**

Члены редколлегии: д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; канд. хим. наук, доц. **А.В. Белый**; доктор философии, профессор **С.В. Белый** (Тройский университет, США); д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Беларуси **С.А. Жданок** (Беларусь); д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**; д-р физ.-мат. наук, доц. **С.А. Мельник** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**; д-р биол. наук, проф. **В.И. Соболев** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**; д-р биол. наук, проф. **Н.Н. Ярошенко**.

**The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University.
Series A: Natural Sciences”**

The Editor-in-Chief — Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**

The Deputy of the Editor-in-Chief — Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**

Executive Secretary: Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**

The Members of the Editorial Board: Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Cand. of chem., docent. **A.V. Belyj**; Dr. of Philosophy, prof. **S.V. Belyi** (Troy University, USA); Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Zhdanok** (Belarus); Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**; Dr. of phys. and math., docent **S.A. Melnik** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhali'chuk**; Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**, Dr. of biol., prof. **V.I. Sobolev** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**; Dr. of biol., prof. **N.N. Jaroshenko**.

Адрес редакции: ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

ул. Университетская, 24, г. Донецк, ДНР, 83001

Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92

E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru **URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказы МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г. и № 1468 от 26.12.2017 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 — Математика; 01.02.00 — Механика; 01.04.00 — Физика; 02.00.00 — Химические науки; 03.02.00 — Общая биология.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

*Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».
Протокол № 6 от 27.09.2021 г.*

©ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», 2021

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. Естественные науки

№ 2

Донецк 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

<i>Агibalова А. В., Будыка В. С. Реализации оператора Дирака с неограниченным матричным потенциалом Q и максимальными индексами дефекта</i>	<i>3</i>
<i>Волчков В. В., Волчков Вит. В. Элементы нетрадиционной интегральной геометрии .</i>	<i>9</i>
<i>Волčkova Н. П., Волчков Вит. В., Ищенко Н. А. О функциях с нулевыми интегралами по шарам</i>	<i>53</i>
<i>Глушанков Е. С. Численно-аналитический метод решения одной задачи Дирихле с разрывными граничными условиями</i>	<i>66</i>
<i>Заставный В. П., Манов А. Д. Некоторые обобщения задачи о положительной определённости кусочно линейной функции</i>	<i>73</i>
<i>Лиманский Д. В. Об условиях подчиненности для тензорного произведения двух обыкновенных дифференциальных полиномов с кратными вещественными нулями</i>	<i>90</i>
<i>Манов А. Д. Некоторые неравенства для положительно определённых функций . . .</i>	<i>101</i>
<i>Машаров П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равносторонним треугольникам</i>	<i>110</i>

Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

Series A. Natural Sciences

№ 2

Donetsk 2021

CONTENTS

Mathematics

<i>Agibalova A. V., Budyka V. S.</i> Realizations of the Dirac operator with unbounded matrix potential Q and maximum deficiency indices	3
<i>Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.</i> Elements of offbeat integral geometry	9
<i>Volchkova N. P., Volchkov Vit. V., Ischenko N. A.</i> On functions with zero integrals over balls	53
<i>Glushankov E. S.</i> A numerical-analytical method for solving one Dirichlet problem with discontinuous boundary conditions	66
<i>Zastavnyi V. P., Manov A. D.</i> Some generalizations of the problem of positive definiteness of a piecewise-linear function	73
<i>Limanskii D. V.</i> On subordinated conditions for the tensor product of two ordinary differential polynomials with multiple real zeros	90
<i>Manov A. D.</i> Some inequalities for positive definite functions	101
<i>Masharov P. A.</i> On functions with zero surface integrals over equilateral triangles	110

УДК 517.984.46

РЕАЛИЗАЦИИ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ МАТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ Q И МАКСИМАЛЬНЫМИ ИНДЕКСАМИ ДЕФЕКТА

© 2021. А. В. Агibalова, В. С. Будыка

В работе рассматривается матричный оператор Дирака с точечными взаимодействиями и нетривиальным матричным потенциалом. Получены условия максимальности индексов дефекта данного оператора.

Ключевые слова: оператор Дирака, точечные взаимодействия, неограниченный матричный потенциал, индексы дефекта.

§ 1. Введение. Рассмотрим дифференциальное выражение Дирака $D(Q)$ с потенциальной матрицей $Q \in L^2_{\text{loc}}(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p \times 2p})$,

$$D(Q) := -i c \frac{d}{dx} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p \\ \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p \end{pmatrix} + \frac{c^2}{2} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p \\ \mathbb{O}_p & -\mathbb{I}_p \end{pmatrix} + Q(x), \quad Q(x) = Q(x)^*, \quad (1)$$

в $L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})$. Здесь $c > 0$ обозначает скорость света. Пусть $X = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{I} = (0, b)$, $b := \sup X \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \infty$ строго возрастающая последовательность с $x_0 := 0$, $x_{n+1} > x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \rightarrow b$. Пусть $d_n := x_n - x_{n-1} > 0$. Предположим также, что

$$\alpha := \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty, \quad \alpha_n = \alpha_n^* \in \mathbb{C}^{p \times p}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Следуя [4] (см. также [6]), определим семейство Гестези-Шеба операторов на интервале $(0, b)$, как замыкание операторов

$$\begin{aligned} D_{X,\alpha}^0 &= D \upharpoonright \text{dom}(D_{X,\alpha}^0), \\ \text{dom}(D_{X,\alpha}^0) &= \left\{ f \in W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) : f_I \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I}), f_{II} \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I} \setminus X); \right. \\ &\quad \left. f_{II}(0+) = 0, \quad f_{II}(x_n+) - f_{II}(x_n-) = -\frac{i\alpha_n}{c} f_I(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

т.е. $D_{X,\alpha} = \overline{D_{X,\alpha}^0}$. Легко видеть, что оператор $D_{X,\alpha}$ симметричен, но не обязательно самосопряжен.

Положим $f = \{f_1, f_2, \dots, f_{2p}\}^\top \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})$ и

$$f = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{II} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad f_I := \{f_1 \ f_2 \ \dots \ f_p\}^\top, \quad f_{II} := \{f_{p+1} \ f_{p+2} \ \dots \ f_{2p}\}^\top.$$

Здесь $\top$ означает операцию транспонирования.

Операторы (3) называют операторами Дирака с точечными взаимодействиями или GS–реализациями. Они введены в работе Гестези и Шеба [4] для случая $p = 1$ и $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ (см. также [6]) и исследованы там в периодическом случае $X = \mathbb{Z}$. Спектральная теория таких операторов в случае $p = 1$ и произвольного X ($d_*(X) \geq 0$) была построена в [3]. Результаты из [3] распространены на многомерный случай для потенциала $Q \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p \times 2p})$ в

работах [9], [8], [10]. Отметим в этой связи недавние работы [1], [2], а также монографию [5], посвященные спектральной теории одномерных и многомерных операторов Дирака.

В настоящей работе некоторые результаты из [3] и [10] распространяются на случай матричного оператора Дирака $D_{X,\alpha}(Q)$ с точечными взаимодействиями и неограниченным матричным потенциалом. Именно, находим описание области определения данного оператора и условия на потенциал Q , гарантирующие максимальность индексов дефекта оператора $D_{X,\alpha}(Q)$. Эти условия уже существенно зависят от потенциала Q .

Обозначения. $\mathcal{H}$ обозначает сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $\mathbb{O}_p = \mathbb{O}_{\mathbb{C}^p}$ и $\mathbb{I}_p = \mathbb{I}_{\mathbb{C}^p}$ обозначают нулевой и единичный операторы в $\mathbb{C}^p$, соответственно. В дальнейшем, $\text{dom}(T)$ обозначает область определения оператора T . Пусть $I \subset \mathbb{Z}$. $L^2(I; \mathcal{H}) := L^2(I) \otimes \mathcal{H}$ обозначает L^2 -пространство $\mathcal{H}$ -значных функций.

Пусть X — дискретное подмножество $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Введем пространства Соболева

$$W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) := \{f \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p}) : f \in AC_{loc}(\mathcal{I} \setminus X), f' \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})\},$$

$$W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) := \{f \in W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) : \text{supp } f \text{ компактен в } \mathcal{I}\}.$$

§ 2. Операторы Дирака на конечном интервале с максимальными индексами дефекта. Пусть $D_X(Q)$ – минимальный оператор, ассоциированный в $\mathcal{I} \setminus X$ с выражением $D(Q)$:

$$D_X(Q) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} D_n(Q), \quad \text{dom}(D_X(Q)) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(D_n(Q)), \quad (4)$$

где $D_n(Q)$ обозначает минимальный оператор, ассоциированный в $L^2([x_{n-1}, x_n]; \mathbb{C}^{2p})$ с выражением (1). Положим $D_X := D_X(\mathbb{O})$ и $D_X^* := D_X(\mathbb{O})^*$.

Теорема 1 ([10]). Пусть $\alpha := \{\alpha_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{p \times p}$ – последовательность самосопряженных $p \times p$ -матриц, $\alpha_n = \alpha_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что выполнено следующее условие:

$$\sum_{n=2}^\infty d_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{c} \|\alpha_k\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}\right)^2 < +\infty. \quad (5)$$

Тогда $n_\pm(D_{X,\alpha}) = p$.

Теорема 2. Пусть $|\mathcal{I}| < +\infty$. Пусть также $Q(\cdot) = Q^*(\cdot) \in L^2_{\text{loc}}(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p \times 2p})$, и пусть $D_X(Q)$ – минимальный оператор Дирака на $\mathcal{I} \setminus X$ вида (4). Дополнительно предположим, что оператор умножения $f \rightarrow Qf$ в $L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})$ сильно подчинен оператору Дирака D_X^* , т.е. $\text{dom}(D_X^*) \subset \text{dom}(Q)$ и существуют константы $c_1 \in (0, 1)$, $c_0 > 0$ такие, что

$$\|Qf\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})} \leq c_1 \|D_X^* f\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})} + c_0 \|f\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}, \quad f \in \text{dom}(D_X^*). \quad (6)$$

Тогда:

$$(i) \quad \text{dom}(D_X(Q)^*) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} W^{1,2}([x_{n-1}, x_n]; \mathbb{C}^{2p}) = \text{dom}(D_X^*), \quad (7)$$

и

$$\text{dom}(D_{X,\alpha}^*(Q)) = \text{dom}(D_{X,\alpha}^*) = \left\{ f \in W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) : f_I \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I}), \right. \\ \left. f_{II} \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I} \setminus X); f_{II}(a+) = 0, f_{II}(x_n+) - f_{II}(x_n-) = -\frac{i\alpha_n}{c} f_I(x_n) \right\}, \quad (8)$$

$n \in \mathbb{N}$;

(ii)

$$\operatorname{dom}(D_{X,\alpha}(Q)) = \operatorname{dom}(D_{X,\alpha}), \quad D_{X,\alpha}(Q)f = D_{X,\alpha}^*(Q)f \upharpoonright \operatorname{dom}(D_{X,\alpha}^*(Q)); \quad (9)$$

(iii) если к тому же выполнено условие (5), то $n_{\pm}(D_{X,\alpha}(Q)) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) – (ii) Оценка (6) означает, что Q сильно подчинен оператору D_X^* , таким образом, этого следует первое соотношение в (7). В свою очередь, это дает совпадение $\operatorname{dom}(D_{X,\alpha}(Q)) = \operatorname{dom}(D_{X,\alpha})$ для любой последовательности $\alpha = \{\alpha_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{p \times p}$.

(iii) Из оценки (6) вытекает, что оператор $D_{X,\alpha}(Q)$ сильно подчинен оператору $D_X(Q)$. Поэтому в силу теоремы Като-Реллиха ([7, Теорема 4.1.9]), $n_{\pm}(D_X(Q)) = n_{\pm}(D_{X,\alpha}(Q))$. Так как α удовлетворяет условию (5), то теорема 1 завершает доказательство. $\square$

Для того чтобы применить теорему 1 к операторам Дирака с неограниченным потенциалом, приведем следующий аналог классического неравенства Харди.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{I} = (0, b)$, $b < +\infty$. Тогда для любой $f \in W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X)$, удовлетворяющей $f(0) = 0$, выполняется следующее неравенство

$$\int_0^b \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \leq \frac{1}{4} \int_0^b |f'(x)|^2 dx + \frac{1}{x_1^2} \int_{x_1}^b |f(x)|^2 dx. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу классического неравенства Харди,

$$\int_0^{x_1} \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \leq \frac{1}{4} \int_0^{x_1} |f'(x)|^2 dx \leq \frac{1}{4} \int_0^b |f'(x)|^2 dx, \quad (11)$$

где $f \in W^{1,2}[0, x_1]$, $f(0) = 0$. Далее, так как $f \in W^{1,2}[x_k, x_{k+1}]$ для любого $k \in \mathbb{N}$, легко получаем

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \leq \frac{1}{x_k^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)|^2 dx, \quad k \geq 1. \quad (12)$$

Суммируя неравенства (12), получаем

$$\int_{x_1}^b \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x_k^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{x_1^2} \int_{x_1}^b |f(x)|^2 dx. \quad (13)$$

Объединяя (11) с (13), приходим к (10). $\square$

Приведем пример оператора $D_{X,\alpha}(Q) = D_{X,\alpha} + Q$ с неограниченной потенциальной матрицей $Q(\cdot) = Q^*(\cdot) \notin L^\infty(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p \times 2p})$.

Пусть далее

$$|f|^2 = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{2p}^2. \quad (14)$$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{I} = (0, b)$, $b < +\infty$. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Пусть также $Q(\cdot) = \operatorname{diag}(Q_1(\cdot), Q_2(\cdot))$ с $Q_1(\cdot) \in L^\infty(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{p \times p})$, и неограниченной измеримой матрицей $Q_2(\cdot) \in \mathbb{C}^{p \times p}$, удовлетворяющей

$$|Q_2(x)| \leq \frac{C_1}{x^\gamma}, \quad x \in \mathcal{I}, \quad \gamma \in (0, 1), \quad C_1 > 0. \quad (15)$$

Тогда $n_{\pm}(D_{X,\alpha}(Q)) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что оператор умножения $f \rightarrow Qf$ сильно подчинен оператору $D_{X,\alpha}$, т.е. что $\text{dom}(D_{X,\alpha}(Q)) \subset \text{dom}(Q)$ и неравенство (6) верно для $f = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{II} \end{pmatrix} \in \text{dom}(D_{X,\alpha})$.

Для $Q_1(\cdot) \in L^\infty(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{p \times p})$ положим, что $\|Q_1\|_{L^\infty(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})} = C_2$, тогда

$$\begin{aligned} \|Q_1 f_I\|_{L^\infty(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 &\leq \|Q_1\|_{L^\infty(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 \int_a^b |f_I(x)|^2 dx \\ &\leq C_2^2 \int_a^b |f_I(x)|^2 dx = C_2^2 \|f_I\|_{L^\infty(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Остается оценить $\|Q_2 f_{II}\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}$. Выбирая $\varepsilon < 1$ так, что $C_1^2 \varepsilon^2 < 2$, найдем $a \leq x_1$, удовлетворяющую $a^{1-\gamma} < \varepsilon$. Затем отметив, что $f_{II}(0) = 0$ для $f = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{II} \end{pmatrix} \in \text{dom}(D_{X,\alpha})$, из классического неравенства Харди получаем

$$\begin{aligned} \|Q_2 f_{II}\|_{L^2((0,a);\mathbb{C}^{2p})}^2 &\leq C_1^2 \int_0^a \frac{|f_{II}(x)|^2}{x^{2\gamma}} dx = C_1^2 \int_0^a \frac{x^{2(1-\gamma)} |f_{II}(x)|^2}{x^2} dx \\ &\leq C_1^2 \int_0^a \frac{\varepsilon^2 |f_{II}(x)|^2}{x^2} dx \leq \frac{C_1^2 \varepsilon^2}{4} \int_0^a |f'_{II}(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^a |f'_{II}(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (15) следует, что

$$\|Q_2 f_{II}\|_{L^2((a,x_1);\mathbb{C}^{2p})}^2 \leq C_1^2 \int_a^{x_1} \frac{|f_{II}(x)|^2}{x^{2\gamma}} dx \leq \frac{C_1^2}{a^{2\gamma}} \int_a^{x_1} |f_{II}(x)|^2 dx. \quad (18)$$

Объединяя (15) с (13), получим

$$\|Q_2 f_{II}\|_{L^2((x_1,b);\mathbb{C}^{2p})}^2 \leq C_1^2 \int_{x_1}^b \frac{|f_{II}(x)|^2}{x^{2\gamma}} dx \leq \frac{C_1^2}{x_1^{2\gamma}} \int_{x_1}^b |f_{II}(x)|^2 dx. \quad (19)$$

Объединяя неравенства (17) — (19) с леммой 1, получим

$$\|Q_2 f_{II}\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 \leq \frac{1}{2} \|f'_{II}\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 + \tilde{C}_1 \|f_{II}\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2, \quad (20)$$

где $\tilde{C}_1 = C_1^2 \max\{a^{-2\gamma}, x_1^{-2\gamma}\}$.

Суммируя неравенства (16) и (20), легко получить, что

$$\|Qf\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 \leq \frac{1}{2} \|f'\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 + C_3 \|f\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2, \quad (21)$$

где $C_3 = \max\{C_2^2, \tilde{C}_1\}$. Эта оценка дает (6) с $c_1 = \frac{1}{2}$ и $c_0 = C_3$.

Это означает, что оператор Q сильно подчинен оператору $D_{X,\alpha}$. Следовательно, по теореме Като-Реллиха ([7, Теорема 4.1.9]) $n_\pm(D_X(Q)) = n_\pm(D_{X,\alpha})$. Осталось применить теорему 1. $\square$

Следствие 2. Пусть $\mathcal{I} = (0, b)$, $b < +\infty$. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Пусть также $Q(\cdot) = \text{diag}(Q_1(\cdot), Q_2(\cdot))$ с $Q_1(\cdot) \in L^\infty(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{p \times p})$, и неограниченной измеримой матрицей $Q_2(\cdot) \in \mathbb{C}^{p \times p}$ удовлетворяющей

$$|Q_2(x)| \leq \frac{C_4}{x}, \quad x \in \mathcal{I}, \quad 0 < C_4^2 < 4. \quad (22)$$

Тогда $n_\pm(D_{X,\alpha}(Q)) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что оператор умножения $f \rightarrow Qf$ сильно подчинен оператору $D_{X,\alpha}$, т.е. что $\text{dom}(D_{X,\alpha}(Q)) \subset \text{dom}(Q)$ и неравенство (6) верно для $f = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{II} \end{pmatrix} \in \text{dom}(D_{X,\alpha})$. Так как $Q_1(\cdot) \in L^\infty(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{p \times p})$ (см. (16)), достаточно оценить $\|Q_2 f_{II}\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}$. Отметим, что $f_{II}(0) = 0$ для $f = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{II} \end{pmatrix} \in \text{dom}(D_{X,\alpha})$ и $C_4^2/4 = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Объединяя неравенство (22) с леммой 1, получим

$$\begin{aligned} \|Q_2 f_{II}\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 &\leq \frac{C_4^2}{4} \|f'_{II}\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 + \frac{C_4^2}{x_1^2} \|f_{II}\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 \\ &= (1 - \varepsilon) \|f'_{II}\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 + \frac{C_4^2}{x_1^2} \|f_{II}\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Суммируя неравенства (16) и (23), легко получить, что

$$\|Qf\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 \leq (1 - \varepsilon) \|f'\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2 + C_5 \|f\|_{L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})}^2, \quad (24)$$

где $C_5 = \max\{C_2^2, C_4^2 x_1^{-2}\}$. Эта оценка дает (6) с $c_1 = 1 - \varepsilon$ и $c_0 = C_5$.

Это означает, что оператор умножения Q сильно подчинен оператору $D_{X,\alpha}$. Следовательно, по теореме Като-Реллиха ([7, Теорема 4.1.9]) $n_\pm(D_X(Q)) = n_\pm(D_{X,\alpha})$. Осталось применить теорему 1. $\square$

Предложение 1. Пусть $|\mathcal{I}| = \infty$, т. е. $\mathcal{I} = \mathbb{R}_+$. Пусть также $Q(\cdot) = \text{diag}(Q_1(\cdot), Q_2(\cdot))$ с $Q_1(\cdot) \in L^\infty(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{p \times p})$, и неограниченной измеримой матрицей $Q_2(\cdot) \in \mathbb{C}^{p \times p}$, удовлетворяющей одному из условий либо (15), либо (22). Тогда оператор $D_{X,\alpha}(Q)$ самосопряженный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аналогично доказательству следствий 1 и 2, а также следует из аналога леммы 5.31 из [3]. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. On the spectral properties of Dirac operators with electrostatic δ -shell interactions / J. Behrndt, P. Exner, M. Holzmann, V. Lotoreichik // J. Math. Pures. – 2018. – V. 111. – P. 47–78.
2. On Dirac operators in $\mathbb{R}^3$ with electrostatic and Lorentz scalar δ -shell interactions / J. Behrndt, P. Exner, M. Holzmann, V. Lotoreichik // Quantum Stud.: Math. Found. – 2019. – P. 1–20.
3. Carlone R. On the spectral theory of Gesztesy-Seba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on discrete set / R. Carlone, M. Malamud, A. Posilicano // J. Differential Equations. – 2013. – V. 254. – P. 3835–3902.
4. Gesztesy F. New analytically solvable models of relativistic point interactions / F. Gesztesy, P. Šeba // Lett. Math. Phys. – 1987. – V. 13. – P. 345–358.
5. Thaller B. The Dirac Equation / B. Thaller – Berlin: Texts and Monographs in Physics, Springer, 1992. – 357 p.
6. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверию, Ф. Гестези, Р. Хёгг-Крон, Х. Хольден – Москва: МИР, 1991. – 568 с.
7. Бирман М. Ш. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк – Л.: Изд-во Леннингр. ун-та, 1980. – 264 с.
8. Будыка В. С. К спектральной теории одномерных матричных операторов Дирака с точечными матричными взаимодействиями / В. С. Будыка, М. М. Маламуд, А. Посиликано // ДАН. – 2018. – Т. 479, № 2. – С. 117–125.
9. Будыка В. С. Об операторах Дирака с δ' -взаимодействиями / В. С. Будыка // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки – 2019. – № 2. – С. 8–13.
10. Будыка В. С. Об индексах дефекта блочно-якобиевых матриц, связанных с операторами Дирака с точечными взаимодействиями / В. С. Будыка, М. М. Маламуд // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 6. – С. 675–679.
11. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: МИР, 1972. – 740 с.

Поступила в редакцию 27.08.2021 г.

REALIZATIONS OF THE DIRAC OPERATOR WITH UNBOUNDED MATRIX POTENTIAL Q AND
MAXIMUM DEFICIENCY INDICES

A. V. Agibalova, V. S. Budyka

In the paper we consider the matrix Dirac operator with point interactions and a nontrivial matrix potential. Conditions for the maximality of the deficiency indices of the this operator are obtained.

Keywords: Dirac operator, point interactions, unbounded matrix potential, deficiency indices.

Агибалова Анна Владимировна

кандидат физико-математических наук
ГОУ ВПО «Донецкий национальный универси-
тет», г. Донецк, ДНР
g.agibalova@donnu.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, ка-
федра математического анализа и дифференци-
альных уравнений

Agibalova Anna Vladimirovna

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

Будыка Виктория Сергеевна

кандидат физико-математических наук
ГОУ ВПО «Донецкая академия управления и го-
сударственной службы», г. Донецк, ДНР
budyka.vik@gmail.com
83001, ул. Челюскинцев, 157, 3-ий корпус ГОУ
ВПО «ДОНАУИГС», кафедра высшей математи-
ки

Budyka Viktoriya Sergeevna

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk Academy of Management and Public
Administration, Donetsk, DPR

УДК УДК 517.444

ЭЛЕМЕНТЫ НЕТРАДИЦИОННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

© 2021. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство размерности $n \geq 2$, $M(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ положительной лебеговой меры называется множеством Помпейю, если из условий $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\int_{g(A)} f(x) dx = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in M(n)$$

следует, что $f = 0$. Классическая проблема Помпейю состоит в описании всех множеств со свойством Помпейю. В работе приводится краткий обзор результатов по указанной проблеме и ее экстремальным аналогам. Показаны некоторые приложения этих результатов к вопросам анализа и теории функций.

Ключевые слова: интегрально-геометрические преобразования, преобразования Радона, преобразование Помпейю, экстремальные задачи.

§ 1. Введение. Пусть X – многообразие, $\mathcal{M}$ – некоторое семейство подмногообразий многообразия X . Интегрально-геометрические преобразования устанавливают соответствие между функциями f на X и функциями на $\mathcal{M}$, сопоставляя f их интегралы по подмногообразиям из $\mathcal{M}$. Основные задачи при изучении таких преобразований состоят в описании их образов и ядер, а также в построении формул обращения, восстанавливающих исходные объекты по их образам. Вопросы указанного типа часто встречаются в различных областях математики (дифференциальные уравнения, математическая физика, теория представлений и т.д.) и формируют одну из ветвей современного анализа, называемую интегральной геометрией (см. [1, 2]).

Классическая интегральная геометрия возникла из работ Г. Лоренца, Г. Минковского, П. Функа и И. Радона (1904–1917 г.). Эти авторы изучали оператор интегрирования по гиперплоскостям в евклидовом пространстве (преобразование Радона), а также некоторые его проективные аналоги (преобразование Минковского-Функа на сфере). Основное внимание в их работах уделялось нахождению явных формул обращения. Последующие исследования в этом направлении были связаны с различными обобщениями и модификациями классического преобразования Радона (лучевое (рентгеновское) преобразование, преобразование Радона по геодезическим, орисферическая версия преобразования Радона и др.). В настоящее время в этой области получено много глубоких и красивых результатов (см. [1, 2]).

В 1929 г. румынский математик Димитрий Помпейю опубликовал небольшую заметку [3], которая положила начало новому направлению в интегральной геометрии, называемому, следуя Л. Зальцману [4], нетрадиционной интегральной геометрией. Остановимся кратко на основных местах этой работы.

Рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$\lambda_{k1}a_1 + \lambda_{k2}a_2 + \dots + \lambda_{kn}a_n = A, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $a_1, \dots, a_n$ – неизвестные и определитель системы отличен от нуля. Предположим, что в каждом уравнении системы ровно p коэффициентов λ_{kj} равны единице, а остальные

равны нулю. Тогда

$$a_k = \frac{A}{p}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Дальнейшие рассуждения Д. Помпейю носят эвристический характер. Пусть φ – непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим разбиение Π плоскости $\mathbb{R}^2$ на квадраты малого диаметра прямыми, параллельными осям. Для любой области $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$, конгруэнтной области Ω , заменим приближенно интеграл

$$\iint_{\Omega'} \varphi(x, y) dx dy$$

интегральной суммой, соответствующей разбиению Π (в качестве промежуточных точек интегральной суммы выбираются узлы разбиения Π). Если предположить, что φ имеет один и тот же интеграл по всем областям, конгруэнтным Ω , то для интегральных сумм функции φ получаем приближенно систему вида (1). При этом, в качестве a_k берутся значения φ в узлах разбиения. Исходя из решения системы, естественно ожидать, что функция φ является постоянной. Таким образом, Д. Помпейю приходит к следующей задаче.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^2)$ и

$$\iint_{\Omega'} \varphi(x, y) dx dy = \text{const} \quad (2)$$

для любой области $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$, конгруэнтной области Ω . Верно ли, что φ является постоянной?

В дальнейшем рядом авторов было доказано, что это действительно так для широкого класса множеств Ω . Такие множества получили название множеств Помпейю, а проблему, состоящую в описании указанных множеств, стали называть проблемой Помпейю. Изучение этой проблемы, представляющей самостоятельный интерес, приобретает особое значение благодаря её многочисленным и глубоким связям с периодичностью в среднем, теорией гармонических функций, рядами экспонент, теорией аппроксимации, микролокальным анализом, с оценками плотности упаковок в комбинаторной геометрии, теорией меры, а также различными вопросами комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, интегральной геометрии и теории графов (см. [5–7]).

Настоящая статья содержит краткий обзор результатов по классической проблеме Помпейю и ее экстремальным аналогам. Показаны некоторые приложения этих результатов к вопросам анализа и теории функций. Отдельные аспекты указанного направления рассмотрены в монографиях [5–7], в которых можно найти дальнейшие ссылки на литературу.

§ 2. Различные определения множеств Помпейю. Задача, сформулированная в § 1, приводит к следующим определениям.

Определение 1. 1) Пусть A – компактное множество в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) положительной лебеговой меры или ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $M(n)$ – группа евклидовых движений $\mathbb{R}^n$. Множество A называется множеством Помпейю (или множеством со свойством Помпейю), если из условий $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\int_{g(A)} f(x) dx = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in M(n) \quad (3)$$

следует, что $f = 0$. Совокупность всех таких множеств будет обозначаться $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$. Элементы класса $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ называются также множествами с глобальным свойством Помпейю.

2) Отображение $f \rightarrow \mathcal{P}_A(f)$, где $\mathcal{P}_A(f)$ – функция на группе $M(n)$, определяемая равенством

$$\mathcal{P}_A(f)(g) = \int_{g(A)} f(x) dx, \quad g \in M(n),$$

называется преобразованием Помпейю, ассоциированным с множеством A . Множество

$$\text{Ker } \mathcal{P}_A = \{f : \mathcal{P}_A(f) = 0\}$$

называется ядром преобразования Помпейю.

Ясно, что множество A является множеством Помпейю тогда и только тогда, когда $\text{Ker } \mathcal{P}_A = \{0\}$, т.е. преобразование $\mathcal{P}_A$ инъективно.

Пусть χ_E – индикатор множества E , а $\check{\psi}$ – отражение функции ψ , т.е. $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$. Обозначим через $\text{SO}(n)$ группу вращений пространства $\mathbb{R}^n$.

Предложение 1. *Множество A является множеством Помпейю тогда и только тогда, когда бесконечная система уравнений свертки на $\mathbb{R}^n$*

$$\{f * \check{\chi}_{\tau(A)} = 0 : \tau \in \text{SO}(n)\}$$

имеет только нулевое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие любого элемента $g \in M(n)$ на вектор $y \in \mathbb{R}^n$ можно записать в виде $g(y) = \tau(y) + h$, где $\tau \in \text{SO}(n)$, $h \in \mathbb{R}^n$. Учитывая инвариантность меры Лебега относительно движений, получаем

$$\begin{aligned} \int_{g(A)} f(x) dx &= \int_A f(g(y)) dy = \int_A f(\tau(y) + h) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau(y) + h) \chi_A(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x + h) \chi_A(\tau^{-1}(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + h) \chi_{\tau(A)}(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(h - x) \chi_{\tau(A)}(-x) dx = (f * \check{\chi}_{\tau(A)})(h), \end{aligned}$$

откуда следует требуемое утверждение. $\square$

§ 3. Круги не являются множествами Помпейю. Рассматривая в работе [3] частный случай уравнения (2), Д. Помпейю анонсировал следующее, но как позже выяснилось, неверное утверждение: если $\varphi \in C(\mathbb{R}^2)$ и

$$\iint_K \varphi(x, y) dx dy = \text{const}$$

для любого круга $K \subset \mathbb{R}^2$ фиксированного радиуса r , то φ является постоянной. Ошибочное доказательство этого утверждения было опубликовано в работе [8].

Желая обобщить результат Д. Помпейю, в работе [9] М. Николеску приводит следующее (также неверное) утверждение: если функция f вещественно аналитическая на $\mathbb{R}^2$, то справедлива формула обращения

$$f = \mu_r + b_1 \Delta \mu_r + b_2 \Delta^2 \mu_r + \dots + b_n \Delta^n \mu_r + \dots,$$

где $b_1, b_2, \dots$ – некоторые константы, Δ – оператор Лапласа,

$$\mu_r(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{(u-x)^2 + (v-y)^2 \leq r^2} f(u, v) du dv;$$

в частности, если μ_r является m -гармонической (т.е. $\Delta^m \mu_r = 0$), то f является m -гармонической.

То, что круги не обладают свойством Помпейю, было впервые отмечено Л. Чакаловым [10] (см. также [11]), хотя примеры ненулевых функций с нулевыми интегралами по всем окружностям фиксированного радиуса на $\mathbb{R}^2$ были построены И. Радоном [12] еще в 1917 г. (см. § 4 ниже).

Предложение 2 (L. Chakalov [10], 1944). *Имеет место равенство*

$$\iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 1} \sin \beta x dx dy = 2\pi \frac{\sin \beta a}{\beta} J_1(\beta) = 2\pi \sin(\beta a) \mathbf{I}_1(\beta),$$

где J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν , $\mathbf{I}_\nu(z) = J_\nu(z)/z^\nu$. В частности, если $\mathbf{I}_1(\beta) = 0$, то функция $f(x, y) = \sin \beta x$ имеет нулевые интегралы по всем кругам единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записывая интеграл от функции f по кругу в виде повторного, имеем

$$\begin{aligned} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 1} \sin \beta x dx dy &= \int_{a-1}^{a+1} dx \int_{b-\sqrt{1-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{1-(x-a)^2}} \sin \beta x dy = 2 \int_{a-1}^{a+1} \sin \beta x \sqrt{1-(x-a)^2} dx = \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sin \beta(t+a) \sqrt{1-t^2} dt = 2 \cos \beta a \int_{-1}^1 \sin \beta t \sqrt{1-t^2} dt + \\ &+ 2 \sin \beta a \int_{-1}^1 \cos \beta t \sqrt{1-t^2} dt = 4 \sin \beta a \int_0^1 \cos \beta t \sqrt{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

Используя интегральное представление Пуассона для бесселевых функций, получаем требуемое. $\square$

Предложение 2 показывает, что отмеченные выше утверждения Д. Помпейю и М. Николеску неверны.

§ 4. Аналог задачи Помпейю для окружностей. Мотивированный работами Д. Помпейю, М. Николеску приводит в работе [13] следующее ошибочное утверждение, касающееся интегралов по окружностям фиксированного радиуса: если вещественнозначная функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^n(\mathbb{R}^2)$ при некотором $n \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$ фиксировано, и функция

$$v_n(x, y, r) = \int_0^{2\pi} u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) e^{in\theta} d\theta$$

не зависит от (x, y) , то $u(x, y)$ является решением дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x, y) = \text{const};$$

в частности, если $u \in C(\mathbb{R}^2)$ и u имеет постоянные интегралы по всем окружностям фиксированного радиуса, то $u = \text{const}$.

Невозможность такого результата следует из работы И. Радона, опубликованной еще в 1917 г. (см. [12, раздел С]).

Предложение 3 (J. Radon [12], 1917). Пусть $r > 0$ фиксировано, λr – произвольный положительный нуль функции Бесселя J_0 . Тогда при любом $k \in \mathbb{Z}_+$ функция

$$f(z) = J_k(\lambda \rho) e^{ik\varphi} \quad (\rho, \varphi - \text{полярные координаты } z)$$

имеет нулевые интегралы по всем окружностям радиуса r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $S_r(a; b)$ окружность радиуса r с центром в точке $(a; b)$. Имеем

$$\int_{S_r(a; b)} f(z) |dz| = r \int_0^{2\pi} \mathbf{I}_k(\lambda \sqrt{r^2 + 2r(a \cos t + b \sin t) + a^2 + b^2}) (\lambda r e^{it} + \lambda(a + ib))^k dt.$$

Положим

$$\frac{a + ib}{\sqrt{a^2 + b^2}} = e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{S_r(a; b)} f(z) |dz| = \\ &= r \int_0^{2\pi} \mathbf{I}_k(\lambda \sqrt{r^2 + 2r\sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \alpha) + a^2 + b^2}) (\lambda r e^{it} + \lambda e^{i\alpha} \sqrt{a^2 + b^2})^k dt = \\ &= r e^{i\alpha k} \int_0^{2\pi} \mathbf{I}_k(\lambda \sqrt{r^2 + 2r\sqrt{a^2 + b^2} \cos \psi + a^2 + b^2}) (\lambda r e^{i\psi} + \lambda \sqrt{a^2 + b^2})^k d\psi = \\ &= r e^{i\alpha k} \int_0^{2\pi} \mathbf{I}_k(\lambda \sqrt{r^2 - 2r\sqrt{a^2 + b^2} \cos \varphi + a^2 + b^2}) (\lambda \sqrt{a^2 + b^2} - \lambda r e^{-i\varphi})^k d\varphi. \end{aligned}$$

Согласно интегральной теореме Графа для функций Бесселя (см. [14, гл. 7, п. 7.6, формула (5)])

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \mathbf{I}_k(\lambda \sqrt{r^2 - 2r\sqrt{a^2 + b^2} \cos \varphi + a^2 + b^2}) (\lambda \sqrt{a^2 + b^2} - \lambda r e^{-i\varphi})^k d\varphi = \\ &= 2\pi J_k(\lambda \sqrt{a^2 + b^2}) J_0(\lambda r). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{S_r(a; b)} f(z) |dz| = 2\pi r J_0(\lambda r) f(a, b),$$

откуда получаем требуемое утверждение. $\square$

§ 5. Другие примеры множеств без свойства Помпейю. Используя замену переменных в двойном интеграле, из предложения 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $r > 0$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Тогда

$$\iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2} \sin x dx dy = 2\pi r (\sin a) J_1(r).$$

В частности, функция $f(x, y) = \sin x$ имеет нулевые интегралы по всем кругам с радиусами $r_1, r_2, \dots$, где $0 < r_1 < r_2 < \dots$ – последовательность всех положительных нулей функции Бесселя J_1 .

Пример 1 (S.A. Williams [15], 1976). Выберем открытые круги $B_1, B_2, \dots, B_m$ с непересекающимися замыканиями, которые все содержатся в большом открытом круге B . Если радиусы всех этих кругов являются нулями функции J_1 , то следствие 1 показывает, что многосвязная область $B \setminus (\overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \dots \cup \overline{B_m})$ не обладает свойством Помпейю. В частности, если $m = 1$ и $\overline{B_1}$ касается границы круга B , то односвязная область $B \setminus \overline{B_1}$ не является множеством Помпейю.

Пример 2. Пусть Ω – открытое ограниченное множество без свойства Помпейю. Если удалить из него (относительно) замкнутое множество нулевой лебеговой меры, то очевидно получим множество без свойства Помпейю.

§ 6. Пример Федербуша. Федербуш (Federbush) построил более сложный пример множества без свойства Помпейю (см. [15]).

Пусть $r < R$, причем эти числа являются положительными нулями функции J_1 . Рассмотрим два шара B_1 и B_2 радиуса R , границы которых пересекаются по $(n - 2)$ -мерной сфере радиуса r . Пусть B – единственный шар радиуса r , граница которого содержит указанную $(n - 2)$ -мерную сферу. Рассмотрим множество E , индикатор которого определяется равенством $\chi_E = \chi_{B_1} + \chi_{B_2} - \chi_B$. Тогда следствие 1 показывает, что E не является множеством Помпейю.

§ 7. Теорема Помпейю и ее обобщения. Один из самых простых случаев при исследовании уравнения (2) возникает, когда Ω является квадратом.

Теорема 1 (D. Pompeiu [16], 1929). Пусть Q – квадрат на $\mathbb{R}^2$ и функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\iint_{Q'} f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x, y) dx dy$ для любого квадрата Q' на $\mathbb{R}^2$, конгруэнтного квадрату Q ;
- 2) существует конечный предел $\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} f(x, y)$.

Тогда f является постоянной на $\mathbb{R}^2$.

Легко установить более сильное утверждение.

Теорема 2. Пусть $A = [0, 1] \times [0, 1]$ и функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\iint_{A+h} f(x, y) dx dy = 0$ для любого $h \in \mathbb{R}^2$;
- 2) существует $\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} c$.

Тогда $f \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = (h_1, h_2)$. По условию

$$\int_{h_1}^{h_1+1} dx \int_{h_2}^{h_2+1} f(x, y) dy = 0 \quad \text{для любых } h_1, h_2 \in \mathbb{R}.$$

Дифференцируя это соотношение по h_1 , получаем

$$\int_{h_2}^{h_2+1} f(h_1 + 1, y) dy - \int_{h_2}^{h_2+1} f(h_1, y) dy = 0.$$

Теперь дифференцируя по h_2 , приходим к равенству

$$f(h_1 + 1, h_2 + 1) - f(h_1 + 1, h_2) - f(h_1, h_2 + 1) + f(h_1, h_2) = 0.$$

В этом рассуждении вместо A можно брать любой квадрат mA , $m \in \mathbb{N}$, так как интегралы по ним также равны нулю. Поэтому

$$f(x, y) = f(x + m, y) + f(x, y + m) - f(x + m, y + m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Устремим здесь $m \rightarrow +\infty$. Тогда в силу второго условия теоремы имеем $f(x, y) = c$. Учитывая первое условие теоремы, отсюда получаем $c = 0$ и $f \equiv 0$. $\square$

Замечание 1. Пусть $f(x, y) = \sin 2\pi x$. Тогда

$$\iint_{A+h} f(x, y) dx dy = 0 \quad \text{для всех } h \in \mathbb{R}^2,$$

поскольку

$$\int_{h_1}^{h_1+1} dx \int_{h_2}^{h_2+1} \sin 2\pi x dy = \int_{h_1}^{h_1+1} \sin 2\pi x dx = \int_0^1 \sin 2\pi x dx = -\frac{\cos 2\pi x}{2\pi} \Big|_0^1 = 0.$$

Таким образом, второе условие в теореме 2 нельзя заменить на условие ограниченности функции f .

Другим обобщением теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 3 (В.В. Произволов [11], 1977). Пусть функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет условиям: 1) f имеет нулевой интеграл по любому единичному квадрату на $\mathbb{R}^2$; 2) f ограничена на $\mathbb{R}^2$. Тогда $f \equiv 0$.

Отметим, что еще в 1948 году Х. Христов [17] показал, что теорема 3 справедлива и без условия ограниченности f (см. ниже теорему 7).

В работе [18] было получено следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 4 (L. Brown, F. Schnitzer, A.L. Shields [18], 1968). Пусть μ и ν – произвольные ненулевые комплексные меры с компактными носителями на вещественной оси. Предположим, что функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существует $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y)$;

2) для любых $s, t \in \mathbb{R}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x + s, y + t) d\mu(x) d\nu(y) = 0.$$

Тогда $f \equiv \text{const}$. Далее, если

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu \neq 0 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}} d\nu \neq 0,$$

то $f \equiv 0$.

Отметим также, что задача о существовании ненулевых интегрируемых по Лебегу функций, имеющих нулевые интегралы по всем сдвигам фиксированного квадрата легко решается с помощью свойств преобразования Фурье.

Теорема 5. Пусть $A = [0, 1] \times [0, 1]$, $f \in L(\mathbb{R}^2)$ и

$$\iint_{A+h} f(x, y) dx dy = 0$$

для любого $h \in \mathbb{R}^2$. Тогда f – нулевая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению свертки и условию теоремы имеем

$$\begin{aligned} f * \chi_A(h) &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(\xi) f(h - \xi) d\xi = \int_A f(h - \xi) d\xi = \\ &= \int_{h-A} f(\eta) d\eta = \int_{A+h'} f(\eta) d\eta = 0, \end{aligned}$$

где $h \in \mathbb{R}^2$, $h' = h + (-1, -1)$. Переходя в этом равенстве к преобразованию Фурье, получаем $\widehat{f} \widehat{\chi}_A = 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_A(u, v) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_A(x, y) e^{-i(xu+yv)} dx dy = \\ &= \iint_A e^{-i(xu+yv)} dx dy = \int_0^1 e^{-ixu} dx \int_0^1 e^{-iyv} dy = \\ &= \frac{(1 - e^{-iu})}{iu} \frac{(1 - e^{-iv})}{iv}, \end{aligned}$$

то $\widehat{f}(u, v)(1 - e^{-iu})(1 - e^{-iv}) = 0$. Учитывая непрерывность преобразования Фурье, заключаем, что $\widehat{f} \equiv 0$, откуда $f = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$. $\square$

§ 8. Первые примеры множеств Помпейю. После примера Л. Чакалова [10] естественно было исследовать единственность решения уравнения (2) для случая кругового сектора. Это было сделано Л. Илиевым [19] в 1946 г.

Теорема 6 (L. Ilieff [19], 1946). *Круговой сектор в $\mathbb{R}^2$ является множеством Помпейю.*

Отметим, что гораздо позже Г. Сзабо [20] получил подобный результат для полукруга.

Теорема 1 не дает ответа на вопрос о единственности решения уравнения (2) для случая квадрата. Однако позже было показано (см. [21], [17], [22]), что второе условие в теореме 1 является несущественным.

Теорема 7 (Chr. Christov [17], 1948; Малюгин [22], 1978). *Квадрат на плоскости (куб в $\mathbb{R}^n$) являются множествами Помпейю.*

В работе [23] был рассмотрен случай равнобедренной трапеции (треугольника) специального вида.

Теорема 8 (L. Ilieff [23], 1948). *Равнобедренная трапеция (или треугольник), угол у основания которых несоизмерим с прямым углом являются множествами Помпейю.*

В дальнейшем были получены обобщения этих результатов.

Теорема 9 (L. Ilieff [24], 1949). *Любой треугольник на плоскости является множеством Помпейю.*

Теорема 10 (Chr. Christov [25], 1949). *Любой параллелограмм на плоскости является множеством Помпейю.*

Отметим, что теорема 10 очевидным образом влечет теоремы 9 и 8.

Теоремы 6–10 являются следствием общего результата С.А. Вильямса [15], опубликованного в 1976 году (см. § 20 ниже).

§ 9. Критерий множества Помпейю в терминах преобразования Фурье. В семидесятых годах 20 века начался новый этап в изучении множеств Помпейю. Следующий результат послужил основой для многих дальнейших исследований в этой области.

Теорема 11 (L. Brown, B.M. Schreiber, B.A. Taylor [26], 1973). *Ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является множеством Помпейю тогда и только тогда, когда комплексифицированное преобразование Фурье индикатора множества Ω , т.е. функция*

$$\widehat{\chi}_{\Omega}(z_1, \dots, z_n) = \int_{\Omega} e^{-i(z_1 x_1 + \dots + z_n x_n)} dx_1 \dots dx_n, \quad z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C},$$

не является тождественным нулем на любом множестве

$$M_{\alpha} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + \dots + z_n^2 = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Таким образом, Ω не является множеством Помпейю тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, такое что $\widehat{\chi}_{\Omega}(z_1, \dots, z_n) \equiv 0$ на M_{α} .

Теорема 12 (С.А. Berenstein [27], 1980). *Ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является множеством Помпейю тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{\chi}_{\Omega} \Big|_{M_{\alpha}} \not\equiv 0 \quad \text{для любого} \quad \alpha > 0.$$

Первоначальное доказательство теоремы 11 основано на теореме о спектральном синтезе. Другое доказательство было получено В.В. Волчковым в [28], [29].

§ 10. Критерий множества Помпейю, связанный с уравнением $\Delta T + \alpha T = -\chi_D$. Пусть $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – класс распределений в $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями, D – непустое открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Теорема 13 (L. Brown, B.M. Schreiber, B.A. Taylor). *Множество D не имеет свойство Помпейю тогда и только тогда, когда существуют $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, такие что*

$$\Delta T + \alpha T = -\chi_D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D не имеет свойство Помпейю. Тогда по теореме 11 существует $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, такое что $\widehat{\chi}_D \equiv 0$ на M_{α} . Можно показать (см. [15]), что это влечет целостность функции

$$U(z_1, \dots, z_n) = \frac{\widehat{\chi}_D(z_1, \dots, z_n)}{z_1^2 + \dots + z_n^2 - \alpha}.$$

Отсюда по теореме Пэли-Винера-Шварца существует распределение $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, такое что $\widehat{T} = U$. При этом

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta T}(z) + \alpha \widehat{T}(z) &= (-z_1^2 - \dots - z_n^2 + \alpha) \widehat{T}(z) = \\ &= -(z_1^2 + \dots + z_n^2 - \alpha) U(z) = -\widehat{\chi}_D(z),\end{aligned}$$

а значит, $\Delta T + \alpha T = -\chi_D$.

Обратно, если существуют $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, такие что $\Delta T + \alpha T = -\chi_D$, то

$$\widehat{\chi}_D(z) = -(\widehat{\Delta T}(z) + \alpha \widehat{T}(z)) = (z_1^2 + \dots + z_n^2 - \alpha) \widehat{T}(z).$$

Поэтому $\widehat{\chi}_D$ является тождественным нулем на M_α , и по теореме 11 множество D не имеет свойство Помпейю. $\square$

Теорема 14 (S.A. Williams [15], 1976). *Любое решение $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ уравнения*

$$\Delta T + \alpha T = -\chi_D \quad (\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

является функцией с компактным носителем. Эта функция обладает следующими свойствами.

1) *После переопределения, если необходимо, на множестве нулевой меры функция T определяется равенством*

$$T(x) = - \int_D \gamma(|x - y|) dy, \quad (4)$$

где

$$\gamma(r) = \frac{(\sqrt{\alpha})^{(n-2)/2}}{2^{n/2+1} \pi^{n/2-1}} r^{-(n-2)/2} N_{(n-2)/2}(r\sqrt{\alpha}), \quad r > 0,$$

$\sqrt{\alpha}$ – любое значение корня из α , N_β – функция Неймана порядка β .

2) *Функция T является вещественно аналитической в D , где удовлетворяет уравнению $\Delta T + \alpha T = -1$ в классическом смысле.*

3) *Функция T вещественно аналитична в дополнении к $\overline{D}$, где удовлетворяет уравнению $\Delta T + \alpha T = 0$ в классическом смысле.*

4) *Функция T является тождественным нулем на единственной неограниченной компоненте дополнения к $\overline{D}$.*

5) *Функция T принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^n)$, причем производные первого порядка можно находить дифференцированием под знаком интеграла.*

Далее класс всех вещественно аналитических в D функций будем обозначать $RA(D)$.

Определение 2. Пусть $\partial^* D$ – подмножество ∂D , которое лежит в замыкании неограниченной (связной) компоненты множества $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$. Множество $\partial^* D$ называется внешней границей множества D .

Например, внешней границей кольца $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ на плоскости является окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$.

Далее, по известной теореме Жордана-Лебега-Брауэра, всякое $(n - 1)$ -мерное подмногообразие B в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфное сфере, разбивает пространство на две связные компоненты и является их общей границей. Если D – ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^n \setminus B$ (отметим, что при $n \geq 3$ она, вообще говоря, не гомеоморфна шару), то $\partial^* D = B = \partial D$.

Теорема 15 (S.A. Williams [30], 1981). Если открытое ограниченное множество $D \subset \mathbb{R}^n$ не имеет свойства Помпейю и $\partial^* D = \partial D$, то любое число $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которого существует $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ с условием $\Delta T + \alpha T = -\chi_D$, является вещественным положительным числом.

Следствие 2. Пусть D – непустое открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ и $\partial^* D = \partial D$. Множество D не имеет свойства Помпейю тогда и только тогда, когда существуют $\alpha > 0$ и функция $T \in C^1(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем, такие что

$$\Delta T + \alpha T = -\chi_D.$$

§ 11. Критерий множества Помпейю, связанный с переопределенной граничной задачей Неймана. Пусть D – непустое открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Из теорем 13 и 14 имеем такое утверждение.

Следствие 3 (S.A. Williams [15], 1976). Пусть граница ∂D является гладкой, гомотопна единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ и D не имеет свойства Помпейю. Тогда существуют $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и функция T , такие что

$$\Delta T + \alpha T = -1 \quad \text{на} \quad D, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} \Big|_{\partial D} = 0 \quad \text{и} \quad T \Big|_{\partial D} = 0, \quad (6)$$

где, как обычно, $\frac{\partial T}{\partial \nu}$ – производная по направлению внешней нормали к границе D .

В работе [15] отмечено, что на самом деле число α в этом утверждении является вещественным (см. также теорему 15 и следствие 2).

Замечание 2. Полагая $U = c(\alpha T + 1)$, $c \neq 0$, легко видеть, что задача (5)–(6) эквивалентна следующей задаче:

$$\Delta U + \alpha U = 0 \quad \text{на} \quad D, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} \Big|_{\partial D} = 0 \quad \text{и} \quad U \Big|_{\partial D} = c. \quad (8)$$

Для задачи (7)–(8) в работе [27] К.А. Беренштейн получил следующий результат (см. также [31], [32]).

Теорема 16 (C.A. Berenstein [27], 1980). Пусть Ω – открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ с границей Липшица и дополнение к $\overline{\Omega}$ является связным. Тогда Ω не имеет свойства Помпейю тогда и только тогда, когда существует постоянная $\alpha > 0$ и функция U на Ω , удовлетворяющая следующей переопределенной граничной задаче Неймана:

$$\Delta U + \alpha U = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad \text{и} \quad U \Big|_{\partial \Omega} = 1. \quad (10)$$

Отметим, что в этом утверждении задачу (9)–(10) (или (5)–(6)) можно заменить задачей вида

$$\Delta U + \alpha U = 1 \quad \text{на} \quad \Omega, \quad (11)$$

$$\nabla U \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad \text{и} \quad U \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (12)$$

где ∇U – градиент функции U .

§ 12. Критерий множества Помпейю в терминах аппроксимации индикаторами. В работе [33] доказано, что решения уравнения $\Delta U + U = 0$ характеризуются наличием нулевых интегралов по всем шарам из $\mathbb{R}^n$, радиусы которых принадлежат множеству нулей бесселевой функции $J_{n/2}$. Этот результат позволил получить решение проблемы Помпейю на классе функций медленного роста в терминах аппроксимации в $L(\mathbb{R}^n)$ линейными комбинациями индикаторов шаров со специальными радиусами.

Теорема 17 (В.В. Волчков [33], 1993). Пусть A – компактное множество в $\mathbb{R}^n$ положительной лебеговой меры. Для того чтобы существовала ненулевая функция медленного роста с нулевыми интегралами по всем множествам из $\mathbb{R}^n$ конгруэнтным A , необходимо и достаточно, чтобы индикатор A был пределом в $L(\mathbb{R}^n)$ последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров с радиусами, пропорциональными положительным корням $J_{n/2}$. При этом коэффициент пропорциональности один и тот же для всех шаров и зависит только от A .

Отметим, что для компактов A с гладкой границей ограничение на рост функции в условиях теоремы 17 можно убрать.

§ 13. Достаточное условие принадлежности $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ в терминах нормали к границе. В 1999 году Р. Далмассо обнаружил интересные свойства нормали к границе области, на которой переопределенная задача (9)–(10) допускает решение.

Теорема 18 (Р. Далмассо [34], [35], 1999–2000). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – непустое открытое ограниченное множество, такое что $\partial\Omega \in C^2$ и дополнение к $\bar{\Omega}$ является связным. Предположим, что задача (9)–(10) имеет решение $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\partial\Omega} \nu_j^2(x)(x-y) \cdot \nu(x) ds = \int_{\partial\Omega} \nu_k^2(x)(x-y) \cdot \nu(x) ds, \quad j, k \in \{1, \dots, n\},$$

и

$$\int_{\partial\Omega} \nu_j(x)\nu_k(x)(x-y) \cdot \nu(x) ds = 0, \quad j \neq k,$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, ds – элемент площади, а символ $u \cdot v$ обозначает скалярное произведение векторов. В частности, если хотя бы одно из этих равенств не выполнено при некотором $y \in \mathbb{R}^n$, то Ω является множеством Помпейю.

В двумерном случае указанный результат можно переформулировать следующим образом.

Теорема 19 (Р. Далмассо [34], [35], 1999–2000). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – непустое ограниченное открытое множество, такое что $\partial\Omega$ принадлежит классу C^2 и дополнение к $\bar{\Omega}$ является связным. Предположим, что задача (9)–(10) имеет решение $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^2$

$$\int_{\partial\Omega} (\nu_1(x) + i\nu_2(x))^2(x-y) \cdot \nu(x) ds = 0,$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, ds – элемент длины на $\partial\Omega$. В частности, если это равенство не выполнено при некотором $y \in \mathbb{R}^2$, то Ω является множеством Помпейю.

Выпишем соотношение из теоремы 19 при $y = 0$ для произвольной параметризации границы $\partial\Omega$.

Следствие 4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – непустое ограниченное открытое множество, такое что $\partial\Omega$ принадлежит классу C^2 и дополнение к Ω является связным. Предположим, что

$$\int_a^b \frac{(x_2'(t))^2 - 2ix_1'(t)x_2'(t) - (x_1'(t))^2}{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} (x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)) dt \neq 0,$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a, b]$ – параметризация границы $\partial\Omega$. Тогда Ω является множеством Помпейю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau(t)$ – единичный вектор касательной к $\partial\Omega$. Тогда

$$\tau'(t) = \frac{x'(t)}{|x'(t)|} = \frac{x_1'(t) + ix_2'(t)}{\sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2}},$$

$$\nu(t) = \nu_1(t) + i\nu_2(t) = -i \frac{x'(t)}{|x'(t)|} = \frac{x_2'(t) - ix_1'(t)}{\sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2}}.$$

Отсюда находим

$$(\nu_1(t) + i\nu_2(t))^2 = \frac{(x_2'(t))^2 - 2ix_1'(t)x_2'(t) - (x_1'(t))^2}{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2},$$

$$x \cdot \nu(x) = x_1(t)\nu_1(t) + x_2(t)\nu_2(t) = \frac{x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)}{\sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2}}.$$

Учитывая, что $ds = \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} dt$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} (\nu_1(x) + i\nu_2(x))^2 x \cdot \nu(x) ds = \\ &= \int_a^b \frac{(x_2'(t))^2 - 2ix_1'(t)x_2'(t) - (x_1'(t))^2}{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} (x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)) dt \neq 0. \end{aligned}$$

Значит, в силу теоремы 19, множество Ω обладает свойством Помпейю. $\square$

Следствие 5. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – непустое ограниченное открытое множество, такое что $\partial\Omega$ принадлежит классу C^2 и дополнение к Ω является связным. Предположим, что $\partial\Omega$ имеет в полярных координатах параметризацию $\rho = \rho(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, и

$$\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) \frac{\rho(\theta) - i\rho'(\theta)}{\rho(\theta) + i\rho'(\theta)} e^{2i\theta} d\theta \neq 0.$$

Тогда Ω является множеством Помпейю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В декартовых координатах параметризация $\partial\Omega$ имеет вид

$$x_1(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta, \quad x_2(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Отсюда находим

$$x_1'(\theta) = \rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta, \quad x_2'(\theta) = \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta,$$

$$(x_1'(\theta))^2 + (x_2'(\theta))^2 = \rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2, \quad x_1(\theta)x_2'(\theta) - x_2(\theta)x_1'(\theta) = \rho^2(\theta),$$

$$(x_2'(\theta))^2 - 2ix_1'(\theta)x_2'(\theta) - (x_1'(\theta))^2 = e^{2i\theta}(\rho(\theta) - i\rho'(\theta))^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{(x'_2(\theta))^2 - 2ix'_1(\theta)x'_2(\theta) - (x'_1(\theta))^2}{(x'_1(\theta))^2 + (x'_2(\theta))^2} (x_1(\theta)x'_2(\theta) - x_2(\theta)x'_1(\theta))d\theta = \\ & = \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) \frac{(\rho(\theta) - i\rho'(\theta))^2}{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} e^{2i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) \frac{\rho(\theta) - i\rho'(\theta)}{\rho(\theta) + i\rho'(\theta)} e^{2i\theta} d\theta \neq 0. \end{aligned}$$

Используя теперь следствие 4, получаем требуемое утверждение. $\square$

§ 14. Гипотеза Рэлей-Шиффера. Следуя [36], введем следующее определение.

Определение 3. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Липшица и дополнение к $\overline{\Omega}$ является связным. Область Ω называется множеством Шиффера (M. Schiffer set), если для любого $\alpha > 0$ граничная задача (9)–(10) не имеет решения.

Из теоремы 16 имеем такое утверждение.

Следствие 6. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Липшица и дополнение к $\overline{\Omega}$ является связным. Область Ω является множеством Шиффера тогда и только тогда, когда Ω является множеством Помпейю.

Следующее предположение, эквивалентное гипотезе 5 ниже, наиболее известно в математике, как гипотеза М. Шиффера в спектральной теории (см., например, [37, проблема 80]).

Гипотеза 1. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Липшица и дополнение к $\overline{\Omega}$ является связным. Если Ω не является множеством Шиффера, то $\overline{\Omega}$ является шаром.

Отметим, что указанная гипотеза в несколько ином виде появилась еще в 1877 году. Ее выдвинул известный физик Д.У. Стретт (третий барон Рэлей, более известный как лорд Рэйли) (см. [38]). В связи с этим она называется также гипотезой Рэлей.

§ 15. Проблема Помпейю. Как уже отмечалось, классическая проблема Помпейю состоит в описании всех множеств со свойством Помпейю. Эта проблема конкретизировалась в дальнейших исследованиях. Приведем хорошо известные постановки (см. [15, 32, 39, 40]).

Гипотеза 2. Исключая круг, любая ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^2$ с вещественно аналитической границей является множеством Помпейю.

Гипотеза 3 (S.A. Williams [15], 1976). Пусть D – непустое открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Если граница ∂D гомеоморфна единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, то D имеет свойство Помпейю тогда и только тогда, когда D не является шаром. В частности, любая жорданова область в $\mathbb{R}^2$, отличная от круга, является множеством Помпейю.

Гипотеза 4 (N. Garofalo, F. Segala [39], 1991). Исключая круг, любая ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$ с вещественно аналитической границей является множеством Помпейю.

Гипотеза 5. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, множество $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ является связным и Ω не является множеством Помпейю. Тогда $\overline{\Omega}$ является шаром.

Сформулированные выше результаты дают основания для справедливости этих гипотез. Исключительность круга (шара) состоит в том, что в уравнении (3) в этом случае используется не вся группа движений, а лишь группа сдвигов. Если же A не является

шаром, то применение условия (3) для элементов группы вращений накладывает на f существенные дополнительные ограничения.

Теоремы 11–18 дали мощные средства для изучения проблемы Помпейю. Ниже приводятся некоторые из результатов, которые можно получить с их помощью.

§ 16. Случай параллелепипеда. Используя теорему 11, нетрудно установить сформулированную выше теорему 7.

Теорема 20. Координатный параллелепипед A в пространстве $\mathbb{R}^n$ является множеством Помпейю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = [-a_1, a_1] \times \cdots \times [-a_n, a_n]$. Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}_A(z_1, \dots, z_n) &= \int_A e^{-i(z_1 x_1 + \cdots + z_n x_n)} dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{-a_1}^{a_1} e^{-ia_1 x_1} dx_1 \cdots \int_{-a_n}^{a_n} e^{-iz_n x_n} dx_n = \frac{2^n \sin(a_1 z_1) \dots \sin(a_n z_n)}{z_1 \dots z_n}.\end{aligned}$$

Предположим, что

$$\widehat{\chi}_A|_{M_\alpha} \equiv 0 \quad \text{при некотором } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Тогда приходим к противоречивому соотношению

$$\frac{\sin(a_1 z_1) \dots \sin(a_{n-1} z_{n-1})}{z_1 \dots z_{n-1}} \frac{\sin(a_n \sqrt{\alpha - z_1^2 - \cdots - z_{n-1}^2})}{\sqrt{\alpha - z_1^2 - \cdots - z_{n-1}^2}} \equiv 0 \quad \text{в } \mathbb{C}^{n-1}.$$

Итак, $\widehat{\chi}_A|_{M_\alpha} \not\equiv 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. По теореме 11 получаем требуемое. $\square$

Отметим, что доказательство теоремы 20, основанное на рядах Фурье, содержится в монографии [6, часть 4].

§ 17. Случай эллипсоида. Более сорока лет было неизвестно, является ли эллипс множеством Помпейю. Теорема 11 позволяет легко дать ответ на этот вопрос.

Теорема 21 (L. Brown, B.M. Schreiber, B.A. Taylor [26], 1973). Любой эллипсоид в $\mathbb{R}^n$, отличный от шара, является множеством Помпейю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим двумерный случай. При $n \geq 3$ рассуждения аналогичны. Пусть

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Сделаем в интеграле

$$\widehat{\chi}_\Omega(z_1, z_2) = \iint_{\Omega} e^{-i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} dx_1 dx_2$$

замену переменных $x_1 = ay_1$, $x_2 = by_2$. Якобиан этого отображения равен ab , поэтому

$$\widehat{\chi}_\Omega(z_1, z_2) = ab \iint_{y_1^2 + y_2^2 \leq 1} e^{-i(az_1 y_1 + bz_2 y_2)} dy_1 dy_2.$$

Интеграл справа является преобразованием Фурье индикатора единичного круга. Значит,

$$\widehat{\chi}_\Omega(z_1, z_2) = 2\pi ab \frac{J_1(\sqrt{a^2 z_1^2 + b^2 z_2^2})}{\sqrt{a^2 z_1^2 + b^2 z_2^2}} = 2\pi ab \mathbf{I}_1(\sqrt{a^2 z_1^2 + b^2 z_2^2}).$$

Предположим, что

$$\widehat{\chi}_\Omega \Big|_{M_\alpha} \equiv 0 \quad \text{при некотором} \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Тогда

$$\mathbf{I}_1(\sqrt{a^2 z_1^2 + b^2(\alpha - z_1^2)}) = \mathbf{I}_1(\sqrt{(a^2 - b^2)z_1^2 + b^2\alpha}) = 0 \quad \text{для всех} \quad z_1 \in \mathbb{C}.$$

Поскольку $a \neq b$, то уравнение

$$\sqrt{(a^2 - b^2)z_1^2 + b^2\alpha} = w$$

имеет решение $z_1 \in \mathbb{C}$ для любого $w \in \mathbb{C}$. Отсюда следует, что $\mathbf{I}_1(w) \equiv 0$ на $\mathbb{C}$. Противоречие. Итак, $\widehat{\chi}_\Omega \Big|_{M_\alpha} \not\equiv 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. По теореме 11 получаем требуемое. $\square$

Р. Далмассо [35] получил доказательство теоремы 21 с помощью теоремы 18. Приведем модификацию его доказательства для случая эллипса.

Запишем параметризацию границы эллипса Ω в виде

$$x_1(t) = a \cos t, \quad x_2(t) = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{(x_2'(t))^2 - 2ix_1'(t)x_2'(t) - (x_1'(t))^2}{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} (x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)) dt = \\ &= ab \int_0^{2\pi} \frac{b^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t + 2iab \sin t \cos t}{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= ab \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t}{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt = 2ab \int_0^{\pi} \frac{b^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t}{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

Представим теперь I в виде

$$\begin{aligned} I &= 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{b^2 \sin^2 t - a^2 \cos^2 t}{b^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{b^2 \operatorname{tg}^2 t - a^2}{b^2 \operatorname{tg}^2 t + a^2} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t} d(\operatorname{tg} t) = \\ &= \frac{2a}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^2 x^2 - a^2}{(x^2 + \frac{a^2}{b^2})(x^2 + 1)} dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{b^2 z^2 - a^2}{(z - i)(z + i)(z - i\frac{a}{b})(z + i\frac{a}{b})}.$$

Используя известную формулу для вычисления интеграла от рациональной дроби с помощью вычетов, получаем

$$I = \frac{4\pi ia}{b} \left(\operatorname{res}_{z=i} f(z) + \operatorname{res}_{z=i\frac{a}{b}} f(z) \right).$$

Поскольку точки i и ia/b являются простыми полюсами функции f , легко находим, что

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \frac{ib^2(a^2 + b^2)}{2(a^2 - b^2)}, \quad \operatorname{res}_{z=ia/b} f(z) = \frac{-iab^3}{a^2 - b^2}.$$

Значит,

$$I = 2\pi ab \frac{b-a}{b+a} \neq 0, \quad \text{если } a \neq b.$$

Отсюда видно (см. следствие 4), что некруговой эллипс является множеством Помпейю.

Доказательство теоремы 21, основанное на других свойствах решений задачи Коши, предложено Г. Джонсоном в [41]. Доказательство теоремы 21, основанное на свойствах класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса, получено В.В. Волчковым в [6].

§ 18. Случай многоугольника и области с углом. В теореме 21 преобразование Фурье индикатора фигуры было вычислено явно, что дало возможность легко применить теорему 11. Явное вычисление преобразования Фурье индикатора фигуры удастся произвести лишь в некоторых случаях. Более общий подход состоит в изучении асимптотического поведения $\hat{\chi}_D$ на множестве M_α .

Теорема 22 (L. Brown, B.M. Schreiber, B.A. Taylor [26], 1973). *Любой многоугольник в $\mathbb{R}^2$ является множеством Помпейю.*

В работе [26] доказано также, что ограниченная односвязная область, граница которой имеет "торчащий угол" является множеством Помпейю. Для точной формулировки соответствующего результата потребуется одно определение.

Определение 4. Пусть $z = z(t)$ ($t \in [-1; 1]$) – липшицева кривая с касательным вектором

$$T(t) = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$$

(он определен корректно почти всюду). Точка $p = z(0)$ называется углом этой кривой, если односторонние пределы

$$\lim_{t \rightarrow +0} T(t), \quad \lim_{t \rightarrow -0} T(t)$$

существуют и являются неколлинеарными векторами.

Теорема 23 (L. Brown, B.M. Schreiber, B.A. Taylor [26], 1973). *Пусть D – замыкание ограниченной области в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что существует полуплоскость $H \subset \mathbb{R}^2$ и единственная точка $p \in D \cap H$ максимально удаленная от ∂H , такая что вблизи p граница D является липшицевой кривой и p – угол этой кривой. Тогда D является множеством Помпейю.*

Доказательство теоремы 23 основано на теореме 11 и изучении асимптотического поведения преобразования Фурье $\hat{\chi}_D$ на множестве M_α .

§ 19. Выпуклые множества со свойством Помпейю. Из теоремы 23 вытекает следующий результат.

Теорема 24 (L. Brown, B.M. Schreiber, B.A. Taylor [26], 1973). *Пусть D – компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$ с непустой внутренностью, такое что для некоторой точки $p \in \partial D$ опорная прямая к D , проходящая через p не является единственной. Тогда D является множеством Помпейю.*

Следующий результат показывает, что любая "сигара" (т.е. выпуклая область, длина которой по меньшей мере в два раза больше, чем ширина) имеет свойство Помпейю.

Теорема 25 (L. Brown, J-P. Kahane [42], 1982). Пусть D – выпуклая область, $w(\theta)$ ($0 \leq \theta < \pi$) – расстояние между двумя опорными прямыми к D , образующими угол θ с положительным направлением оси x . Пусть

$$m(D) = \inf_{0 \leq \theta < \pi} w(\theta), \quad M(D) = \sup_{0 \leq \theta < \pi} w(\theta).$$

Тогда, если $2m(D) \leq M(D)$, то D имеет свойство Помпейю.

Доказательство теоремы 25 основано на теореме 11.

Напомним теперь одно из основных понятий, связанных с выпуклыми множествами.

Определение 5. 1) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное выпуклое открытое множество, содержащее точку $(0, 0)$. Зафиксируем угол $\theta \in [0, 2\pi)$. Возьмем вдали от начала координат прямую l , перпендикулярную лучу $\arg z = \theta$ и будем перемещать ее параллельно самой себе до соприкосновения с множеством $\bar{\Omega}$. Пусть в момент соприкосновения она занимает положение l_0 . Расстояние от начала координат до этой прямой обозначим $h(\theta)$ (или $h_\Omega(\theta)$). Функция $h = h_\Omega$ называется опорной функцией множества Ω . Другими словами, $h(\theta)$ – расстояние от начала координат до опорной прямой с внешней нормалью $(\cos \theta, \sin \theta)$.

2) Пусть $(0, 0) \notin \Omega$. Возьмем точку $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, такую что $(0, 0) \in a + \Omega$. Опорная функция множества Ω определяется равенством

$$h_\Omega(\theta) = h_{a+\Omega}(\theta) - a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta.$$

Теорема 26 (Р. Далмассо [34], [35], 1999–2000). Пусть Ω – ограниченное выпуклое открытое множество в $\mathbb{R}^2$, h – опорная функция множества Ω . Предположим, что $\partial\Omega$ принадлежит классу C^2 и имеет положительную кривизну. Если

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)(h(\theta) + h''(\theta))e^{2i\theta} d\theta \neq 0,$$

то Ω является множеством Помпейю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем сначала считать, что $(0, 0) \in \Omega$. Покажем, что

$$\int_{\partial\Omega} (\nu_1(x) + i\nu_2(x))^2 x \cdot \nu(x) ds \neq 0,$$

т.е. нарушается соотношение из теоремы 19. Пусть функция

$$x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), \quad 0 \leq s \leq L \quad (L - \text{длина } \partial\Omega)$$

определяет естественную параметризацию $\partial\Omega$. Поскольку $|x'(s)| = 1$, то

$$\int_{\partial\Omega} (\nu_1(x) + i\nu_2(x))^2 x \cdot \nu(x) ds = \int_0^L (\nu_1(x(s)) + i\nu_2(x(s)))^2 x(s) \cdot \nu(s) ds.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $s = s(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, где $s(\theta)$ определяется тем условием, что $x(s(\theta))$ – точка соприкосновения прямой l_0 с $\partial\Omega$ (см. определение 5). Тогда $\nu(s(\theta)) = e^{i\theta}$, и по определению опорной функции $h(\theta) = x(s(\theta)) \cdot \nu(s(\theta))$. Значит,

$$\int_0^L (\nu_1(x(s)) + i\nu_2(x(s)))^2 x(s) \cdot \nu(s) ds = \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} h(\theta) s'(\theta) d\theta.$$

Выразим $s'(\theta)$ в терминах опорной функции. Имеем

$$h'(\theta) = s'(\theta)x'(s(\theta)) \cdot \nu(s(\theta)) + s'(\theta)\nu'(s(\theta)) \cdot x(s(\theta)).$$

Так как вектор касательной $x'(s(\theta))$ перпендикулярен вектору нормали $\nu(s(\theta))$, то

$$h'(\theta) = s'(\theta)\nu'(s(\theta)) \cdot x(s(\theta)).$$

Обозначим через $\tau(s)$ единичный вектор касательной к кривой $\partial\Omega$. Тогда

$$s'(\theta)\nu'(s(\theta)) = (\nu(s(\theta)))' = (e^{i\theta})' = ie^{i\theta} = \tau(s(\theta)), \quad h'(\theta) = x(s(\theta)) \cdot \tau(s(\theta)).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} h''(\theta) &= s'(\theta)x'(s(\theta)) \cdot \tau(s(\theta)) + x(s(\theta)) \cdot (\tau(s(\theta)))' = \\ &= s'(\theta)x'(s(\theta)) \cdot \tau(s(\theta)) - x(s(\theta)) \cdot e^{i\theta} = s'(\theta)x'(s(\theta)) \cdot \tau(s(\theta)) - h(\theta). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} h''(\theta) + h(\theta) &= s'(\theta)x'(s(\theta)) \cdot \tau(s(\theta)) = s'(\theta) \frac{x'(s(\theta))}{|x'(s(\theta))|} \cdot \tau(s(\theta)) = \\ &= s'(\theta)\tau(s(\theta)) \cdot \tau(s(\theta)) = s'(\theta). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\partial\Omega} (\nu_1(x) + i\nu_2(x))^2 x \cdot \nu(x) ds = \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} h(\theta)(h''(\theta) + h(\theta)) d\theta \neq 0.$$

Пусть $(0, 0) \notin \Omega$. Возьмем точку $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, такую что $(0, 0) \in a + \Omega$. По доказанному выше

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(a+\Omega)} (\nu_1(x) + i\nu_2(x))^2 (x - a) \cdot \nu(x) ds = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} (h''_{a+\Omega}(\theta) + h_{a+\Omega}(\theta))(h_{a+\Omega}(\theta) - a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} (h''_{a+\Omega}(\theta) + h_{a+\Omega}(\theta))h_{\Omega}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Учитывая простое соотношение $h''_{a+\Omega}(\theta) + h_{a+\Omega}(\theta) = h''_{\Omega}(\theta) + h_{\Omega}(\theta)$, получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(a+\Omega)} (\nu_1(x) + i\nu_2(x))^2 (x - a) \cdot \nu(x) ds = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} (h''_{\Omega}(\theta) + h_{\Omega}(\theta))h_{\Omega}(\theta) d\theta \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме 19 задача (9)–(10) не имеет решения для множества $a + \Omega$. Теперь теорема 16 показывает, что $a + \Omega$ является множеством Помпейю. Значит, и Ω обладает свойством Помпейю. $\square$

Замечание 3. Пусть $k(s)$ – кривизна границы. Отметим, что

$$h''(\theta) + h(\theta) = \frac{1}{k(s(\theta))} \quad - \quad \text{радиус кривизны.}$$

В самом деле,

$$\tau(s(\theta)) = i\nu(s(\theta)) = ie^{i\theta}, \quad \tau'(s(\theta))s'(\theta) = -e^{i\theta} = -\nu(s(\theta)).$$

С другой стороны, по формулам Френе $\tau'(s(\theta)) = -k(s(\theta))\nu(s(\theta))$. Следовательно,

$$s'(\theta) = \frac{1}{k(s(\theta))}.$$

Но, как мы видели ранее, справедливо равенство $s'(\theta) = h''(\theta) + h(\theta)$, которое теперь влечет требуемую формулу.

§ 20. Вещественно аналитическое продолжение границы множеств $D \notin \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть D – непустое открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В работе [15] показано, что если D – внутренность гомеоморфного образа $(n-1)$ -мерной сферы, ∂D имеет кусок $(n-1)$ -мерной вещественно аналитической поверхности, то либо D имеет свойство Помпейю, или любое связное вещественно аналитическое продолжение этой поверхности также лежит на границе D . Например, любая такая область, имеющая на границе кусок гиперплоскости имеет свойство Помпейю, поскольку вся гиперплоскость не может лежать на границе ограниченного множества D .

Приведем более точную формулировку этого результата.

Определение 6. Непустое подмножество S в $\mathbb{R}^n$ называется $(n-1)$ -мерной вещественно аналитической поверхностью, если для любой точки $x \in S$ существует вещественно аналитическое взаимно однозначное отображение открытого единичного шара $B_1(0)$ в $\mathbb{R}^n$ на открытую окрестность J точки x , такое что множество $B_1(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ отображается на $J \cap S$.

Теорема 27 (S.A. Williams [15], 1976). Пусть выполнены следующие условия:

- 1) множество D не имеет свойство Помпейю;
- 2) $(n-1)$ -мерная вещественно аналитическая поверхность S содержится в $\partial^* D$;
- 3) существуют точка $y^0 \in S$ и число $\delta > 0$, такие что $B_\delta(y^0) \cap \partial D \subset S$.

Пусть W – связная $(n-1)$ -мерная вещественно аналитическая поверхность, такая что $S \subseteq W$ и расстояние между W и $\partial D \setminus \partial^* D$ положительно. Тогда $W \subseteq \partial^* D$.

Доказательство этого результата основано на теоремах 13 и 14.

Следствие 7. Произвольный многогранник в $\mathbb{R}^n$ является множеством Помпейю.

Это утверждение вытекает из теоремы 27. Принципиально другое доказательство следствия 7 было получено в [6, часть 4].

§ 21. Вещественная аналитичность границы множеств $D \notin \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$. Пусть D – непустое открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Теорема 28 (S.A. Williams [30], 1981). Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) множество D не имеет свойство Помпейю;
- 2) существуют $\alpha > 0$ и функция $T \in C^1(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем, такие что

$$\Delta T + \alpha T = -\chi_D.$$

Тогда если некоторая $(n-1)$ -мерная часть внешней границы $\partial^* D$ является липшицевой, то она является вещественно аналитической.

Доказательство теоремы 28 основано на тщательном изучении свойств функции (4). При этом, с использованием теоремы Л.А. Каффарелли [43], сначала доказывается, что указанная $(n-1)$ -мерная часть внешней границы $\partial^* D$ является непрерывно дифференцируемой. Затем применяется теорема Д. Киндерлерера и Л. Ниренберга [44] и доказывается, что эта часть вещественно аналитическая.

Теорема 28 и следствие 2 влекут следующие утверждения.

Следствие 8. Пусть D – открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ с границей Липшица и его дополнение является связным. Если граница ∂D не является вещественно аналитической, то D является множеством Помпейю.

Следствие 9. Если выпуклая область D в $\mathbb{R}^n$ имеет не вещественно аналитическую границу ∂D , то D является множеством Помпейю.

Из теоремы 28 следуют теоремы 22, 23, сформулированные выше. В частности, теорема 28 еще раз показывает, что, грубо говоря, области, границы которых имеют некоторый "угол" являются множествами Помпейю.

§ 22. Полиномиальные образы окружности. Приведенные выше результаты С.А. Вильямса не позволяют сделать вывод о принадлежности множества классу $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$, если множество имеет вещественно аналитическую границу или граница множества является нелипшицевой. Теорема 25 также имеет ограничения на размеры области. Следующий результат не вытекает из указанных теорем и дает новые примеры множеств Помпейю.

Теорема 29 (N. Garofalo, F. Segala [45], [46], 1989). Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область, ∂D – замкнутая простая кривая с параметризацией

$$z(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Предположим, что существует многочлен

$$p(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C},$$

такой что $x_1(t) + ix_2(t) = p(e^{it})$, $t \in [-\pi, \pi]$, причем степень многочлена $p(z)$ не меньше 2. Тогда D имеет свойство Помпейю.

Доказательство теоремы 29 основано на теореме 11 и изучении асимптотического поведения преобразования Фурье $\widehat{\chi}_D$ на множестве M_α .

Пример 3 (конхоида окружности). Пусть $b > a > 0$. Рассмотрим кривую, которая в полярных координатах задается уравнением $\rho(t) = a \cos t + b$, $t \in [-\pi, \pi]$. Это уравнение можно переписать в виде

$$\rho(t)e^{it} = \frac{a}{2}e^{2it} + be^{it} + \frac{a}{2} = p(it),$$

где

$$p(z) = \frac{a}{2}z^2 + bz + \frac{a}{2}.$$

По теореме 29 указанная кривая ограничивает область со свойством Помпейю. Отметим, что эта область является выпуклой при $b \geq 2a$ и невыпуклой при $a < b < 2a$.

То, что внутренность конхоиды окружности из примера выше является множеством Помпейю можно установить также с помощью следствия 5. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) \frac{\rho(\theta) - i\rho'(\theta)}{\rho(\theta) + i\rho'(\theta)} e^{2i\theta} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b)^2 \frac{a \cos \theta + b + ia \sin \theta}{a \cos \theta + b - ia \sin \theta} (1 - 2 \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Используя известную формулу

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz,$$

где $R(u, v)$ – рациональная функция, после преобразований получаем

$$I = \frac{1}{4ib} \int_{|z|=1} \frac{az + b}{\left(z + \frac{a}{b}\right)} (az^2 + 2bz + a)^2 dz.$$

Теперь по теореме о вычетах

$$I = \frac{\pi}{2b} \operatorname{res}_{z=-\frac{a}{b}} \frac{az + b}{\left(z + \frac{a}{b}\right)} (az^2 + 2bz + a)^2 = \frac{\pi a^2}{2b^6} (b^2 - a^2)^3 \neq 0.$$

Отсюда и из следствия 5 снова заключаем, что внутренность конхоиды окружности является множеством Помпейю.

§ 23. Аналитические образы окружности. В связи с теоремой 29 в работе [45] сформулированы следующие гипотезы.

Гипотеза 6 (N. Garofalo [45], 1989). Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область, ∂D – замкнутая простая кривая с параметризацией

$$z(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Предположим, что существует аналитическая функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, такая что

$$x_1(t) + ix_2(t) = f(e^{it}), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Тогда D имеет свойство Помпейю, исключая случай, когда $f(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$.

Гипотеза 7 (N. Garofalo [45], 1989). Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область, ∂D – замкнутая простая кривая с параметризацией

$$z(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Предположим, что существуют аналитические функции $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, такие что

$$x_1(t) + ix_2(t) = f(e^{it}) + g(e^{-it}), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Тогда D имеет свойство Помпейю, исключая случай, когда D является кругом.

Пример 4. Если $a, b > 0$,

$$f(z) = \frac{a+b}{2}z, \quad g(z) = \frac{a-b}{2}z,$$

то

$$f(e^{it}) + g(e^{-it}) = (a \cos t, b \sin t),$$

т.е. ∂D является эллипсом с полуосями a, b . Как было показано ранее, в этом случае гипотеза 7 подтверждается.

Следующие результаты также подтверждают гипотезы 6, 7.

Теорема 30 (N. Garofalo, F. Segala [39], 1991). Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область, граница которой имеет параметризацию

$$z(t) = e^{it} + ae^{-iNt}, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

где $N \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (при подходящих a эта кривая является простой). Тогда D является множеством Помпейю.

Теорема 31 (N. Garofalo, F. Segala [39], 1991). Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область, граница которой имеет параметризацию

$$z(t) = \left(1 + \frac{\cos(2t)}{2}\right) (\cos t, \sin t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Тогда D является множеством Помпейю.

Теорема 32 (N. Garofalo, F. Segala [39], 1991). Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область, граница которой имеет параметризацию

$$z(t) = \left(1 - \frac{\sin^2(2t)}{4}\right) (\cos t, \sin t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Тогда D является множеством Помпейю.

Теоремы 30–32 получены авторами с помощью теоремы 11 и одного общего результата, связанного с изучением асимптотического поведения преобразования Фурье $\widehat{\chi}_D$ на множестве M_α . Как отмечают авторы, этот результат не дает, однако, ответ на следующий вопрос.

Вопрос 1 (N. Garofalo, F. Segala [39], 1991). Можно показать, что кривая

$$z(t) = (e^{\cos t} \cos(\sin t), e^{\cos t} \sin(\sin t)), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

ограничивает выпуклую область $D \subset \mathbb{R}^2$. Является ли D множеством Помпейю?

§ 24. Квадратурные области со свойством Помпейю. В комплексном анализе хорошо известно следующее утверждение.

Теорема 33. Если функция h голоморфна в круге $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ и интегрируема в нем, то

$$\iint_{D_r} h(z) dx dy = \pi r^2 h(0). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя в двойном интеграле к полярным координатам и используя теорему о среднем для голоморфных функций, имеем

$$\begin{aligned}\iint_{D_r} h(z) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho h(\rho e^{i\varphi}) d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^r \rho \int_0^{2\pi} h(\rho e^{i\varphi}) d\varphi d\rho = 2\pi h(0) \int_0^r \rho d\rho = \pi r^2 h(0),\end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Равенство (13) является простейшим примером квадратурного тождества, а круг – простейшим примером квадратурной области (см., например, [47]–[49]). Приведем более общее определение.

Определение 7. Пусть D – ограниченная область на $\mathbb{C}$. Предположим, что существуют $z_1, \dots, z_N \in D$, $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$, $c_{jk} \in \mathbb{C}$ ($k = 1, \dots, N$; $j = 0, \dots, n_k - 1$), такие что для любой функции h , голоморфной в D и интегрируемой на D (по мере Лебега) выполнено равенство

$$\iint_D h(z) dx dy = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{n_k-1} c_{jk} h^{(j)}(z_k), \quad (14)$$

где $h^{(j)}$ обозначает производную функции h порядка j . Тогда D называется квадратурной областью, а тождество (14) – квадратурным тождеством.

Один из методов построения квадратурных областей – теория конформных отображений.

Пример 5. Положим $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Пусть рациональная функция R удовлетворяет следующим условиям:

- 1) R – унивалентная в $\mathbb{D}$ (т.е. голоморфная и однолистная);
- 2) R не имеет полюсов в $\overline{\mathbb{D}}$.

Тогда $R(\mathbb{D})$ – ограниченная квадратурная область.

Теорема 34 (D. Aharonov, H.S. Shapiro [50], 1976). Если Ω – односвязная ограниченная область, то Ω является квадратурной областью тогда и только тогда, когда любое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на Ω является рациональной функцией.

Оказывается, что квадратурные области (кроме круга) обладают свойством Помпейю.

Теорема 35 (P. Ebenfelt [51], 1993). Всякая ограниченная квадратурная область Ω , отличная от круга, является множеством Помпейю.

Следствие 10. Пусть Ω – ограниченная односвязная область, отличная от круга, которая является конформным образом диска $\mathbb{D}$ под действием рациональной функции. Тогда Ω является множеством Помпейю.

Доказательство теоремы 35 основано на теореме 11 и изучении асимптотического поведения преобразования Фурье $\widehat{\chi}_\Omega$ на множестве M_α . Теорема 35 обобщает теорему 29. Отметим, что любая область D , ограниченная конечным числом непересекающихся вещественно аналитических кривых, может быть аппроксимирована квадратурными областями,

которые конформно эквивалентны области D (см. [52]). Поэтому теорема 35 дает также определенную информацию о многосвязных множествах Помпейю.

§ 25. "Корни степени k из эллипсов". Пусть $\mathbb{C}^2 = \{(z, w) : z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}\}$. отождествим $\mathbb{C}$ с (анти)-комплексной прямой $w = \bar{z}$ в $\mathbb{C}^2$, т.е. $\mathbb{C} = \{(z, \bar{z}) : z \in \mathbb{C}\}$. Введем семейство алгебраических кривых следующим образом. Для $k \in \mathbb{N}$ положим

$$P_k(z, w) = Az^{2k} + 2Bz^k w^k + Aw^{2k} - 1, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

где

$$A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right), \quad B = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), \quad a > b > 0.$$

Обозначим через Γ_k пересечение множества нулей полинома P_k и $\mathbb{C}$. Имеем

$$\Gamma_k = \{z \in \mathbb{C} : Az^{2k} + 2B|z|^{2k} + A\bar{z}^{2k} = 1\}.$$

Отметим, что Γ_1 – эллипс на комплексной плоскости с полуосями a и b , и

$$\Gamma_k = \{z \in \mathbb{C} : z^k \in \Gamma_1\}, \quad k > 1.$$

Теорема 36 (Р. Ebenfelt [51], 1993). Пусть Ω_k – область, лежащая внутри кривой Γ_k . Тогда Ω_k является множеством Помпейю.

В работе [51] автор доказывает неразрешимость некоторой переопределенной задачи Коши, которая является более общей, чем задача (11)–(12). Поэтому теорема 36 является следствием этого результата и теоремы 16.

§ 26. Обратные образы диска. По аналогии с теоремой 36, в работе [51] получен следующий общий результат.

Теорема 37 (Р. Ebenfelt [51], 1993). Пусть Ω – жорданова область на $\mathbb{C}$ с вещественно аналитической границей, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ – конформное отображение Ω на диск $\mathbb{D}$. Обозначим той же буквой φ аналитическое продолжение функции $\varphi|_{\Omega}$ в некоторую окрестность Ω' множества $\bar{\Omega}$. Предположим, что φ не принимает в $\Omega' \setminus \bar{\Omega}$ значений из $\bar{\mathbb{D}}$ и существует точка $z_1 \in \Omega'$, такая что $\varphi'(z_1) = 0$. Тогда Ω является множеством Помпейю.

Замечание 4. В теореме 37 вместо диска $\mathbb{D}$ можно брать любой открытый круг K на $\mathbb{C}$. Действительно, если $\varphi : \Omega \rightarrow K$ – конформное отображение с описанными выше условиями, а $l : K \rightarrow \mathbb{D}$ – линейное преобразование K на $\mathbb{D}$, то функция $\psi(z) = l(\varphi(z))$ удовлетворяет условиям теоремы 37. Следовательно, Ω будет множеством Помпейю.

Следствие 11. Пусть функция φ голоморфна в некоторой окрестности $\bar{\mathbb{D}}$, однолистка в $\mathbb{D}$ и $\varphi'(1) = 0$. Предположим, что $\bar{\Omega} \subset \mathbb{D}$ и $\varphi(\Omega)$ является кругом. Тогда область Ω является множеством Помпейю.

Пример 6. Пусть $\varphi(z) = (z - 1)^2$. Функция φ однолистка в $\mathbb{D}$ и

$$\varphi(e^{i(\theta-\pi)}) = 2(1 + \cos \theta)e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Значит, уравнение $\varphi(\partial\mathbb{D})$ в полярных координатах имеет вид

$$\rho(\theta) = 2(1 + \cos \theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

т.е. $\varphi(\partial\mathbb{D})$ является кардиоидой. Функция φ конформно отображает $\mathbb{D}$ на внутренность этой кардиоды. Пусть K – любой открытый круг, такой что $\bar{K} \subset \varphi(\mathbb{D})$. Тогда по следствию 11 множество $\Omega = \{z \in \mathbb{D} : \varphi(z) \in K\} = \varphi^{-1}(K)$ имеет свойство Помпейю.

Теорема 38 (Р. Ebenfelt [51], 1993). Пусть Ω – жорданова область на $\mathbb{C}$ с вещественно аналитической границей, Ω не является кругом, и существует рациональная функция, которая конформно отображает Ω на диск $\mathbb{D}$. Тогда Ω является множеством Помпейю.

Отметим, что теорема 38 получена в работе [51] с помощью теоремы 37.

§ 27. Конформные образы диска. Пусть l – прямая в $\mathbb{C}$, $z_0 \notin l$,

$\Lambda(l, z_0)$ – открытая полуплоскость с границей l , содержащая z_0 .

Теорема 39 (N. Garofalo, F. Segala [53], 1994). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой жордановой границей $\partial\Omega$, область Ω не является кругом, $h : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ – конформное отображение $\mathbb{D}$ на Ω ,

$$\Phi(w) = h\left(\frac{1}{\overline{h^{-1}(w)}}\right), \quad w \in \partial\Omega \quad - \quad \text{функция Шварца.}$$

Предположим, что существуют точка $z_0 \in \Omega$ и прямая $l \subset \mathbb{C}$, такие что Φ можно продолжить до голоморфной функции в $E(l, z_0) \setminus \{z_0\}$, имеющей полюс в z_0 , где

$$E(l, z_0) = \Lambda(l, z_0) \cap \Omega.$$

Тогда Ω является множеством Помпейю.

Отметим, что функцию h можно продолжить до взаимно-однозначного непрерывного отображения $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{\Omega}$. Поэтому функция Φ определена корректно.

Используя теорему 39, можно получить следующий результат.

Теорема 40 (N. Garofalo, F. Segala [53], 1994). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой жордановой границей $\partial\Omega$, область Ω не является кругом, $h : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ – конформное отображение $\mathbb{D}$ на Ω .

1) Предположим, что h мероморфна в $\mathbb{C}$ и имеет хотя бы один полюс в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Тогда область Ω является множеством Помпейю. В частности, если $h : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ – конформное отображение и h – полином (или рациональная функция), то Ω обладает свойством Помпейю.

2) Предположим, что Ω – выпуклое множество и h имеет полюс на границе круга сходимости ряда Тейлора

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Тогда Ω является множеством Помпейю.

Доказательство этих результатов основано на теореме 11 и изучении асимптотического поведения преобразования Фурье $\widehat{\chi}_\Omega$ на множестве M_α .

§ 28. Торы в $\mathbb{R}^n$. В 1997 году К.А. Беренштейн и Д. Хавинсон [54] обнаружили, что тор в пространстве $\mathbb{R}^4$, определяемый равенством

$$\Omega = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R \right)^2 + w^2 < 1 \right\}, \quad R > 1,$$

является множеством Помпейю. Доказательство в работе [54] основано на теореме 16 и является существенно четырехмерным. Случай произвольной размерности был рассмотрен в работах [34, 35].

Пусть $a > R > 0$, $D(a, R)$ – круг с центром в точке $(a, 0, \dots, 0)$ и радиусом R в плоскости $x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ из $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$). Вращая этот круг вокруг оси x_n в $\mathbb{R}^n$, получаем тор Ω , определяемый условием

$$\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} - a\right)^2 + x_n^2 < R^2. \quad (15)$$

Теорема 41 (Р. Далмассо [34, 35], 1999–2000). Пусть $a > R > 0$, Ω – тор в $\mathbb{R}^n$, определяемый условием (15). Тогда Ω является множеством Помпейю.

Доказательство теоремы 41 было получено в работе [35] с помощью применения теоремы 18.

§ 29. Области, ограниченные гиперповерхностями вращения. Изучая комплексно-аналитические задачи Коши, П. Эбенфельт [55] доказал, что если Ω_0 – область в $\mathbb{R}^2$, симметричная относительно оси x_1 , а Ω – тело, полученное в результате вращения Ω_0 вокруг оси x_1 в $\mathbb{R}^3$, то при определенных условиях на Ω_0 тело Ω является множеством Помпейю. Этот результат был уточнен в работе [56].

Приведем теперь результаты Р. Далмассо [35] о принадлежности классу $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ областей, ограниченных гиперповерхностями вращения.

Пусть D – область в плоскости $x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ из $\mathbb{R}_n$ ($n \geq 3$), ограниченная регулярной замкнутой кривой $[\alpha, \beta) \ni t \rightarrow (f(t), g(t))$. Предположим, что

$$D \subset \{x \in \mathbb{R}_n : x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, \quad x_1 > 0\}.$$

Вращая D вокруг оси x_n в $\mathbb{R}_n$, получим область Ω , ограниченную гиперповерхностью вращения. Положим

$$a(t) = (f'^2(t) + g'^2(t))^{-1/2}.$$

Теорема 42 (Р. Далмассо [35], 2000). Пусть Ω – область, определенная выше. Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{n-2}(t)(f(t)g'(t) - g(t)f'(t))((n-1)f'^2(t) - g'^2(t))a^2(t)dt \neq 0;$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{n-2}(t)g'^2(t)f'(t)a^2(t)dt \neq 0;$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{n-2}(t)f'^3(t)a^2(t)dt \neq \frac{1}{n-1} \int_{\alpha}^{\beta} f^{n-2}(t)g'^2(t)f'(t)a^2(t)dt.$$

Тогда Ω имеет свойство Помпейю.

Теорема 43 (Р. Далмассо [35], 2000). Предположим, что

$$f(t) = a + R \cos t, \quad g(t) = r \sin t, \quad -\pi \leq t < \pi,$$

где $r, R > 0$ и $a > R$. Тогда существует $\rho > R$, такое что Ω является множеством Помпейю при $r \neq \rho$.

Доказательство теорем 42, 43 основано на теореме 18.

§ 30. Проблема Помпейю на классе $C(\mathbb{R}^n) \setminus RA(\mathbb{R}^n)$. Пусть Ω – непустое открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\partial\Omega$ локально является графиком

функции, удовлетворяющей условию Липшица, и дополнение к $\overline{\Omega}$ является связным. В работе [29] показано, что если $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\int_{g(\Omega)} f(x) dx = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in M(n), \quad (16)$$

то либо Ω является шаром, либо существует ненулевой полином p , зависящий только от Ω , такой что $p(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{R}^n$.

В качестве следствия получен следующий результат.

Теорема 44 (В.В. Волчков [29], 2008). *Пусть множество Ω удовлетворяет условиям выше. Предположим, что существует функция $f \in C(\mathbb{R}^n)$, которая не является вещественно аналитической и удовлетворяет условию (16). Тогда Ω является шаром.*

Отметим, что если Ω является шаром, то существует функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, которая не является вещественно аналитической и удовлетворяет условию (16).

§ 31. Множества Помпейю с нелипшицевой границей. В работе [57] получены новые достаточные условия, при которых множество в $\mathbb{R}^2$ имеет свойство Помпейю без каких-либо требований регулярности для граничных точек. Этот результат значительно расширяет совокупность имеющихся примеров множеств со свойством Помпейю.

Для $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$ положим

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}, \quad V_\delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \delta\}.$$

Теорема 45 (В.В. Волчков [57], 2010). *Пусть A – компактное множество в $\mathbb{R}^2$ положительной лебеговой меры. Предположим, что существуют $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, такие что $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi/2$, $\beta < \gamma < 2\beta - \alpha$, $\delta > 0$, и $U(\alpha, \beta) \cap V_\delta \subset A \subset \overline{U(0, \gamma)}$. Тогда $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^2)$.*

Теорема 45 позволяет построить большое число областей $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^2)$ с нелипшицевой (и даже фрактальной) границей. В частности, имеет место

Следствие 12. *Снежинка Кох является множеством Помпейю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 45 для $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = 2\pi/3$, и достаточно малого $\delta > 0$, получаем требуемое утверждение. $\square$

§ 32. Определение множеств с локальным свойством Помпейю. Определение класса $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ можно обобщить следующим образом.

Определение 8. Пусть A – компактное множество в $\mathbb{R}^n$ положительной лебеговой меры, $\mathcal{U}$ – область в $\mathbb{R}^n$, и

$$\text{Mot}(A, \mathcal{U}) = \{\lambda \in M(n) : \lambda A \subset \mathcal{U}\} \neq \emptyset.$$

Обозначим через $\mathfrak{P}(A, \mathcal{U})$ множество всех функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathcal{U})$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \text{Mot}(A, \mathcal{U}). \quad (17)$$

Говорят, что множество A имеет локальное свойство Помпейю относительно области $\mathcal{U}$ (или A является множеством Помпейю в $\mathcal{U}$), если $\mathfrak{P}(A, \mathcal{U}) = \{0\}$. Совокупность всех множеств Помпейю в области $\mathcal{U}$ обозначается символом $\text{Pomp}(\mathcal{U})$.

Множество $\mathfrak{P}(A, \mathcal{U})$ является ядром соответствующего локального преобразования Помпейю. Положим

$$\mathfrak{P}^s(A, \mathcal{U}) = \mathfrak{P}(A, \mathcal{U}) \cap C^s(\mathcal{U}), \quad s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}.$$

Особый интерес представляет случай, когда

$$\mathcal{U} = B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}, \quad r > r^*(A),$$

где $r^*(A)$ – радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего множество A . Ниже мы увидим, что для широкого класса множеств A условие $A \in \text{Pomp}(B_r)$ выполнено, если размеры шара B_r достаточно велики по сравнению с размерами множества A .

Пример 7. Пусть

$$A = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \quad r^*(A) = \frac{\sqrt{2}}{2} < r < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Легко видеть, что все единичные квадраты в B_r имеют непустое пересечение, а именно, некоторый круг B . Выберем ненулевую функцию f в B_r , такую что $f = 0$ в $B_r \setminus B$ и

$$\int_B f = 0.$$

Тогда для любого единичного квадрата $K \subset B_r$ имеем

$$\int_K f = \int_B f = 0.$$

Значит, $\mathfrak{P}(A, B_r) \neq \{0\}$, т.е. A не является множеством Помпейю в B_r при $r < \sqrt{5}/2$. При этом $A \in \text{Pomp}(B_r)$, если $r \geq \sqrt{5}/2$ (см. теорему 51 ниже).

Если множество $\mathcal{U}$ инвариантно относительно группы вращений $\text{SO}(n)$, то положим

$$\mathfrak{P}_0^s(A, \mathcal{U}) = \mathfrak{P}_0(A, \mathcal{U}) \cap C^s(\mathcal{U}), \quad s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\},$$

где $\mathfrak{P}_0(A, \mathcal{U})$ – совокупность всех радиальных функций из $\mathfrak{P}(A, \mathcal{U})$.

§ 33. Глобальное свойство Помпейю влечет локальное. Первые результаты, показывающие, что глобальное свойство Помпейю влечет локальное были получены К.А. Беренштейном и Р. Гэем [58].

Напомним, что радиализация функции $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$f^\#(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(|x|\sigma) d\omega(\sigma) = \int_{\text{O}(n)} f(\tau x) d\tau,$$

где $d\omega$ – поверхностная мера на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, ω_{n-1} – площадь $\mathbb{S}^{n-1}$, $d\tau$ – нормированная мера Хаара на ортогональной группе $\text{O}(n)$.

Теорема 46 (С.А. Berenstein, R. Gay [58], 1989). Пусть $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что существует $\lambda \in \text{M}(n)$, такое что при некотором $\varepsilon \in (0, R)$, $R = \max_{x \in \lambda A} |x|$ выполнено равенство

$$\chi_{\lambda A}^\#(x) = \gamma_1 + \gamma_2(R - |x|)^\alpha \varphi(|x|), \quad R - \varepsilon \leq |x| \leq R,$$

где $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, $\alpha > 0$, $\varphi \in C^{1+[\alpha]}[R - \varepsilon, R]$, $\varphi(R) = 1$ и существует $\varphi^{(2+[\alpha])} \in L[R - \varepsilon, R]$. Тогда $A \in \text{Pomp}(B_r)$ для любого $r > 2R$.

Замечание 5. Описанное в теореме 46 условие на $\chi_{\lambda A}^\#$ называется условием гиперболичности.

Пример 8. Пусть $A = \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$. Имеем $R = \max_{x \in A} |x| = a/\sqrt{2}$,

$$\chi_A^\#(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_A(|x|e^{i\theta})d\theta.$$

При $|x| > a/\sqrt{2}$ интегрируется нулевая функция, т.е. $\chi_A^\#(x) = 0$. Если $|x| \leq a/2$, то интегрируется тождественная единица, поэтому $\chi_A^\#(x) = 1$. Если $a/2 < |x| \leq a/\sqrt{2}$, то отрезок $\{x_1 = a/2, 0 \leq x_2 \leq a/2\}$ пересекается с окружностью $\rho = b$ при $\theta = \arccos(a/2b)$. Отсюда находим

$$\chi_A^\#(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq a/2, \\ 1 - \frac{4}{\pi} \arccos \frac{a}{2|x|}, & \text{если } a/2 < |x| \leq a/\sqrt{2}, \\ 0, & \text{если } |x| > a/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Далее,

$$1 - \frac{4}{\pi} \arccos \frac{a}{2|x|} = \frac{4}{\pi R} (R - |x|) \varphi(|x|), \quad a/2 < |x| \leq R,$$

где функция φ удовлетворяет условиям теоремы 46. Следовательно, $A \in \text{Rompr}(B_r)$ для любого $r > \sqrt{2}a$.

Положим

$$B_R(x_0) = B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < R\}.$$

Следствие 13 (С.А. Berenstein, R. Gay [58, 59]; 1989, 1990). Пусть $A \subset \overline{B_R(x_0)}$ и существует крайняя точка $x_1 \in A \cap \partial B_R(x_0)$, такая что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) вблизи x_1 множество A совпадает с многогранным углом с вершиной в точке x_1 ;
 - 2) x_1 – точка строгой выпуклости для ∂A и $\partial A \in C^3$ вблизи x_1 ;
 - 3) $n = 2$ и вблизи x_1 граница ∂A является жордановой достаточно гладкой кривой.
- Тогда, если $A \in \text{Rompr}(\mathbb{R}^n)$, то $A \in \text{Rompr}(B_r)$ для любого $r > 2R$.

Замечание 6. Отметим, что во втором условии следствия 13 не обязательно предполагать, что грани или ребра угла являются плоскими.

Определение 9. Обозначим через $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) множество всех ненулевых радиальных распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ с условиями:

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T})} \frac{|\text{Im} \lambda|}{\ln(2 + |\lambda|)} < +\infty, \quad \sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T})} n_\lambda < +\infty,$$

$$|\tilde{T}^{(n_\lambda)}(\lambda)| > \frac{1}{(2 + |\lambda|)^c}, \quad \lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T}),$$

где константа $c > 0$ не зависит от λ . Здесь, как обычно, $\tilde{T}$ – сферическое преобразование (Фурье) распределения T , $\mathcal{Z}(\tilde{T})$ – множество его нулей, $n_\lambda = n_\lambda(\tilde{T})$ – кратность нуля $\lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T})$.

Класс $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ является достаточно широким и играет важную роль в теории уравнений свертки.

Теорема 47 (В.В. Волчков [6], 2003). Пусть $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ и существует $\lambda \in M(n)$, такое что $\chi_{\lambda A}^\# \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$A \in \text{Pomp}(B_r) \quad \text{для любого } r > r^*(A) + R, \quad \text{где } R = \max_{x \in \lambda A} |x|,$$

$r^*(A)$ – радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего множество A .

Сравнивая этот результат с теоремой 46, отметим, что

$$r^*(A) + R \leq 2R.$$

Наконец, в работе [28] было установлено, что глобальное свойство Помпейю влечет локальное без каких-либо условий на A .

Теорема 48 (В.В. Волчков [28], 2008). Если A является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$ и $R > 2r^*(A)$, то A является множеством Помпейю и в шаре B_R .

Отметим, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $R > (2 - \varepsilon)r^*(A)$ не влечет, вообще говоря, что A является множеством Помпейю в B_R .

§ 34. Проблема В.В. Волčkova об экстремальном радиусе. В связи с результатами выше возникает следующая проблема.

Проблема 1 (В.В. Волчков [60, 61]; 1990, 1991). Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – компактное множество положительной лебеговой меры, такое что $A \in \text{Pomp}(B_r)$ при некотором $r > r^*(A)$. Найти

$$\mathcal{R}(A) = \inf \{r > r^*(A) : A \in \text{Pomp}(B_r)\},$$

и выяснить, когда $\mathcal{R}(A)$ достигается, т.е. $A \in \text{Pomp}(B_r)$ при $r = \mathcal{R}(A)$.

Из определения $\mathcal{R}(A)$ следует, что при $r^*(A) < r < \mathcal{R}(A)$ класс $\mathfrak{P}(A, B_r)$ содержит ненулевую функцию. Это утверждение можно уточнить.

Предложение 4. Пусть $r^*(A) < r < \mathcal{R}(A)$. Тогда существует ненулевая радиальная функция $f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B_r)$.

Материал ниже посвящен, в основном, обсуждению проблемы 1.

§ 35. Верхние и нижние оценки для $\mathcal{R}(A)$. Теорема 48 показывает, что

$$\mathcal{R}(A) \leq 2r^*(A).$$

Приведем точную оценку снизу для $\mathcal{R}(A)$ в случае, когда A является компактным выпуклым множеством в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\rho(A) = \min_{x \in \partial A} \max_{y \in \partial A} |x - y|.$$

Отметим, что

$$\rho(A) \geq r^*(A).$$

Пример 9. Пусть $A = \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$. Тогда

$$r^*(A) = \frac{\sqrt{2}a}{2}, \quad \rho(A) = \frac{\sqrt{5}a}{2}.$$

Пример 10. Пусть A – правильный m -угольник с длиной стороны a . Тогда

$$\rho(A) = \begin{cases} \frac{a \operatorname{ctg}(\pi/2m)}{2}, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ \frac{a\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2(\pi/m)}}{2}, & \text{если } m \text{ четное.} \end{cases}$$

Теорема 49 (В.В. Волчков [6], 2003). Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – компактное выпуклое множество и предположим, что $r^*(A) < r < \rho(A)$. Тогда существует ненулевая функция $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A, B_r)$. В частности,

$$\mathcal{R}(A) \geq \rho(A).$$

Приведем теперь верхнюю оценку для $\mathcal{R}(A)$ в случае, когда A – многогранник в $\mathbb{R}^n$.

Как обычно, пусть $\operatorname{Int} E$ – внутренность непустого множества $E \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{cl} E = \overline{E}$ – замыкание E , $\operatorname{conv} E$ – выпуклая оболочка E , т.е.

$$\operatorname{conv} E = \{\lambda_1 x + \lambda_2 y : x, y \in E, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

Определение 10. Точка $x \in E$ называется крайней точкой выпуклого множества E , если множество $E \setminus \{x\}$ является выпуклым. Совокупность всех крайних точек множества E обозначается $\operatorname{extr} E$.

Определение 11. Пусть $S^{(j)}$ ($j = 1, \dots, l$) – симплексы в $\mathbb{R}^n$ с вершинами $v_{0,j}, \dots, v_{n,j}$, такие что

$$(\operatorname{Int} S^{(i)}) \cap (\operatorname{Int} S^{(j)}) = \emptyset \quad \text{при } i \neq j. \quad (18)$$

Положим

$$A = \bigcup_{j=1}^l S^{(j)}, \quad V = \bigcup_{j=1}^l \bigcup_{i=0}^n v_{i,j}.$$

Точка $v \in V$ называется существенной, если существует $\varepsilon > 0$, такое что

$$v \in \operatorname{extr} (\operatorname{conv} (A \cap B_\varepsilon(v))) \cup \operatorname{extr} (\operatorname{conv} (B_\varepsilon(v) \setminus A)).$$

Множество всех существенных точек $v \in V$ обозначается $\operatorname{ess} V$.

Отметим, что $\operatorname{extr} (\operatorname{conv} A) \subset \operatorname{ess} V$. В частности, $\operatorname{ess} V \neq \emptyset$.

Замечание 7. Пусть $\operatorname{vert} A$ – множество всех вершин многогранника A . Если A – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, то множество $\operatorname{ess} V$ не зависит от разбиения A на симплексы, удовлетворяющие условию (18), и $\operatorname{ess} V = \operatorname{vert} A$.

Теорема 50 (В.В. Волчков [6], 2003). Пусть A – многогранник в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Тогда

$$\mathcal{R}(A) \leq \inf \left\{ r > r^*(A) : \operatorname{cl} \left(\bigcup_{\lambda \in \operatorname{Mot}(A, B_r)} \lambda(\operatorname{ess} V) \right) = \overline{B}_r \right\}.$$

Теорема 50 показывает, в частности, что многогранник в $\mathbb{R}^n$ является множеством Помпейю. Как уже отмечалось выше, это утверждение другими методами было получено ранее Л. Брауном, Б.М. Шрейбером, Б.А. Тейлором [26], и С.А. Вильямсом [15].

§ 36. Первые точные значения величины $\mathcal{R}(A)$. Куб в $\mathbb{R}^n$ стал первым множеством, для которого была решена проблема 1.

Теорема 51 (В.В. Волчков [60]– [62]; 1990, 1991, 1996). Пусть $r > \sqrt{n}/2$, $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и интеграл от f по любому единичному кубу из B_r равен нулю. Тогда:

1) если $r \geq \sqrt{n+3}/2$, то $f = 0$;

2) если $r < \sqrt{n+3}/2$, то существуют ненулевые функции класса $C^\infty(B_r)$ с указанным условием.

Таким образом, если A – единичный куб в $\mathbb{R}^n$, то

$$\mathcal{R}(A) = \frac{\sqrt{n+3}}{2},$$

причем значение $\mathcal{R}(A)$ достигается.

Далее были найдены значения $\mathcal{R}(A)$ для полушара $A = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, |x| \leq 1\}$ и правильного треугольника.

Теорема 52 (В.В. Волчков [62, 63]; 1993, 1996). Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и интеграл от f по любому единичному полушару из B_r равен нулю. Тогда:

1) если $r \geq \sqrt{5}/2$, то $f = 0$;

2) если $r < \sqrt{5}/2$, то существуют ненулевые функции класса $C^\infty(B_r)$ с указанным условием.

Таким образом, если A – единичный полушар в $\mathbb{R}^n$, то $\mathcal{R}(A) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, причем значение $\mathcal{R}(A)$ достигается.

Теорема 53 (В.В. Волчков [63], [64]; 1993, 1996). Пусть $n = 2$, $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и интеграл от f по любому правильному треугольнику со стороной a из B_r равен нулю. Тогда:

1) если $r \geq \sqrt{3}a/2$, то $f = 0$;

2) если $r < \sqrt{3}a/2$, то существуют ненулевые функции класса $C^\infty(B_r)$ с указанным условием.

Таким образом, если A – правильный треугольник со стороной a в $\mathbb{R}^2$, то $\mathcal{R}(A) = \frac{\sqrt{3}a}{2}$, причем значение $\mathcal{R}(A)$ достигается.

Доказательства теорем 51–53 и многих дальнейших результатов подобного типа используют технику рядов Фурье по сферическим гармоникам, инфинитезимальные операторы, методы функциональных уравнений, а также теорию преобразования Радона по гиперплоскостям.

§ 37. Значение $\mathcal{R}(A)$ для прямоугольного параллелепипеда. Пусть $n \geq 2$, $a_1, \dots, a_n$ — фиксированные положительные числа, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $r > |a|$, и

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : -a_\nu \leq x_\nu \leq a_\nu, \nu = 1, \dots, n\}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Как обычно, $[t]$ – целая часть числа $t \geq 0$, $\{t\} = t - [t]$. Положим

$$R(a, t) = (4a_1^2 t^2 - a_1^2 + |a|^2)^{1/2},$$

$$r_\nu(t) = 2a_\nu - (4a_1^2 t^2 - a_1^2 + a_\nu^2)^{1/2}, \quad \nu = 2, \dots, n.$$

Пусть $\zeta = \zeta(a_1, \dots, a_n) = \inf E$, где

$$E = \left\{ t \geq 1: 2[t] + [2\{t\}] \geq 1 + \frac{r_2(t)}{a_1}, \right. \\ \left. r_\nu(t) < \left(R^2(a, t) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}, \nu = 2, \dots, n \right\}.$$

Пример 11. Если A – куб, то $1 \in E$, поэтому $\zeta = 1$,

$$R(a, \zeta) = R(a, 1) = a_1 \sqrt{n+3} = |a| \sqrt{\frac{n+3}{n}}.$$

Теорема 54 (В.В. Волчков [65]– [67]; 1998–2000). Пусть $f \in \mathfrak{P}(A, B_r)$. Тогда:

- 1) если $r > R(a, \zeta)$, то $f = 0$;
- 2) если $n = 2$ и $r = R(a, \zeta)$, то $f = 0$;
- 3) если $n \geq 3$, $r = R(a, \zeta)$ и $r_n(\zeta) < (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2}$, то $f = 0$;
- 4) если $n \geq 3$, $r = R(a, \zeta)$ и $r_n(\zeta) \geq (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2}$, то f имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{если } |x| \geq r_n(\zeta) \\ c - 2ca_n (r_n^2(\zeta) - |x|^2)^{-1/2} / \pi, & \text{если } |x| < r_n(\zeta), \end{cases}$$

где c – комплексная постоянная; обратно, всякая функция такого вида при данных условиях принадлежит $\mathfrak{P}(A, B_r)$.

5) при $r < R(a, \zeta)$ существуют ненулевые функции класса $C^\infty(\overline{B_r}) \cap \mathfrak{P}(A, B_r)$.

В частности,

$$\mathcal{R}(A) = R(a, \zeta).$$

Следствие 14. Пусть $A = \{x \in \mathbb{R}^n: -a_1 \leq x_\nu \leq a_1, \nu = 1, \dots, n\}$ – куб. Тогда

$$\mathcal{R}(A) = a_1 \sqrt{n+3}.$$

§ 38. Значение $\mathcal{R}(A)$ для эллипсоида. Пусть $n \geq 2$, $a_1, \dots, a_n$ – положительные числа, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: \sum_{m=1}^n \frac{x_m^2}{a_m^2} \leq 1 \right\}.$$

Для $t \geq 1$ и $\nu = 1, \dots, n$ положим

$$r_\nu(t) = \begin{cases} a_\nu + \sqrt{(t^2 - 1)(a_n^2 - a_\nu^2)}, & \text{если } t < a_n/a_\nu \\ a_n t, & \text{если } t \geq a_n/a_\nu. \end{cases}$$

Пусть также $r_0(t) = 0$ и

$$M = \{t \geq 1: r_\nu(t) + r_{\nu-1}(t) > 2a_\nu, \nu = 1, \dots, n\}.$$

Теорема 55 (В.В. Волчков [68], [6]; 2001, 2003). Для любого эллипсоида $A \subset \mathbb{R}^n$, отличного от шара, имеет место равенство

$$\mathcal{R}(A) = a_n \inf M.$$

Отметим, что доказательство этого результата существенно использует технику микролокального анализа.

§ 39. Значение $\mathcal{R}(A)$ для многоугольников. Для произвольного многоугольника $A \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $\partial^* A$ множество, состоящее из всех точек $x \in \partial A$ удовлетворяющих хотя бы одному из следующих условий:

- 1) точка x является вершиной A ;
- 2) точка x принадлежит стороне A и является ортогональной проекцией начала координат на прямую, содержащую эту сторону;
- 3) точка x принадлежит стороне A , которая не содержит ортогональную проекцию начала координат на прямую, содержащую эту сторону.

Теорема 56 (В.В. Волчков [6, 69]; 2000, 2003). Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ – многоугольник, не имеющий пары параллельных сторон. Тогда

$$\mathcal{R}(A) = \inf \left\{ r > r^*(A) : \text{cl} \left(\bigcup_{\lambda \in \text{Mot}(A, B_r)} \partial^*(\lambda A) \right) = \overline{B_r} \right\}.$$

Для многоугольников, имеющих пару параллельных сторон, это утверждение, вообще говоря, неверно.

Теорема 57 (В.В. Волчков [6], 2003). Пусть A – правильный m -угольник с длиной стороны a . Тогда:

- (i) если $r \geq \rho(A)$ и $f \in \mathfrak{P}(A, B_r)$, то $f = 0$;
- (ii) если $r^*(A) < r < \rho(A)$, то существует ненулевая функция $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A, B_r)$.

В частности,

$$\mathcal{R}(A) = \rho(A) = \begin{cases} \frac{a \operatorname{ctg}(\pi/2m)}{2}, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ \frac{a \sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2(\pi/m)}}{2}, & \text{если } m \text{ четное.} \end{cases}$$

Теорема 58 (Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров [70], 2014). Пусть $h \in (0; \sqrt{3}/2)$, A – невыпуклый четырёхугольник с вершинами в точках $(0; 0)$, $(\sqrt{3}/2; -1/2)$, $(\sqrt{3}/2 - h; 0)$, $(\sqrt{3}/2; 1/2)$. Тогда

$$\mathcal{R}(A) = \begin{cases} \sqrt{3}/2 - h, & \text{если } h \in (0; \sqrt{3}/6); \\ \sqrt{h^2 + 1/4}, & \text{если } h \in [\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/2). \end{cases}$$

§ 40. Значение $\mathcal{R}(A)$ для выпуклых многогранников. Для выпуклого многогранника $A \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$q_A = \frac{r_*(A) + \rho(A)}{r^*(A)},$$

где $r_*(A)$ – радиус наибольшего замкнутого шара, содержащего в A . Отметим, что

$$\rho(A) > 2r_*(A), \quad \rho(A) \geq r^*(A).$$

Предложение 5. Имеет место оценка

$$1 < q_A < 3.$$

Кроме того, для любого $\zeta \in (1, 3)$ существует выпуклый многогранник $A_\zeta \subset \mathbb{R}^n$, такой что $q_{A_\zeta} = \zeta$.

Теорема 59 (В.В. Волчков [6, 69]; 2000, 2003). Пусть A – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$.

- (i) Если $q_A \geq 2$, то $\mathcal{R}(A) = \rho(A)$.
- (ii) Если $q_A > 2$, $r \geq \rho(A)$ и $f \in \mathfrak{P}(A, B_r)$, то $f = 0$.
- (iii) Если $q_A > 2$ и $r^*(A) < r < \rho(A)$, то существует ненулевая функция $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A, B_r)$.

Неравенство $q_A > 2$ выполнено для широкого класса выпуклых многогранников.

Предложение 6. Если

$$r^*(A) \leq \frac{3r_*(A)}{2},$$

то имеет место неравенство $q_A > 2$.

Рассмотрим теперь случай, когда $q_A < 2$.

Теорема 60 (В.В. Волчков [6, 69]; 2000, 2003). Для любого $\zeta \in (1, 2)$ существует выпуклый многогранник $A \subset \mathbb{R}^n$, такой что $q_A = \zeta$ и

$$\mathcal{R}(A) > \rho(A).$$

Теорема 61 (В.В. Волчков [6, 69]; 2000, 2003). Для любого $\zeta \in (1, 2)$ существует выпуклый многогранник $A \subset \mathbb{R}^n$, такой что $q_A = \zeta$ и

$$\mathcal{R}(A) = \rho(A).$$

Рассмотрим теперь случай, когда A – правильный многогранник в $\mathbb{R}^n$.

Правильные многогранники в $\mathbb{R}^2$ совпадают с правильными многоугольниками.

Определение 12. Пусть $n \geq 3$. Выпуклый n -мерный многогранник A в $\mathbb{R}^n$ называется правильным, если все его $(n-1)$ -мерные грани являются правильными многогранниками размерности $n-1$ и все его двугранные углы равны.

Для многих правильных и полуправильных многогранников A в $\mathbb{R}^n$ выполнено условие

$$q_A > 2.$$

Теорема 62 (В.В. Волчков [6, 69]; 2000, 2003). Пусть $n \geq 2$, A – правильный многогранник в $\mathbb{R}^n$, причем при $n \geq 4$ многогранник A не является симплексом или октаэдром. Тогда:

- (i) если $r \geq \rho(A)$ и $f \in \mathfrak{P}(A, B_r)$, то $f = 0$.
- (ii) если $r^*(A) < r < \rho(A)$, то существует ненулевая функция $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A, B_r)$.

§ 41. Значение $\mathcal{R}(A)$ для кругового сектора. Из теоремы 53 следует, что

$$\mathcal{R}(A) = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \text{если } A \text{ – единичный полукруг.}$$

Случай произвольного кругового сектора был исследован П.А. Машаровым [71].

Для $\theta \in (0, 2\pi)$ положим

$$A_\theta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1, -\theta/2 < \arg z < \theta/2\},$$

$$R_\theta = \begin{cases} 5/8, & \text{если } 0 < \theta \leq \arccos(4/5), \\ 1/(2 \cos \theta), & \text{если } \arccos(4/5) < \theta \leq \pi/4, \\ \sin \theta, & \text{если } \pi/4 < \theta < \pi/2, \\ 1, & \text{если } \pi/2 \leq \theta < 2\pi, \theta \neq \pi, \\ \sqrt{5}/2, & \text{если } \theta = \pi. \end{cases}$$

Теорема 63 (П.А. Машаров [71, 72]; 2000, 2001). Пусть $A = \bar{A}_\theta$. Тогда:

(i) если $\theta \in (0, \arccos(4/5)] \cup (\pi, 2\pi)$, $R > R_\theta$ и $f \in \mathfrak{P}(A, B_R)$, то $f = 0$;

(ii) если $\theta \in (\arccos(4/5), \pi]$, $R \geq R_\theta$ и $f \in \mathfrak{P}(A, B_R)$, то $f = 0$;

(iii) если $r^*(A) < R < R_\theta$, то существует ненулевая функция $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A, B_R)$.

В частности, $\mathcal{R}(\bar{A}_\theta) = R_\theta$ для любого $\theta \in (0, 2\pi)$.

§ 42. Значение $\mathcal{R}(A)$ для треугольника и многоугольника Рёло. Треугольник Рёло представляет собой пересечение трех равных кругов с центрами в вершинах правильного треугольника и радиусами, равными его стороне. Он является простейшей после круга фигурой постоянной ширины и обладает рядом экстремальных свойств.

Теорема 64 (П.А. Машаров [73], 2001). Пусть

$$A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \left| x_1 + ix_2 - e^{\frac{2\pi ik}{3}} \right| \leq \left| 1 - e^{\frac{2\pi i}{3}} \right|, \quad k = 1, 2, 3 \right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{R}(A) = \left| 1 - e^{\frac{2\pi i}{3}} \right|.$$

Таким образом, $\mathcal{R}(A)$ совпадает с шириной треугольника Рёло.

Утверждение теоремы 64 можно обобщить следующим образом.

Теорема 65 (Д.А. Зарайский). Пусть $m \in \mathbb{N}$,

$$A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \left| x_1 + ix_2 - e^{\frac{2\pi ik}{2m+1}} \right| \leq \left| 1 - e^{\frac{2\pi im}{2m+1}} \right|, \quad k = 1, \dots, 2m+1 \right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{R}(A) = \left| 1 - e^{\frac{2\pi im}{2m+1}} \right|.$$

§ 43. Значение $\mathcal{R}(A)$ для других множеств. Пусть

$$K_1(\alpha) = \frac{2(\sin(\alpha/2))^2 + \sin \alpha}{2 \sin(\alpha/2) + \cos(\alpha/2) - 1} - 1,$$

$$K_2(\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{5 - 2 \cos(\alpha/2) - 3 \cos^2(\alpha/2)}.$$

Тогда существует единственное число $\alpha_0 \in (0, \pi)$, такое что $K_1(\alpha_0) = K_2(\alpha_0)$. Рассмотрим круговой сегмент

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq \cos(\alpha/2)\}.$$

Теорема 66 (П.А. Машаров [74], 2000).

(a) Если $\alpha \in (0, \alpha_0)$, то $\mathcal{R}(A) \leq K_1(\alpha)$.

(b) Если $\alpha_0 \leq \alpha \leq 2\pi - 2 \arccos(1/7)$, то $\mathcal{R}(A) = K_2(\alpha)$.

(с) Если $2\pi - 2 \arccos(1/7) < \alpha < 2\pi$, то $\mathcal{R}(A) = 1 - \cos(\alpha/2)$.

Этот результат имеет многомерный аналог.

Теорема 67 (П.А. Машаров [75], 2011). Пусть A — сегмент шара единичного радиуса высоты h в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Тогда

$$\mathcal{R}(A) = \begin{cases} \sqrt{8h - 3h^2}/2, & 1 < h \leq 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2. \end{cases}$$

Приведем теперь значение $\mathcal{R}(A)$ для половины кругового конуса.

Положим

$$A = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_3 \leq h \left(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right), x_2 \geq 0 \right\},$$

где $h > 0$.

Теорема 68 (Л. В. Елец, П.А. Машаров [76], 2009).

(а) Если $h < 1$, то $\mathcal{R}(A) \leq \sqrt{1 + h^2/(1 + \sqrt{h^2 + 1})^2}$.

(б) Если $h > 3$, то $\mathcal{R}(A) = (5/8)h + 1/(8h)$.

Наконец, приведем значение $\mathcal{R}(A)$ для неодносвязного множества специального вида.

Пусть

$$K_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < a, |y| < a\},$$

$K_{a,b} = \overline{K_b \setminus K_a}$ — замыкание разности двух квадратов.

Теорема 69 (П.А. Машаров [77], 2016). Для любого $a \in (1/2; 1)$ имеет место равенство

$$\mathcal{R}(K_{a,1}) = \sqrt{a^2 + 2a + 2}.$$

§ 44. Экстремальные задачи для множеств Помпейю меньшей размерности.

Пусть $B_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $1 \leq m < n$. По аналогии с классом $\text{Comp}(B_r^n)$ определяется совокупность $\mathcal{P}_m(B_r^n)$ всех m -мерных множеств Помпейю в шаре B_r^n . При этом интеграл в (17) берется от непрерывной функции по m -мерной лебеговой мере.

Если A — m -мерное множество Помпейю в $\mathbb{R}^n$, то естественным образом возникает проблема нахождения величины

$$\mathcal{R}_{m,n}(A) = \inf\{r > 0 : A \in \mathcal{P}_m(B_r^n)\}.$$

Теорема 70 (П.А. Машаров [78], 2017). Пусть $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ — плоский квадрат со стороной 2. Тогда

$$\mathcal{R}_{2,3}(K) = \sqrt{41}/4.$$

Теорема 71 (П.А. Машаров [79], 2019). Пусть $n \geq 2$,

$$l_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq 1; x_j = 0, j = 2, 3, \dots, n\}$$

— единичный отрезок. Тогда

$$\mathcal{R}_{1,n}(l_0) = 5/8.$$

Будем говорить, что $l_0 \in \mathcal{P}_1^*(B_r^n)$, если для любой непрерывной вектор-функции

$$f = (f_1, \dots, f_n): B_r^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

из условия

$$\int_{\lambda l_0} f_1(x) dx_1 + \dots + f_n(x) dx_n = 0, \quad \lambda \in \text{Mot}(l_0, B_r^n)$$

следует, что $f \equiv 0$ в B_r^n .

Теорема 72 (П.А. Машаров [79], 2019). *При $n = 2$ имеет место равенство*

$$\inf\{r > 0: l_0 \in \mathcal{P}_1^*(B_r^2)\} = 1.$$

Другие окончательные результаты, связанные с экстремальными вариантами проблемы Помпейю можно найти в [5, 6].

§ 45. Приложения преобразования Помпейю. Как уже отмечалось, проблема Помпейю имеет глубокие связи с различными областями математики. Здесь мы покажем ее приложения к некоторым вопросам анализа и теории функций.

Пусть A – жорданова область в $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей. Говорят, что множество A обладает свойством Мореры, если всякая функция $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{C})$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\partial(\lambda A)} f(z) dz = 0$$

для почти всех $\lambda \in M(2)$ (относительно меры Хаара), является голоморфной в $\mathbb{C}$. Как было впервые обнаружено Л. Зальцманом [80], свойство Мореры тесно связано со свойством Помпейю.

Теорема 73 (L. Zalcman [80], 1972). *Пусть A – жорданова область в $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей, $D_r = \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$. Тогда:*

1) *Если $f \in L_{\text{loc}}(D_r)$, $r > \mathcal{R}(\bar{A})$ и*

$$\int_{\partial(\lambda A)} f(z) dz = 0 \quad \text{для почти всех } \lambda \in \text{Mot}(\bar{A}, D_r), \quad (19)$$

то функция f голоморфна в D_r . В частности, множество A обладает свойством Мореры тогда и только тогда, когда $\bar{A}$ имеет свойство Помпейю.

2) *Если $r^*(\bar{A}) < r < \mathcal{R}(\bar{A})$, то существует не голоморфная функция $f \in C^\infty(D_r)$, удовлетворяющая соотношению (19).*

Следующий результат усиливает известную теорему В.К. Дзядыка [81] о геометрическом описании голоморфных функций.

Теорема 74 (В.В. Волчков [61], 1991). *Пусть Ω – область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $A \in \text{Prmp}(\Omega)$, и пусть $u, v \in C^1(\Omega)$ (u, v – вещественнозначные функции). Тогда для того чтобы функция $u + iv$ была голоморфной или сопряженной к голоморфной в области Ω , необходимо и достаточно, чтобы все три поверхности*

$$z = u(x, y), \quad z = v(x, y), \quad z = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$$

имели над каждым множеством λA , $\lambda \in \text{Mot}(A, \Omega)$, равные площади.

Пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Говорят, что гомеоморфизм $f: \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ имеет N -свойство, если $\text{meas } f(E) = 0$ для любого измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathcal{U}_1$, такого что $\text{meas } E = 0$. Примером гомеоморфизма с N -свойством является всякий C^1 -диффеоморфизм.

Следующий результат показывает связь преобразования Помпейю с теорией отображений, сохраняющих меру.

Теорема 75 (В.В. Волчков [6], 2003). Пусть A – компактное множество в $\mathbb{R}^n$, такое что множество $\{r > 0: A \in \text{Pomp}(B_r)\}$ непусто. Пусть $X_1 = B_R$, $R > \mathcal{R}(A)$, $X_2 \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $f: X_1 \rightarrow X_2$ – гомеоморфизм с N -свойством, такой что

$$\text{meas } f(\lambda A) = \text{meas } \lambda A \quad \text{для всех } \lambda \in \text{Mot}(A, B_R).$$

Тогда $\text{meas } f(E) = \text{meas } E$ для любого измеримого по Лебегу множества $E \subset B_R$. При $r^*(A) < R < \mathcal{R}(A)$ это утверждение неверно.

Результаты о множествах Помпейю можно применить также к вопросам аппроксимации функций в L^p линейными комбинациями индикаторов.

Теорема 76. Пусть $A \in \text{Pomp}(\mathcal{U})$. Тогда система функций

$$\{\chi_A(\lambda^{-1}x)\}_{\lambda \in \text{Mot}(A, \mathcal{U})}$$

замкнута в пространстве $L^p(\mathcal{U})$ для любого $p \in [1, +\infty)$.

В заключение отметим, что ряд других приложений преобразования Помпейю содержится в [5, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М. Избранные задачи интегральной геометрии / И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, М. И. Граев. – М.: Добросвет, 2000. – 208 с.
2. Helgason S. Integral geometry and Radon transforms / S. Helgason. – New York: Springer, 2010. – 302 pp.
3. Pompeiu D. Sur certains systèmes d'équations linéaires et sur une propriété intégrale de fonctions de plusieurs variables / D. Pompeiu // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1929. – V. 188. – P. 1138–1139.
4. Zalcman L. Offbeat integral geometry / L. Zalcman // Amer. Math. Monthly. – 1980. – V. 87. – P. 161–175.
5. Volchikov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchikov, Vit. V. Volchikov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 pp.
6. Volchikov V. V. Integral geometry and convolution equations / V. V. Volchikov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
7. Volchikov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchikov, Vit. V. Volchikov. – London: Springer, 2009. – 672 pp.
8. Pompeiu D. Sur une propriété intégrale de fonctions de deux variables réelles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Acad. Royale Belgique (5). – 1929. – V. 15. – P. 265–269.
9. Nicolesco M. Sur un théorème de M. Pompeiu / M. Nicolesco // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1929. – V. 188. – P. 1370–1371.
10. Chakalov L. Sur un problème de D. Pompeiu / L. Chakalov // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1. – 1944. – V. 40. – P. 1–14, (Bulgarian; French summary).
11. Произволов В. В. Об интегралах, постоянных на конгруэнтных областях / В. В. Произволов // Мат. заметки. – 1977. – Т. 21, № 2. – С. 183–186.
12. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten / J. Radon // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. – 1917. – V. 69. – P. 262–277.
13. Nicolesco M. Sur un théorème de M. Pompeiu / M. Nicolesco // Bull. Sci. Acad. Royale Belgique (5). – 1930. – V. 16. – P. 817–822.
14. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973, 1974. – Т.1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – 296 с. / Т.2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.

15. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183–190.
16. Pompeiu D. Sur une propriété de fonctions continues dépendent de plusieurs variables / D. Pompeiu // Bull. Sci. Math. Ser. 2. – 1929. – V. 53. – P. 328–332.
17. Christov Chr. Sur un problème de M. Pompeiu / Chr. Christov // Mathematica (Timișoara). – 1948. – V. 23. – P. 103–107.
18. Brown L. A note on a problem of D. Pompeiu / L. Brown, F. Schnitzer and A. L. Shields // Math. Z. – 1968. – V. 105. – P. 59–61.
19. Ilieff L. Über ein Problem von D. Pompeiu / L. Ilieff // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.–Math., Livre 1. – 1946. – V. 42. – P. 83–96.
20. Szabo G. On functions having the same integral on congruent semidisks / G. Szabo // Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Comput. – 1982. – V. 3. – P. 3–9.
21. Christov Chr. Über eine Integraleigenschaft der Funktionen von zwei Argumenten / Chr. Christov // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.–Math., Livre 1. – 1943. – V. 39. – P. 395–408.
22. Малюгин С. А. О функциях с постоянным интегралом на конгруэнтных кубах / С. А. Малюгин // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24, № 3. – С. 339–341.
23. Ilieff L. Beitrag zum Problem von D. Pompeiu / L. Ilieff // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.–Math., Livre 1. – 1948. – V. 44. – P. 309–316.
24. Ilieff L. Beitrag zum Problem von D. Pompeiu / L. Ilieff // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.–Math., Livre 1. – 1949. – V. 45. – P. 111–114.
25. Christov Chr. Sur l'équation intégrale généralisée de M. Pompeiu / Chr. Christov // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.–Math., Livre 1. – 1949. – V. 45. – P. 167–178.
26. Brown L. Spectral synthesis and the Pompeiu problem / L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor // Ann. Inst. Fourier. – 1973. – V. 23. – P. 125–154.
27. Berenstein C. A. An inverse spectral theorem and its relation to the Pompeiu problem / C. A. Berenstein // J. d'Analyse Math. – 1980. – V. 37. – P. 128–144.
28. Волчков В. В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Матем. сб. – 2008. – Т. 199, № 8. – С. 29–60.
29. Volchkov V. V. Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on the phase space associated to the Heisenberg group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // D'Analyse Math. – 2008. – T. 105. – P. 43–123.
30. Williams S. A. Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property / S. A. Williams // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – V. 30. – P. 357–369.
31. Berenstein C. A. Harmonic analysis and the Pompeiu problem / C. A. Berenstein, M. Shahshahani // Amer. J. Math. – 1983. – V. 105. – P. 1217–1229.
32. Беренштейн К. А. Комплексный анализ и уравнения в свертках / К. А. Беренштейн, Д. Струпа. // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. – М.: ВИНТИ, 1989. – Т. 54. – С. 5–111.
33. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца / В. В. Волчков // Матем. сб. – 1993. – Т. 184, № 7. – С. 71–78.
34. Dalmasso R. Le problème de Pompeiu / R. Dalmasso // Sémin. Théor. Spectr. Géom. – 1999. – V. 17. – Univ. Grenoble I. Saint-Martin-d'Hères. – P. 69–79.
35. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 352, № 6. – P. 2723–2736.
36. Segala F. Stability of the convex Pompeiu sets / F. Segala // Ann. Mat. Pura. Appl. (IV) – 1998. – V. 175. – P. 295–306.
37. Yau S. T. Problem Section. – Seminar on differential geometry, edited by S. T. Yau / S. T. Yau // Annals of Math. Studies. – N.J.: Princeton, 1982. – 720 pp.
38. Lord Rayleigh. The theory of sound / Rayleigh. – MacMillan, 1877.
39. Garofalo N., Segala F. Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // J. d'Analyse Math. – 1991. – V. 56. – P. 1–28.
40. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem / L. Zalcman // Approximation by solutions of partial differential equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185–194.
41. Johnsson G. The Cauchy problem in $\mathbb{C}^N$ for linear second order partial differential equations with data on a quadric surface / G. Johnsson // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 344, № 1. – P. 1–48.
42. Brown L. A note on the Pompeiu problem for convex domains / L. Brown, J.-P. Kahane // Math. Ann. – 1982. – V. 259. – P. 107–110.

43. Caffarelli L. A. The regularity of free boundaries in higher dimensions / L. A. Caffarelli // *Acta Math.* – 1977. – V. 139. – P. 155–184.
44. Kinderlehrer D. Regularity in free boundary problems / D. Kinderlehrer, L. Nirenberg // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Classe di Scienze, Serie IV.* – 1977. – V. 4, № 2. – P. 373–391.
45. Garofalo N. A new result on the Pompeiu problem / N. Garofalo // *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. Fascicolo speciale* 1989. *P.D.E and Geometry* (1988). – P. 25–38.
46. Garofalo N. New results on the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1991. – V. 325, № 1. – P. 273–286.
47. Crowdy D. Constructing multiply connected quadrature domains / D. Crowdy, J. Marshall // *SIAM J. Appl. Math.* – 2004. – V. 64, № 4. – P. 1334–1359.
48. Quadrature Domains and their Applications. The Harold S. Shapiro Anniversary Volume / P. Ebenfelt, B. Gustafsson, D. Khavinson, M. Putinar (Editors). – Basel: Birkhäuser Verlag, 2005. – 306 pp.
49. Crowdy D. Solving Problems in Multiply Connected Domains / D. Crowdy. – London: Imperial College London, 2020. – 456 pp.
50. Aharonov D. Domains on which analytic functions satisfy quadrature identities / D. Aharonov, H. S. Shapiro // *J. d'Analyse Math.* – 1976. – V. 30. – P. 39–73.
51. Ebenfelt P. Some results on the Pompeiu problem / P. Ebenfelt // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* – 1993. – V. 18. – P. 323–341.
52. Gustafsson B. Quadrature identities and the Schottky double / B. Gustafsson // *Acta Appl. Math.* – 1983. – V. 1. – P. 209–240.
53. Garofalo N. Univalent functions and the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1994. – V. 346, № 1. – P. 137–146.
54. Berenstein C. A. Do solid tori have the Pompeiu property? / C. A. Berenstein, D. Khavinson // *Exposition. Math.* – 1997. – V. 15. – P. 87–93.
55. Ebenfelt P. Singularities of the solution to a certain Cauchy problem and an application to the Pompeiu problem / P. Ebenfelt // *Duke Math. J.* – 1993. – V. 71. – P. 119–142.
56. Ebenfelt P. Propagation of singularities from singular and infinite points in certain complex-analytic Cauchy problems and an application to the Pompeiu problem / P. Ebenfelt // *Duke Math. J.* – 1994. – V. 73, № 3. – P. 561–582.
57. Волчков В. В. Множества со свойством Помпейю на плоскости и сфере / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // *Мат. заметки.* – 2010. – Т. 87, № 1. – С. 69–82.
58. Berenstein C. A. Le problème de Pompeiu locale / C. A. Berenstein, R. Gay // *J. Analyse Math.* – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
59. Berenstein C. A. Inversion of the local Pompeiu transform / C. A. Berenstein, R. Gay, A. Yger // *J. Analyse Math.* – 1990. – V. 54. – P. 259–287.
60. Волчков В. В. О функциях с нулевыми интегралами по некоторым множествам / В. В. Волчков // *Доклады АН УССР. Сер. А.* – 1990. – № 8. – С. 9–11.
61. Волчков В. В. О функциях с нулевыми интегралами по кубам / В. В. Волчков // *Укр. мат. журн.* – 1991. – Т. 43, № 6. – С. 859–863.
62. Волчков В. В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю / В. В. Волчков // *Матем. заметки.* – 1996. – Т. 59, № 5. – С. 671–680.
63. Волчков В. В. Проблемы типа Помпейю на многообразиях / В. В. Волчков // *Доклады АН Украины.* – 1993. – № 11. – С. 9–12.
64. Волчков В. В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры / В. В. Волчков // *Матем. заметки.* – 1996. – Т. 60, № 6. – С. 804–809.
65. Волчков В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю / В. В. Волчков // *Матем. сб.* – 1998. – Т. 189, № 7. – С. 3–22.
66. Волчков В. В. О функциях с нулевыми интегралами по параллелепипедам / В. В. Волчков // *Доклады Академии Наук.* – 1999. – Т. 369. – С. 444–445.
67. Волчков В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю. II / В. В. Волчков // *Матем. сб.* – 2000. – Т. 191, № 5. – С. 3–16.
68. Волчков В. В. О функциях с нулевыми интегралами по эллипсоидам / В. В. Волчков // *Доклады Академии Наук.* – 2001. – Т. 376, № 2. – С. 158–160.
69. Волчков В. В. О полиэдрах с локальным свойством Помпейю / В. В. Волчков // *Доклады Академии Наук.* – 2000. – Т. 373, № 4. – С. 448–450.
70. Иванисенко Н. С. Локальный вариант проблемы Помпейю для невыпуклого четырехугольника / Н. С. Ива-

- нисенко, П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2014. – Т. 28. – С. 76–83.
71. Машаров П. А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю / П. А. Машаров // Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25–29.
72. Машаров П. А. Новая теорема типа Мореры в единичном круге / П. А. Машаров // Вестник Харьковского национального университета. Матем., прикл. матем., механика. – 2000. – Т. 475, № 49. – С. 126–132.
73. Машаров П. А. Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело / П. А. Машаров // Вісник Дніпропетровського університету. Математика. – 2001. – вип. 6. – С. 72–81.
74. Машаров П. А. О цилиндрах с локальным свойством Помпейю / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2000. – № 1. – С. 21–25.
75. Машаров П. А. Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полушар / П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 163–171.
76. Елец Л. В. Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю / Л. В. Елец, П. А. Машаров // Украинский математический журнал. – 2009. – Т. 61. – С. 61–72.
77. Машаров П. А. Радиус Помпейю для неодносвязного множества / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 87–97.
78. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для квадрата в трёхмерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 50–60.
79. Машаров П. А. О функциях с нулевыми интегралами по отрезкам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 2. – С. 82–90.
80. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem / L. Zalcman // Arch. Rational Anal. Mech. – 1972. – V. 47. – P. 237–254.
81. Дзядык В. К. Геометрическое определение аналитических функций / В. К. Дзядык // УМН. – 1960. – Т. 15. – Вып. 1(91). – С. 191–194.

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.

ELEMENTS OF OFFBEAT INTEGRAL GEOMETRY

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Let $\mathbb{R}^n$ be a Euclidean space of dimension $n \geq 2$, and let $M(n)$ be the motion group of $\mathbb{R}^n$. A compact set $A \subset \mathbb{R}^n$ of positive Lebesgue measure is called a Pompeiu set if the only function $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ satisfying the condition

$$\int_{g(A)} f(x) dx = 0$$

for all $g \in M(n)$ is $f = 0$. The classic Pompeiu problem is to describe all sets with the Pompeiu property. The paper provides a brief overview of the results on the indicated problem and its extremal analogs. Some applications of these results to problems of analysis and the function theory are shown.

Keywords: integral geometric transformations, Radon transforms, Pompeiu transform, extremal problems.

Волчков Валерий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
Донецкий национальный университет, г. Донецк,
ДНР

valeriyvolchkov@gmail.com

83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, ка-
федра математического анализа и дифференци-
альных уравнений

Volchkov Valery Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

Волчков Виталий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
Донецкий национальный университет, г. Донецк,
ДНР

volna936@gmail.com

83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, ка-
федра математического анализа и дифференци-
альных уравнений

Volchkov Vitaly Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

О ФУНКЦИЯХ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ

© 2021. Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков, Н. А. Ищенко

Изучается локальное преобразование Помпейю, ассоциированное с единичным шаром на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со сферической метрикой. Найдено точное условие, при котором функции из ядра указанного преобразования принадлежат ядру соответствующего глобального преобразования Помпейю на пространстве Мёбиуса $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Ключевые слова: преобразование Помпейю, сферические средние, сферические гармоники, функции Лежандра.

§ 1. Введение. Пусть B_R — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) радиуса R с центром в нуле, $V_r(B_R)$ — множество локально суммируемых в B_R функций, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам фиксированного радиуса r , лежащим в B_R ($0 < r < R$). Отметим, что $V_r(B_R)$ — ядро локального преобразования Помпейю, ассоциированное с шаром B_r и группой движений $M(n)$ пространства $\mathbb{R}^n$. Класс $V_r(B_R)$, а также различные его аналоги и обобщения активно изучались в течение последних пятидесяти лет в работах Ф. Йона, Д. Дельсарта, Д. Смита, Л. Зальцмана, К.А. Беренстейна и других авторов (см. обзоры [1]–[3] и монографии [4]–[6], содержащие обширную библиографию). В частности, важным направлением в рассматриваемой тематике является изучение условий, обеспечивающих стирание особенностей функций класса $V_r(B_R)$ и его аналогов. В настоящее время получено относительно немного результатов по указанной задаче. Все известные случаи относятся, в основном, к евклидову пространству со стандартной метрикой и касаются лишь функций специального вида (радиальные функции и их обобщения) (см. [4, часть 2, гл. 1, п. 1.6], [7, теорема 4]). Например, в работе [7] содержится следующий результат: если $R > 2r$, $s > n + 1$ ($s \in \mathbb{N}$), $f \in V_r(B_R) \cap C^s(B_R \setminus \{0\})$ и f радиальна, то существует функция $g \in C^{s-n-1}(B_R)$, равная f в $B_R \setminus \{0\}$.

В данной работе изучаются непрерывные функции на $\mathbb{R}^n$, имеющие нулевые интегралы по всем шарам из $\mathbb{R}^n$, конгруэнтным единичному шару относительно специальной группы мёбиусовых преобразований. Найдено точное условие, при котором функции рассматриваемого класса, доопределенные соответствующим образом в бесконечно удаленной точке, обладают подобным свойством на пространстве Мёбиуса $\overline{\mathbb{R}}^n$.

§ 2. Основные результаты. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geq 2$ состоит из точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$. Скалярное произведение элементов $x, y \in \mathbb{R}^n$ есть число

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Норма элемента $x \in \mathbb{R}^n$ есть неотрицательное число $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Множество $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ является замкнутым единичным шаром на $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Ортогональная группа $O(n)$, действующая в $\mathbb{R}^n$, состоит из линейных отображений τ пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих длины или (что эквивалентно) скалярное произведение векторов:

$$\langle \tau(x), \tau(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Далее, $dx = dx_1 \dots dx_n$ обозначает элемент обычной лебеговой меры.

Пространство Мёбиуса $\mathbb{R}^n$ получается присоединением к $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точки, т.е. $\overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Преобразования Мёбиуса пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$ строятся следующим образом (см., например, [8, гл. 3]).

Отражение (инверсия) относительно сферы $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$ ($a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$) определяется равенствами

$$\mathcal{J}(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a) = a + r^2(x - a)^*, \quad \mathcal{J}(a) = \infty, \quad \mathcal{J}(\infty) = a, \quad (1)$$

где $x^* = x/|x|^2$ — инверсия относительно единичной сферы $S(0, 1)$. В дальнейшем отображение $x \rightarrow x^*$ будем обозначать также $\mathcal{T}_\infty$. Легко проверить, что $\mathcal{J}^2(x) = \mathcal{J}(\mathcal{J}(x)) = x$ для всех $x \in \overline{\mathbb{R}}^n$. Кроме того, $\mathcal{J}$ — взаимно однозначное отображение $\overline{\mathbb{R}}^n$ на себя, причем $\mathcal{J}(x) = x$ в том и только том случае, когда $x \in S(a, r)$.

Отражение относительно гиперплоскости $P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = t\} \cup \{\infty\}$ ($a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$) определяется равенствами

$$\mathcal{R}(x) = x - 2(\langle x, a \rangle - t)a^*, \quad \mathcal{R}(\infty) = \infty. \quad (2)$$

При этом $\mathcal{R}^2(x) = x$ для всех $x \in \overline{\mathbb{R}}^n$, $\mathcal{R}$ — взаимно однозначное отображение $\overline{\mathbb{R}}^n$ на себя, и $\mathcal{R}(x) = x$ в том и только том случае, когда $x \in P(a, t)$.

Если $n = 2$, то при отождествлении $\overline{\mathbb{R}}^2$ с расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$ каждое из отражений (1) и (2) может быть представлено в комплексной координате z в виде

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Мёбиусово преобразование, действующее в $\overline{\mathbb{R}}^n$, есть произведение (суперпозиция) конечного числа отражений (относительно сфер и плоскостей). Например, растяжение $x \rightarrow kx$, $k > 0$, является мёбиусовым преобразованием, поскольку его можно получить как композицию отражений относительно сфер $S(0, 1)$ и $S(0, \sqrt{k})$. Отображение $f : \overline{\mathbb{R}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ является мёбиусовым тогда и только тогда, когда оно сохраняет двойное отношение

$$[x, y, u, v] = \frac{|x - u||y - v|}{|x - y||u - v|}$$

(см. [8, теорема 3.2.7]). Любая евклидова изометрия пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. функция вида $x \rightarrow \tau(x) + a$, $\tau \in O(n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, является мёбиусовым преобразованием. Множество всех мёбиусовых преобразований $\overline{\mathbb{R}}^n$ образует группу по умножению, которая называется общей мёбиусовой группой и обозначается $GM(\overline{\mathbb{R}}^n)$. Произвольный элемент из $GM(\overline{\mathbb{R}}^n)$ отображает каждую сферу и каждую гиперплоскость в некоторую сферу или гиперплоскость [8, теорема 3.2.1].

Произведение четного числа отражений сохраняет ориентацию, а произведение нечетного числа отражений меняет ориентацию на противоположную. Мёбиусова группа $M(\overline{\mathbb{R}}^n)$, действующая в $\overline{\mathbb{R}}^n$, состоит из всех сохраняющих ориентацию мёбиусовых преобразований из $GM(\overline{\mathbb{R}}^n)$. В частности, $M(\overline{\mathbb{R}}^2)$ совпадает с совокупностью отображений вида

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Для любого $a \in \mathbb{R}^n$ определим мёбиусово преобразование $\mathcal{T}_a \in \text{GM}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ по формуле

$$\mathcal{T}_a(x) = a - (1 + |a|^2)(x^* + a)^*. \quad (3)$$

Пусть $\mathcal{P}$ — множество в $\text{GM}(\overline{\mathbb{R}}^n)$, состоящее из всех отображений $\mathcal{T}_a$, инверсии $x \rightarrow x^*$ и ортогональных преобразований $\tau \in O(n)$. Обозначим через G подгруппу в $\text{GM}(\overline{\mathbb{R}}^n)$, порожденную множеством $\mathcal{P} \subset \text{GM}(\overline{\mathbb{R}}^n)$, т.е. пересечение всех подгрупп в $\text{GM}(\overline{\mathbb{R}}^n)$, содержащих $\mathcal{P}$. Как известно, G — это подгруппа всех элементов $\text{GM}(\overline{\mathbb{R}}^n)$, которые могут быть представлены как конечные произведения элементов $\mathcal{P}$ и их обратных.

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}^n$,

$$f(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

и

$$\int_{g(B)} f(x) dx = 0 \quad \text{для любого } g \in G : g(B) \subset \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Тогда

$$\int_{g(B)} f(x) dx = 0 \quad \text{для всех } g \in G. \quad (6)$$

Теорема 2. Существует функция $f \in C(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами:

1) функция f удовлетворяет условию (5);

2) при $x \rightarrow \infty$

$$f(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right);$$

3) для некоторого $g \in G$ интеграл в (6) расходится.

Отметим, что утверждение теоремы 2 показывает, что условие (4) в теореме 1 близко к окончательному.

§ 3. Обозначения и вспомогательные конструкции. Будем использовать следующие стандартные обозначения: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел соответственно, Γ — гамма-функция,

$$(z)_j = \frac{\Gamma(z+j)}{\Gamma(z)} \quad \text{— символ Похгаммера, } j \in \mathbb{Z}_+,$$

$F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, т.е.

$$F(a, b; c; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} z^j, \quad |z| < 1, \quad c \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},$$

P_ν^μ — функция Лежандра первого рода на $(-1, 1)$.

Функции P_ν^μ определены при любых $\nu, \mu \in \mathbb{C}$ равенством

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{\sqrt{\pi} 2^\mu}{(1-x^2)^{\mu/2}} \left(\frac{F\left(-\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \right)$$

$$- \frac{{}_2F_1\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}, 1+\frac{\nu-\mu}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}\right)}$$

(см. [9, гл. 3, формула 3.4 (11)]). Отметим, что при $\mu \notin \mathbb{N}$

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right)$$

(см. [9, гл. 3, формула 3.4 (6)]).

Функции P_ν^μ имеют следующее асимптотическое поведение вблизи особых точек (см. [9, гл. 3, формулы 3.9.2 (8) и 3.9.2 (14)]):

$$P_\nu^\mu(x) \sim \frac{2^{\mu/2}}{\Gamma(1-\mu)} (1-x)^{-\mu/2}, \quad x \rightarrow 1-0, \quad \mu \notin \mathbb{N}, \quad (7)$$

$$P_\nu^\mu(x) \sim 2^{-\mu/2} \frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1+\nu-\mu)\Gamma(-\nu-\mu)} (1+x)^{\mu/2}, \quad x \rightarrow -1+0, \quad \operatorname{Re} \mu < 0. \quad (8)$$

Пусть $\mathbb{S}^n = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} : |\xi| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в нуле, $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ – декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^n$. Стандартной метрикой на $\mathbb{S}^n$ является внутреннее расстояние

$$d(\xi, \eta) = \arccos \langle \xi, \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathbb{S}^n.$$

Группа изометрий сферы $\mathbb{S}^n$ совпадает с группой ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ (ограниченных на сферу).

Лемма 1. Для любой точки $p \in \mathbb{S}^n$ отображение

$$s_p : \xi \rightarrow 2\langle p, \xi \rangle p - \xi, \quad \xi \in \mathbb{S}^n$$

является инволютивной изометрией сферы $\mathbb{S}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $|p| = 1$, имеем

$$\begin{aligned} s_p^2(\xi) &= 2\langle p, s_p(\xi) \rangle p - s_p(\xi) = 2\langle p, 2\langle p, \xi \rangle p - \xi \rangle p - 2\langle p, \xi \rangle p + \xi = \\ &= 2(2\langle p, \xi \rangle |p|^2 - \langle p, \xi \rangle) p - 2\langle p, \xi \rangle p + \xi = \xi, \end{aligned}$$

т.е. отображение s_p является инволюцией. Далее,

$$\begin{aligned} \langle s_p(\xi), s_p(\eta) \rangle &= \langle 2\langle p, \xi \rangle p - \xi, 2\langle p, \eta \rangle p - \eta \rangle = \\ &= 4\langle p, \xi \rangle \langle p, \eta \rangle |p|^2 - 4\langle p, \xi \rangle \langle p, \eta \rangle + \langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, s_p — изометрия сферы $\mathbb{S}^n$. □

Введем сферические координаты $\theta_1, \dots, \theta_n$ на $\mathbb{S}^n$ ($0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_k \leq \pi$, $k \geq 2$) следующим образом:

$$\xi_1 = \sin \theta_1 \dots \sin \theta_n, \quad \xi_2 = \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_n, \quad \dots, \quad \xi_n = \cos \theta_{n-1} \sin \theta_n, \quad \xi_{n+1} = \cos \theta_n.$$

При указанной параметризации сферы элемент площади на $\mathbb{S}^n$ равен

$$d\Omega_n = \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-1} \sin^{n-1} \theta_n d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Таким образом, интеграл по поверхностной мере $d\Omega_n$ на $\mathbb{S}^n$ записывается в виде

$$\int_{\mathbb{S}^n} f(\xi) d\Omega_n(\xi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(\sin \theta_1 \dots \sin \theta_n, \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_n, \dots, \cos \theta_n) \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-1} \sin^{n-1} \theta_n d\theta_1 \dots d\theta_n. \quad (9)$$

Вложим $\overline{\mathbb{R}}^n$ в $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ как гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \mathbf{n} \rangle = 0\}$, где $\mathbf{n} = (0, \dots, 0, 1)$. Для любой точки u этой гиперплоскости обозначим через $\pi(u)$ точку пересечения проколотой сферы $\mathbb{S}^n \setminus \mathbf{n}$ и прямой, проходящей через u и полюс $\mathbf{n}$. Отображение π (стереографическая проекция) является биекцией $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{S}^n \setminus \mathbf{n}$. При этом полагают $\pi(\infty) = \mathbf{n}$. Хорошо известны следующие формулы перехода от прямоугольных координат к стереографическим координатам:

$$\pi(u) = \left(\frac{2u_1}{|u|^2 + 1}, \dots, \frac{2u_n}{|u|^2 + 1}, \frac{|u|^2 - 1}{|u|^2 + 1} \right), \quad (10)$$

$$\pi^{-1}(\xi) = \left(\frac{\xi_1}{1 - \xi_{n+1}}, \dots, \frac{\xi_n}{1 - \xi_{n+1}} \right), \quad (11)$$

где π^{-1} – отображение, обратное к π (см., например, [10, лекция 27]). В сферических координатах отображение π^{-1} определяется равенством

$$\pi^{-1}(\xi) = u = \left(\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-1} \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2}, \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1} \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2}, \dots, \cos \theta_{n-1} \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2} \right). \quad (12)$$

Лемма 2. Для якобиана отображения (12) справедливо равенство

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(\theta_1, \dots, \theta_n)} = \frac{(-1)^n}{2^n \sin^{2n}(\theta_n/2)} \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-1} \sin^{n-1} \theta_n.$$

Доказательство. Рассмотрим сферические координаты в $\mathbb{R}^n$:

$$x_1 = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-1} = ry_1, \quad x_2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1} = ry_2, \quad \dots, \quad x_n = r \cos \theta_{n-1} = ry_n.$$

Как известно (см., например, [11, гл. 3, § 6]),

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})} &= \begin{vmatrix} y_1 & r \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \dots & r \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ y_2 & r \frac{\partial y_2}{\partial \theta_1} & \dots & r \frac{\partial y_2}{\partial \theta_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & r \frac{\partial y_n}{\partial \theta_1} & \dots & r \frac{\partial y_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix} = \\ &= r^{n-1} \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^{n-3} \theta_{n-2} \sin^{n-2} \theta_{n-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку $u_j = y_j \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2}$, $1 \leq j \leq n$, то

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(\theta_1, \dots, \theta_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{n-1}} \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2} & \frac{-y_1}{2 \sin^2(\theta_n/2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial \theta_1} \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_{n-1}} \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2} & \frac{-y_n}{2 \sin^2(\theta_n/2)} \end{vmatrix}.$$

Прделаем в этом определителе следующие операции: 1) вынесем общий множитель из последнего столбца за знак определителя; 2) переставим n -й столбец с $(n-1)$ -м, затем $(n-1)$ -й столбец с $(n-2)$ -м и т.д. В результате имеем

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(\theta_1, \dots, \theta_n)} = \frac{(-1)}{2 \sin^2(\theta_n/2)} (-1)^{n-1} \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})} \Big|_{r=\operatorname{ctg}(\theta_n/2)}.$$

Отсюда и из (13) получаем равенство

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(\theta_1, \dots, \theta_n)} = \frac{(-1)^n}{2 \sin^2(\theta_n/2)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2} \right)^{n-1} \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^{n-3} \theta_{n-2} \sin^{n-2} \theta_{n-1},$$

которое влечет требуемую формулу. □

Из (12) находим

$$(1 + |u|^2)^n = \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta_n}{2} \right)^n = \frac{1}{\sin^{2n}(\theta_n/2)},$$

значит

$$\frac{2^n du_1 \dots du_n}{(1 + |u|^2)^n} = \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-1} \sin^{n-1} \theta_n d\theta_1 \dots d\theta_n = d\Omega.$$

Отсюда и из (9) получаем

$$\begin{aligned} 2^n \int_D f(u) \frac{du}{(1 + |u|^2)^n} &= \int_{\pi(D)} f \left(\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-1} \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2}, \dots, \cos \theta_{n-1} \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{2} \right) d\Omega = \\ &= \int_{\pi(D)} (f \circ \pi^{-1})(\sin \theta_1 \dots \sin \theta_n, \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_n, \cos \theta_n) d\Omega = \\ &= \int_{\pi(D)} (f \circ \pi^{-1})(\xi) d\Omega_n(\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

Лемма 3. Для $a \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\mathcal{T}_a(x) = \frac{(1 + |a|^2)(a - x) - a|a - x|^2}{[x, a]^2}, \quad (15)$$

$$\mathcal{T}_a(x) = \frac{(1 + 2\langle x, a \rangle - |x|^2)a - (1 + |a|^2)x}{[x, a]^2}, \quad (16)$$

где

$$[x, a] = |x||x^* + a| = |a||x + a^*| = \sqrt{1 + 2\langle x, a \rangle + |a|^2|x|^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение инверсии $x \longrightarrow x^*$ показывает, что

$$(x^* + a)^* = \frac{x^* + a}{|x^* + a|^2} = \frac{x + a|x|^2}{|x|^2|x^* + a|^2} = \frac{x + a|x|^2}{1 + 2\langle x, a \rangle + |a|^2|x|^2}.$$

Отсюда и из (3) получаем (15), (16). $\square$

Лемма 4. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{n} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда

$$\pi \mathcal{T}_a \pi^{-1} = s_b, \quad (17)$$

$$\pi \mathcal{T}_\infty \pi^{-1} = -s_{\mathbf{n}}, \quad (18)$$

где

$$b = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \langle \pi a, \mathbf{n} \rangle)}} (\pi a - \mathbf{n}). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (11)

$$\pi^{-1}(\xi) = \frac{\xi'}{1 - \xi_{n+1}}, \quad |\pi^{-1}(\xi)|^2 = \frac{1 + \xi_{n+1}}{1 - \xi_{n+1}}, \quad \text{где } \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Отсюда и из (16) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a \pi^{-1}(\xi) &= \frac{2(\langle \xi', a \rangle - \xi_{n+1})a - (1 + |a|^2)\xi'}{1 + |a|^2 + (|a|^2 - 1)\xi_{n+1} + 2\langle \xi', a \rangle}, \\ |\mathcal{T}_a \pi^{-1}(\xi)|^2 + 1 &= \frac{2(1 + |a|^2)}{1 + |a|^2 + (|a|^2 - 1)\xi_{n+1} + 2\langle \xi', a \rangle}, \\ |\mathcal{T}_a \pi^{-1}(\xi)|^2 - 1 &= \frac{2(1 - |a|^2)\xi_{n+1} - 4\langle \xi', a \rangle}{1 + |a|^2 + (|a|^2 - 1)\xi_{n+1} + 2\langle \xi', a \rangle}. \end{aligned}$$

Следовательно (см. (10)),

$$\begin{aligned} \pi \mathcal{T}_a \pi^{-1}(\xi) &= \left(\frac{2(\langle \xi', a \rangle - \xi_{n+1})a}{1 + |a|^2} - \xi', \frac{1 - |a|^2}{1 + |a|^2} \xi_{n+1} - \frac{2\langle \xi', a \rangle}{1 + |a|^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\langle \pi a, \xi \rangle - \xi_{n+1}}{1 - (\pi a)_{n+1}} (\pi a)' - \xi', -\langle \pi a, \xi \rangle \right). \end{aligned} \quad (20)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle b, \xi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - (\pi a)_{n+1})}} (\langle \pi a, \xi \rangle - \xi_{n+1}), \\ s_b(\xi) &= 2\langle b, \xi \rangle b - \xi = \left(\frac{\langle \pi a, \xi \rangle - \xi_{n+1}}{1 - (\pi a)_{n+1}} (\pi a)' - \xi', -\langle \pi a, \xi \rangle \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Сравнивая (20) и (21), получаем (17).

Далее,

$$\mathcal{T}_\infty \pi^{-1} \xi = \frac{\xi'}{1 + \xi_{n+1}}, \quad |\mathcal{T}_\infty \pi^{-1} \xi|^2 = \frac{1 - \xi_{n+1}}{1 + \xi_{n+1}}, \quad \frac{|\mathcal{T}_\infty \pi^{-1} \xi|^2 - 1}{|\mathcal{T}_\infty \pi^{-1} \xi|^2 + 1} = -\xi_{n+1}.$$

Поэтому

$$\pi \mathcal{T}_\infty \pi^{-1} \xi = (\xi', -\xi_{n+1}) = \xi - 2\langle \xi, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n},$$

что доказывает (18). $\square$

Следствие 1. *Отображения $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_\infty$ являются инволюциями. В частности, каждый элемент группы G может быть представлен как конечное произведение элементов из $\mathcal{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (17), (18) и леммы 1 имеем

$$\pi \mathcal{T}_a^2 \pi^{-1} = (\pi \mathcal{T}_a \pi^{-1})^2 = \text{id}, \quad \pi \mathcal{T}_\infty^2 \pi^{-1} = (\pi \mathcal{T}_\infty \pi^{-1})^2 = \text{id},$$

где id — тождественное отображение. Отсюда получаем требуемое утверждение. $\square$

Лемма 5. *Пусть $\tau \in O(n)$. Тогда $\pi \tau \pi^{-1} = \tau^*$, где $\tau^*(\xi) = (\tau(\xi'), \xi_{n+1})$. Кроме того, $\pi(-\mathcal{T}_\infty) \pi^{-1} = -\text{id}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x = (1 - \xi_{n+1})^{-1} \tau(\xi')$ имеем

$$|x|^2 = \frac{1 + \xi_{n+1}}{1 - \xi_{n+1}}, \quad \frac{2}{1 + |x|^2} = 1 - \xi_{n+1}, \quad \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} = \xi_{n+1}.$$

Отсюда (см. (11))

$$\begin{aligned} \pi \tau \pi^{-1}(\xi) &= \pi(x) = \pi \left(\frac{\tau(\xi')_1}{1 - \xi_{n+1}}, \dots, \frac{\tau(\xi')_n}{1 - \xi_{n+1}} \right) = \\ &= (\tau(\xi')_1, \dots, \tau(\xi')_n, \xi_{n+1}) = (\tau(\xi'), \xi_{n+1}) = \tau^*(\xi). \end{aligned}$$

Далее,

$$\pi^{-1}(-\text{id})\pi(u) = \pi^{-1} \left(-\frac{2u_1}{1 + |u|^2}, \dots, -\frac{2u_n}{1 + |u|^2}, \frac{1 - |u|^2}{1 + |u|^2} \right) = -\frac{u}{|u|^2} = -\mathcal{T}_\infty(u),$$

что и требовалось. $\square$

Лемма 6. *Группа $O(n+1)|_{\mathbb{S}^n}$ изоморфна группе G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим инъективное отображение f равенством $f(g^*) = \pi^{-1} g^* \pi$, $g^* \in O(n+1)|_{\mathbb{S}^n}$. Ясно, что $f(g_1^* g_2^*) = f(g_1^*) f(g_2^*)$.

Предположим, что $g^*(\mathbf{n}) = \pi a$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда (см. (19))

$$\begin{aligned} s_b g^*(\mathbf{n}) &= s_b(\pi a) = 2 \langle b, \pi a \rangle b - \pi a = \\ &= \frac{2(\pi a - \mathbf{n})}{\sqrt{2(1 - \langle \pi a, \mathbf{n} \rangle)}} \frac{1}{\sqrt{2(1 - \langle \pi a, \mathbf{n} \rangle)}} (\langle \pi a, \pi a \rangle - \langle \pi a, \mathbf{n} \rangle) - \pi a = \\ &= \frac{\pi a - \mathbf{n}}{1 - \langle \pi a, \mathbf{n} \rangle} (1 - \langle \pi a, \mathbf{n} \rangle) - \pi a = -\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Поэтому $g^* = s_b(-\tau^*)$ для некоторого $\tau \in O(n)$, где $\tau^* = \pi \tau \pi^{-1}$. Отсюда и из лемм 4, 5 имеем

$$f(g^*) = \pi^{-1} s_b \pi \pi^{-1}(-\text{id}) \pi \pi^{-1} \tau^* \pi = \mathcal{T}_a(-\mathcal{T}_\infty) \tau \in G.$$

Аналогично, если $g^*(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, то $g^* = \tau^*$ и $f(g^*) = \tau \in G$. Таким образом, f является гомоморфизмом $O(n+1)|_{\mathbb{S}^n}$ в G .

Далее, запишем любой элемент $g \in G$ в виде $g = g_1 \dots g_k$, где $g_j \in \mathcal{P}$, $1 \leq j \leq k$. В силу лемм 4, 5 для $g^* = \pi g \pi^{-1}$ получаем

$$g^* = \pi g_1 \pi^{-1} \dots \pi g_k \pi^{-1} \in O(n+1)|_{\mathbb{S}^n}, \quad f(g^*) = g.$$

Следовательно, f — изоморфизм групп $O(n+1)|_{\mathbb{S}^n}$ и G . $\square$

Положим $S^* = \mathbb{S}^n \setminus \{-\mathbf{n}\}$, $S^{**} = S^* \setminus \{\mathbf{n}\}$, $H = \{\xi \in \mathbb{S}^n : \xi_{n+1} \geq 0\}$, $H^* = \{\xi \in \mathbb{S}^n : \xi_{n+1} \leq 0\}$. Множество H (соответственно, H^*) является верхней (соответственно, нижней) полусферой на $\mathbb{S}^n$.

Лемма 7. Пусть $f \in C(-S^*)$,

$$f(\xi) = o\left(\frac{1}{(1 - \xi_{n+1})^{(n+1)/2}}\right) \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \mathbf{n}$$

и

$$\int_{g^*(H^*)} f(\xi) d\Omega_n(\xi) = 0 \quad \text{для любого} \quad g^* \in O(n+1) : g^*(H^*) \subset -S^*.$$

Тогда функция f является чётной на S^{**} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию F на S^* равенством

$$F(\xi) = f(-\xi), \quad \xi \in S^*.$$

Тогда $F \in C(S^*)$ и

$$F(\xi) = o\left(\frac{1}{(1 + \xi_{n+1})^{(n+1)/2}}\right) \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow -\mathbf{n}.$$

Кроме того, для любой полусферы H_1 из S^* имеем

$$\begin{aligned} \int_{H_1} F(\xi) d\Omega_n(\xi) &= \int_{H_1} f(-\xi) d\Omega_n(\xi) = \\ &= \int_{-H_1} f(\eta) d\Omega_n(\eta) = 0, \end{aligned}$$

поскольку полусфера $-H_1$ лежит в $-S^*$. Значит (см. [12]), функция F является чётной на S^{**} . Отсюда следует требуемое утверждение. $\square$

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$, $\sigma = \xi'/|\xi'| \in \mathbb{S}^{n-1}$. Введем обозначения: $\mathcal{H}_k$ — пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$, рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ (см. [13, гл. 4, § 2]), a_k — размерность $\mathcal{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}$ ($1 \leq l \leq a_k$) — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{D}'(\mathcal{S})$ — пространство распределений на подобласти $\mathcal{S} \subset \mathbb{S}^n$.

Всякой функции $f(\xi) = f(\sigma \sin \theta_n, \cos \theta_n) \in C(S^*)$ соответствует ряд Фурье

$$f(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f^{k,l}(\xi),$$

где

$$f^{k,l}(\xi) = f_{k,l}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad f_{k,l}(\theta_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\zeta \sin \theta_n, \cos \theta_n) \overline{Y_l^{(k)}(\zeta)} d\Omega_{n-1}(\zeta).$$

Определим класс $\mathcal{F}$ равенством

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C(S^*) : \int_{g^*(H)} f(\xi) d\Omega_n(\xi) = 0 \quad \forall g^* \in O(n+1) : g^*(H) \subset S^* \right\}.$$

Лемма 8. Пусть $f \in C(S^*)$. Тогда для того чтобы $f \in \mathcal{F}$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имело место равенство

$$f^{k,l}(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} (\sin \theta_n)^{1-n/2} P_{2m+n/2-1}^{-n/2-k+1}(\cos \theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad c_{m,k,l} \in \mathbb{C},$$

где ряд сходится в пространстве распределений $\mathcal{D}'(S^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [14, теорема 9.1] следует, что $f \in \mathcal{F}$ в том и только том случае, когда для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$

$$f^{k,l}(\xi) = \sum_{\nu \in \mathcal{Z}} c_{\nu,k,l} (\sin \theta_n)^{1-n/2} P_{\nu+n/2-1}^{-n/2-k+1}(\cos \theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad c_{\nu,k,l} \in \mathbb{C},$$

где $\mathcal{Z} = \{\nu > 1 : P_{\nu+n/2-1}^{-n/2}(0) = 0\}$ и ряд сходится в $\mathcal{D}'(S^*)$. Учитывая, что

$$P_{\nu+n/2-1}^{-n/2}(0) = \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\nu\right) \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+n+1}{2}\right)}$$

(см. [9, гл. 3, формула 3.4 (20)]), отсюда получаем требуемое. $\square$

§ 4. Доказательство теорем 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $g \in G$, $g^* = \pi g \pi^{-1}$. Из (10), (11) следует, что $\pi^{-1}(H^*) = B$, $g(B) = \pi^{-1}g^*\pi(B) = \pi^{-1}g^*(H^*)$. Далее,

$$g(B) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{в том и только том случае, если} \quad g^*(H^*) \subset -S^*,$$

поскольку $\pi^{-1}(\mathbf{n}) = \infty$. Обозначим $\varphi(x) = f(x)(1 + |x|^2)^n$. Тогда

$$\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = o(|x|^{n+1}) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (22)$$

По условию теоремы 1 имеем

$$\int_{g(B)} \frac{\varphi(x)}{(1 + |x|^2)^n} dx = 0 \quad \text{для любого} \quad g \in G : g(B) \subset \mathbb{R}^n.$$

Интеграл слева преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} 2^n \int_{g(B)} \frac{\varphi(x) dx}{(1 + |x|^2)^n} &= \int_{\pi g(B)} (\varphi \circ \pi^{-1})(\xi) d\Omega_n(\xi) = \\ &= \int_{g^*(H^*)} \varphi(\pi^{-1}(\xi)) d\Omega_n(\xi) \end{aligned} \quad (23)$$

(см. (14)). Поэтому

$$\int_{g^*(H^*)} \varphi(\pi^{-1}(\xi)) d\Omega_n(\xi) = 0 \quad \text{для любого} \quad g^* \in O(n+1) : g^*(H^*) \subset -S^*.$$

При этом $\varphi \circ \pi^{-1} \in C(-S^*)$.

Проверим, что

$$\varphi(\pi^{-1}(\xi)) = o\left(\frac{1}{(1 - \xi_{n+1})^{\frac{n+1}{2}}}\right) \quad \text{при } \xi \rightarrow \mathbf{n}. \quad (24)$$

В силу (11) это равенство равносильно соотношению

$$\varphi\left(\frac{\xi_1}{1 - \xi_{n+1}}, \dots, \frac{\xi_n}{1 - \xi_{n+1}}\right) = o\left(\frac{1}{(1 - \xi_{n+1})^{\frac{n+1}{2}}}\right) \quad \text{при } \xi \rightarrow \mathbf{n}.$$

Теперь на основании (10) равенство (24) можно записать в виде

$$\varphi(x) = o\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Последнее соотношение эквивалентно второму условию в (22):

$$\varphi(x) = o\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{1 + |x|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\right) = o((1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}) = o(|x|^{n+1}), \quad x \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из леммы 7 получаем

$$\int_{g^*(H^*)} \varphi(\pi^{-1}(\xi)) d\Omega_n(\xi) = 0 \quad \text{для любого } g^* \in O(n+1).$$

Значит,

$$\int_{g(B)} \frac{\varphi(x) dx}{(1 + |x|^2)^n} = 0 \quad \text{для любого } g \in G,$$

что завершает доказательство теоремы 1. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Введем функции h и f следующим образом (см. (7)):

$$h(x) = \left(1 - \left(\frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2} - \frac{n}{4}} P_{n/2+1}^{-n/2-2} \left(\frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2}\right) Y_1^{(3)}\left(-\frac{x}{|x|}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad h(0) = 0;$$

$$f(x) = \frac{h(x)}{(1 + |x|^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Покажем, что функция f удовлетворяет всем требованиям в теореме 2. Из (23) имеем

$$2^n \int_{g(B)} f(x) dx = 2^n \int_{g(B)} \frac{h(x) dx}{(1 + |x|^2)^n} = \int_{-g^*(H^*)} h(\pi^{-1}(-\xi)) d\Omega_n(\xi). \quad (25)$$

Вычислим $h(\pi^{-1}(-\xi))$. Используя (11), получаем

$$h(\pi^{-1}(-\xi)) = (1 - \xi_{n+1}^2)^{\frac{1}{2} - \frac{n}{4}} P_{n/2+1}^{-n/2-2}(\xi_{n+1}) Y_1^{(3)}\left(\frac{\xi'}{|\xi'|}\right).$$

В сферических координатах функция $h(\pi^{-1}(-\xi))$ записывается в виде

$$h(\pi^{-1}(-\xi)) = (\sin \theta_n)^{1-n/2} P_{n/2+1}^{-n/2-2}(\cos \theta_n) Y_1^{(3)}(\sigma). \quad (26)$$

Равенство (26) и лемма 8 показывают, что функция $h(\pi^{-1}(-\xi))$ имеет нулевые интегралы по всем полусферам, лежащим в S^* . Отсюда и из (25) видно, что f удовлетворяет первому требованию в теореме 2.

Далее, при $x \rightarrow \infty$

$$P_{n/2+1}^{-n/2-2} \left(\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right) \sim 2^{n/4+1} \frac{\Gamma(n/2+2)}{(n+3)!} \left(1 + \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right)^{-n/4-1} = \frac{\Gamma(n/2+2)}{(n+3)!} (1+|x|^2)^{n/4+1} \quad (27)$$

(см. (8)). Следовательно, $h(x) = O(|x|^{n+1})$ и $f(x) = O(|x|^{1-n})$ при $x \rightarrow \infty$. Значит, функция f удовлетворяет второму требованию в теореме 2. Наконец,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx &= 2^{1-n/2} \int_1^\infty \frac{\rho^{n/2}}{(1+\rho^2)^{n/2+1}} \left| P_{n/2+1}^{-n/2-2} \left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} \right) \right| d\rho \times \\ &\times \int_{S^{n-1}} |Y_1^{(3)}(\zeta)| d\Omega_{n-1}(\zeta) = +\infty \end{aligned}$$

(см. (27)). Поэтому функция f удовлетворяет и третьему требованию в теореме 2. Таким образом, теорема 2 полностью доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem / L. Zalcman. – Approximation by solutions of partial differential equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185–194.
2. Беренштейн К. А. Комплексный анализ и уравнения в свёртках / К. А. Беренштейн, Д. Струппа. // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. – М.: ВИНТИ, 1989. – Т. 54. – С. 5–111.
3. Zalcman L. Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" / L. Zalcman. – Contemp. Math. Radon Transform and Tomography. – 2001. – V. 278. – P. 69–74.
4. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
5. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 672 pp.
6. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 pp.
7. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций / В. В. Волчков. – Мат. сб. – 1997. – Т. 188, № 9. – С. 13–30.
8. Бердон А. Геометрия дискретных групп / А. Бердон. – М.: Наука, 1986. – 300 с.
9. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973, 1974. – Т.1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – 296 с.
10. Постников М. М. Аналитическая геометрия / М. М. Постников. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
11. Ильин В. А. Математический анализ, Т. II / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М.: МГУ, 1987. – 360 с.
12. Волчков Вит. В. Проблема устранимости для функций с нулевыми шаровыми средними / Вит. В. Волчков, Н. П. Волčkova. // Сиб. мат. ж. – 2017. – Т. 58, № 3. – С. 543–552.
13. Стейн И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 334 с.
14. Волчков Вит. В. Локальная теорема о двух радиусах на сфере / Вит. В. Волчков. // Алгебра и анализ. – 2004. – Т. 16, № 73. – С. 60–91.

Поступила в редакцию 14.05.2021 г.

ON FUNCTIONS WITH ZERO INTEGRALS OVER BALLS

N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov, N. A. Ischenko

We study the local Pompeiu transform associated with the unit ball on the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ with a spherical metric. An exact condition is found under which the functions from the kernel of the indicated transformation belong to the kernel of the corresponding global Pompeiu transform on the Möbius space $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Keywords: Pompeiu transform, spherical means, spherical harmonics, Legendre functions.

Волчкова Наталья Петровна

кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический
университет», г. Донецк, ДНР
volna936@gmail.com

Volchkova Natalia Petrovna

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk National Technical
University, Donetsk, DPR

Волчков Виталий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
ГОУ ВПО «Донецкий национальный универси-
тет», г. Донецк, ДНР
volna936@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ,
кафедра математического анализа и дифференци-
альных уравнений

Volchkov Vitaly Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

Ищенко Наталья Александровна

аспирант кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений
ГОУ ВПО «Донецкий национальный универси-
тет», г. Донецк, ДНР
nataandRap@mail.ru

Ischenko Natalia Alexandrovna

Postgraduate student of the Department of
Mathematical Analysis and Differential Equations,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 519.632.4

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2021. *Е. С. Глушанков*

Предложен подход к решению задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами при разрывных граничных условиях. Решение задачи строилось с использованием конформных отображений, функций комплексной переменной и метода наименьших квадратов. Проведены численные исследования значений погрешности решения на границе области.

Ключевые слова: задача Дирихле, уравнение в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами, разрывные граничные условия, точка разрыва, погрешность решения.

§ 1. Введение. Уравнения в частных производных и краевые задачи широко используются при описании различных математических моделей [1]. Для случая, когда коэффициенты уравнения, а также начальные и граничные условия являются непрерывными функциями, теория разработана очень глубоко, известно множество аналитических, численных, численно-аналитических методов решения этих уравнений [2–4]. Однако при описании реальных процессов условие непрерывности коэффициентов уравнения или граничных условий может не выполняться [5].

В настоящее время разработаны некоторые подходы к решению краевых задач с разрывными граничными условиями [5], получены аналитические решения некоторых задач [6–8].

В данной работе предложен численно-аналитический метод решения задачи Дирихле для однородного эллиптического двумерного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с разрывными граничными условиями. Считается, что неизвестная функция на границе может иметь конечное число точек разрыва первого рода. При решении задачи использовались конформные отображения, функции комплексной переменной и метод наименьших квадратов. Оценка корректности метода выполнялась на основе численных исследований погрешности решения в точках границы области. В качестве примера, построено решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с различными разрывными граничными условиями в круговой области, проведены численные исследования погрешности полученного решения.

§ 2. Постановка задачи. Пусть в многосвязной области S задана задача Дирихле:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$u|_{\partial S} = \varphi(x, y). \quad (2)$$

Многосвязная область S ограничена внешним контуром L_0 и внутренними эллиптическими контурами L_l ($l = \overline{1, L}$) с центрами в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l , b_l , углами поворота φ_l (рис. 1). Контур L_l могут располагаться произвольно относительно

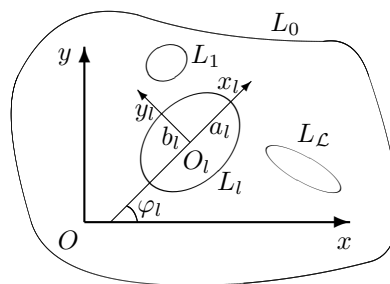


Рис. 1

друг друга, в том числе, касаться и пересекаться, образуя более сложные криволинейные контуры. Если внешний контур L_0 отсутствует, то область S является бесконечной. A, B, C — заданные постоянные. Функция $\varphi(x, y)$ кусочно-непрерывна на ∂S и имеет конечное число точек разрыва первого рода $M_{lj}^0(x_{lj}^0, y_{lj}^0)$ ($l = \overline{0, \mathcal{L}}, j = \overline{1, J_l}, J_l$ — количество точек разрыва функции $\varphi(x, y)$ на контуре L_l).

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов L_l имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy —

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + a_l \cos \varphi_l \cos \theta - b_l \sin \varphi_l \sin \theta, \\ y &= y_{0l} + a_l \sin \varphi_l \cos \theta + b_l \cos \varphi_l \sin \theta. \end{aligned}$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) — параметр уравнения эллипса, заданного в параметрической форме.

Тогда для каждой из точек разрыва M_{lj}^0 существует значение этого параметра θ_{lj}^0 такое, что

$$\begin{aligned} x_{ij}^0 &= x_{0i} + a_i \cos \varphi_i \cos \theta_{ij}^0 - b_i \sin \varphi_i \sin \theta_{ij}^0, \\ y_{ij}^0 &= y_{0i} + a_i \sin \varphi_i \cos \theta_{ij}^0 + b_i \cos \varphi_i \sin \theta_{ij}^0. \end{aligned}$$

Представим кусочно-непрерывную функцию $\varphi(x, y)$ в виде совокупности функций, заданных на каждой эллиптической дуге, ограниченной точками разрыва M_{lj}^0 :

$$\varphi(x, y) = \{ \varphi_{lj}(\theta) \mid l = \overline{0, \mathcal{L}}, j = \overline{1, J_l}, \theta \in (\theta_{lj}^0, \theta_{l,j+1}^0) \}.$$

§ 3. Решение задачи. Если для решения задачи использовать функции комплексной переменной, то общее решение уравнения (1) представимо в виде [3, 9]

$$u = F_1(z_1) + F_2(z_2),$$

где $F_1(z_1), F_2(z_2)$ — аналитические функции обобщенных комплексных переменных z_1, z_2 , определяемых выражениями $z_k = x + \mu_k y$ ($k = \overline{1, 2}$), в которых μ_k — корни характеристического уравнения

$$C\mu^2 + 2B\mu + A = 0. \quad (3)$$

Поскольку уравнение (1) является эллиптическим и его коэффициенты, а следовательно, и коэффициенты характеристического уравнения (3) являются вещественными, то корни уравнения (3) являются комплексно-сопряженными:

$$\mu_1 = -\frac{B}{C} + i \frac{\sqrt{AC - B^2}}{C}, \quad \mu_2 = -\frac{B}{C} - i \frac{\sqrt{AC - B^2}}{C}.$$

Т.е. $\mu_2 = \overline{\mu_1}$, тогда $z_2 = \overline{z_1}$ и $F_2(z_2) = \overline{F_1(z_1)}$. Следовательно, общее решение уравнения (1) имеет вид [3, 9]

$$u = 2 \operatorname{Re} F_1(z_1), \quad (4)$$

в котором

$$z_1 = x + \mu_1 y. \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к определению функции $F_1(z_1)$ при заданных условиях на границе области S .

В общем случае многосвязной области S функцию $F_1(z_1)$ можно представить в виде [9]

$$F_1(z_1) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{1l} w_{1l}(z_1) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} F_{1l}(z_1), \quad (6)$$

в котором D_{1l} — вещественные постоянные, определяемые из граничных условий; $w_{1l}(z_1) = \ln(z_1 - z_{1l})$; z_{1l} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (5) произвольным точкам внутри контуров L_{1l} , получаемых из L_l преобразованием (5) (например, центры; c_{1ln} — комплексные постоянные, определяемые из граничных условий. Функция $F_{10}(z_1)$, голоморфная во внутренней области контура L_{10} , представима в виде ряда по полиномам Фабера [9]:

$$F_{10}(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{10n} \left(\frac{z_1 - z_{10}}{R_{10}} \right)^n.$$

Функции $F_{1l}(z_1)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), голоморфные во внешних областях контуров L_{1l} , представимы в виде рядов Лорана по отрицательным степеням [9]:

$$F_{1l}(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{1ln} \zeta_{1l}^{-n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}).$$

Здесь ζ_{1l} ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$) — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{1l}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{1l} :

$$z_1 = z_{1l} + R_{1l} \left(\zeta_{1l} + \frac{m_{1l}}{\zeta_{1l}} \right), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} z_{1l} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{1l} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_1 \sin \varphi_l) + i b_l(\sin \varphi_l - \mu_1 \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{1l} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_1 \sin \varphi_l) - i b_l(\sin \varphi_l - \mu_1 \cos \varphi_l)}{2R_{1l}}. \end{aligned}$$

Таким образом, функцию $F_1(z_1)$ можно записать в виде

$$F_1(z_1) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{1l} w_{1l}(z_1) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\text{sgn } l}^{\infty} c_{1ln} \varphi_{1ln}(z_1), \quad (8)$$

в котором $\varphi_{10n}(z_1) = \left(\frac{z_1 - z_{10}}{R_{10}} \right)^n$; $\varphi_{1ln}(z_1) = \zeta_{1l}^{-n}$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$).

Функция $F_1(z_1)$ должна удовлетворять граничному условию

$$2 \operatorname{Re} F(t_1) = \varphi(t). \quad (9)$$

Неизвестные постоянные D_{1l} и c_{1ln} , входящие в функцию (8), определяются из граничного условия (9) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$, M_l — количество выбранных точек на контуре L_l), в которых следует удовлетворять граничному условию (9). В каждом из бесконечных рядов в (8) сохраним по N_l слагаемых.

После подстановки функции (8) в граничное условие (9) для определения неизвестных постоянных D_{1l} и c_{1ln} получается система линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} w_{1l}(t_{1im}) D_{1l} + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{N_l} \varphi_{1ln}(t_{1im}) c_{1ln} = \varphi(t_{im}) \quad (10)$$

$$(i = \overline{0, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_i}),$$

где $t_{1im} = x_{im} + \mu_1 y_{im}$, $t_{im} = t_{im}(x_{im}, y_{im})$.

Если количество уравнений в системе уравнений (10) превысит количество неизвестных, т.е. $\sum_{l=0}^{\mathcal{L}} M_l > \mathcal{L} + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} N_l$, то получим переопределенную систему линейных алгебраических уравнений. После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [10, 11] станут известными постоянные D_{1l} и c_{1ln} , а следовательно, будет известна и функция $F_1(z_1)$.

§ 4. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круговой области. Пусть в области S с круговым контуром L_0 радиуса a (рис. 2) задана задача Дирихле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (11)$$

$$u|_{L_0} = \varphi(x, y). \quad (12)$$

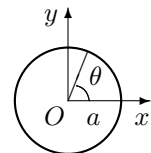


Рис. 2

В этом случае имеем $\mathcal{L} = 0$, $\varphi_0 = 0$, $A = C = 1$, $B = 0$, тогда $\mu_1 = i$, $R_{10} = a/2$, $z_{10} = 0$. Тогда функция $F_1(z_1)$ принимает вид

$$F_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{10n} \left(\frac{z_1}{a/2} \right)^n. \quad (13)$$

Были проведены численные исследования погрешности решения (4), (13) задачи (11)–(12). Исследовалось влияние количества M_0 точек M_{0m} на контурах L_0 , для которых составлялась система линейных алгебраических уравнений (10), а также количества N_0 слагаемых, сохраняемых в ряду в (13), на значения погрешности решения.

Количество точек M_{0m} на контурах L_0 , для которых составлялась система линейных алгебраических уравнений (10), и количество членов N_0 в рядах в функции (13) увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности.

Приведем результаты численных исследований для некоторых случаев граничной функции $\varphi(x, y)$.

1. Ступенчатая функция. Пусть $\varphi(x, y) = \varphi(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$. В этом случае точками разрыва являются точки $\theta_{01}^0 = 0$ и $\theta_{02}^0 = \pi$. Выберем на контуре L_0 равномерную сетку точек M_{0m} , в которых будем удовлетворять граничным условиям. Точки разрыва не могут входить в выбранную систему.

В табл. 1 приведены значения погрешностей решения задачи в некоторых характерных точках контура L_0 с центральным углом θ , отсчитываемым от положительного направления оси Ox , в зависимости от значения M_0 количества точек, составляющих систему M_{0m} , и значения N_0 количества слагаемых, сохраняемых в ряду (13).

Таблица 1

Значения погрешностей решения задачи в точках контура L_0 в случае ступенчатой функции

Знач. M_0	Знач. N_0	Точка (θ , рад.)							
		$\pi/36$	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
100	10	0,23641	0,03405	–0,07140	0,02066	0,00426	–0,01928	0,02772	–0,03047
	20	0,04809	–0,07395	0,01503	–0,01612	–0,01931	–0,00739	0,00732	0,01372
	30	–0,03512	0,00733	0,00651	–0,01438	–0,00067	0,00837	0,00013	–0,00725
	40	–0,04220	0,02032	–0,01029	–0,00219	0,00458	–0,00207	–0,00160	0,00325
	45	–0,03718	0,01167	–0,00036	–0,00286	–0,00269	–0,00091	0,00106	0,00191
200	20	0,03457	–0,08164	0,01922	–0,01748	–0,02160	–0,00838	0,00814	0,01535
	40	–0,07370	0,03356	–0,01576	–0,00617	0,00971	–0,00410	–0,00350	0,00688
	60	0,00720	–0,01350	–0,01389	0,00725	–0,00513	0,00419	–0,00376	0,00363
	80	0,02029	0,00434	–0,00204	–0,00188	0,00230	–0,00089	–0,00086	0,00162
	90	0,00996	–0,00449	–0,00115	–0,00158	0,00011	0,00091	–0,00002	–0,00079
500	50	–0,03567	–0,02392	0,02128	0,00653	0,00019	–0,00348	–0,00550	–0,00615
	100	–0,02067	0,00158	0,00575	–0,00264	–0,00389	–0,00161	0,00142	0,00275
	150	0,01545	0,00471	0,00028	–0,00290	–0,00003	0,00168	0,00001	–0,00145
	200	–0,00049	–0,00366	–0,00108	–0,00069	0,00092	–0,00037	–0,00034	0,00065
	225	0,00394	0,00074	–0,00048	–0,00037	0,00047	–0,00018	–0,00017	0,00033
1000	100	–0,02380	0,00202	0,00634	–0,00298	–0,00435	–0,00180	0,00159	0,00308
	200	0,00157	–0,00754	–0,00254	–0,00140	0,00195	–0,00079	–0,00071	0,00138
	300	0,00469	–0,00195	–0,00281	0,00145	–0,00103	0,00084	–0,00075	0,00073
	400	–0,00365	0,00151	–0,00067	–0,00031	0,00046	–0,00019	–0,00017	0,00032
	450	0,00042	–0,00091	–0,00005	–0,00032	0,00000	0,00018	0,00000	–0,00016
2000	200	0,00200	–0,00840	–0,00287	–0,00156	0,00218	–0,00088	–0,00080	0,00154
	400	–0,00751	0,00308	–0,00136	–0,00068	0,00097	–0,00040	–0,00036	0,00069
	600	–0,00195	–0,00108	0,00140	0,00073	0,00051	0,00042	0,00038	0,00036
	800	0,00150	0,00019	–0,00030	–0,00017	0,00023	–0,00009	–0,00008	0,00016
	900	–0,00091	0,00046	–0,00031	0,00016	–0,00011	0,00009	–0,00008	0,00008
5000	500	0,00657	0,00269	0,00117	–0,00062	–0,00087	–0,00035	0,00032	0,00062
	1000	0,00239	0,00026	–0,00054	–0,00027	0,00039	–0,00016	–0,00014	0,00028
	1500	0,00081	–0,00042	–0,00056	0,00029	–0,00021	0,00017	–0,00015	0,00015
	2000	0,00011	–0,00035	–0,00012	–0,00007	0,00009	–0,00004	–0,00003	0,00006
	2250	0,00002	–0,00018	0,00000	–0,00006	0,00000	0,00004	0,00000	–0,00003

Вблизи точек разрыва погрешность решения задачи является наибольшей, особенно при небольших значениях M_0 и N_0 . Данное явление является аналогичным явлению Гиббса в рядах Фурье [12]. А на удалении от точек разрыва погрешность уменьшается на 1–2 порядка. При значениях $M_0 > 500$ и $N_0 > 150$ погрешность становится незначительной, в т.ч. и вблизи точек разрыва. Увеличение значений M_0 и N_0 приводит к сужению области, где явление Гиббса существенно влияет на результаты.

В точках контура L_0 , принадлежащих второй координатной четверти, погрешность решения равна погрешности в точках, симметричных относительно оси Oy . В точках контура L_0 , принадлежащих третьей и четвертой координатным четвертям, значения погрешности решения равны с точностью до знака значениям погрешности в точках, симметричных относительно оси Ox .

В точках разрыва не производилось удовлетворение граничному условию задачи. Однако поскольку приближенное решение задачи по построению является непрерывной функцией, то можно получить значения функции решения и в точках разрыва — получены значения 0, 5, равные среднему значению функции $\varphi(\theta)$.

2. *Спиральная функция.* Пусть $\varphi(x, y) = \varphi(\theta) = \theta/2\pi$. В этом случае точкой разрыва является точка $\theta_{01}^0 = 0$. Выберем на контуре L_0 равномерную сетку точек M_{0m} , в которых будем удовлетворять граничным условиям. Точка разрыва не может входить в выбранную систему.

В табл. 2 приведены значения погрешностей решения задачи в некоторых характерных точках контура L_0 с центральным углом θ , отсчитываемым от положительного направления оси Ox , в зависимости от значения M_0 количества точек, составляющих систему M_{0m} , и значения N_0 количества слагаемых, сохраняемых в ряду (13).

Таблица 2

Значения погрешностей решения задачи в точках контура L_0 в случае спиральной функции

Знач. M_0	Знач. N_0	Точка (θ , рад.)							
		$\pi/36$	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$
100	10	–0,24840	–0,05025	0,06154	–0,00452	–0,02061	0,02913	0,01524	0,01635
	20	–0,05515	0,07581	–0,00842	0,02137	0,01646	–0,00081	–0,00686	0,00285
	30	0,03311	–0,00392	–0,01026	0,01341	0,00445	–0,00627	0,00363	–0,00377
	40	0,04271	–0,02131	0,01167	0,00049	–0,00391	0,00311	–0,00162	–0,00067
	45	0,03658	–0,01079	–0,00033	0,00198	0,00229	0,00137	–0,00095	0,00039
500	50	0,03854	0,02171	–0,02249	–0,00881	–0,00330	–0,00012	0,00308	0,00312
	100	0,01973	–0,00020	–0,00686	0,00126	0,00332	0,00242	–0,00138	0,00057
	150	–0,01579	–0,00531	–0,00101	0,00271	0,00076	–0,00126	0,00073	–0,00073
	200	0,00082	0,00375	0,00077	0,00093	–0,00078	–0,00001	–0,00032	–0,00013
	225	–0,00383	–0,00058	0,00060	0,00021	–0,00040	0,00027	–0,00016	–0,00007
1000	100	0,02276	–0,00047	–0,00757	0,00143	0,00371	0,00269	–0,00154	0,00064
	200	–0,00088	0,00772	0,00190	0,00191	–0,00166	–0,00001	–0,00069	–0,00029
	300	–0,00500	0,00162	0,00276	–0,00136	0,00088	–0,00063	–0,00036	0,00015
	400	0,00370	–0,00160	0,00080	0,00015	–0,00039	0,00028	–0,00016	–0,00007
	450	–0,00050	0,00090	0,00013	0,00030	–0,00008	–0,00014	0,00008	0,00008
5000	500	–0,00645	–0,00247	–0,00089	0,00085	0,00074	0,00000	–0,00031	0,00013
	1000	–0,00230	–0,00013	0,00065	0,00014	–0,00033	0,00024	–0,00014	–0,00006
	1500	–0,00075	0,00048	0,00055	–0,00027	0,00018	–0,00013	–0,00007	0,00003
	2000	–0,00008	0,00036	0,00009	0,00009	–0,00008	0,00000	–0,00003	–0,00001
	2250	–0,00003	0,00018	0,00002	0,00006	–0,00002	–0,00003	0,00002	0,00002

Как и в предыдущем случае, вблизи точки разрыва погрешность решения является наибольшей, особенно при небольших значениях M_0 и N_0 , а вдали от точки разрыва погрешность уменьшается на несколько порядков. При значениях $M_0 > 500$ и $N_0 > 150$ погрешность становится незначительной, в т.ч. и вблизи точки разрыва.

В точке разрыва не производилось удовлетворение граничному условию задачи. Однако поскольку приближенное решение задачи по построению является непрерывной функцией, то можно получить значения функции решения и в точках разрыва — получено значение 0, 5, равное среднему значению функции $\varphi(\theta)$.

Полученные значения погрешности в случае спиральной функции в большинстве точек не превосходят погрешность в случае ступенчатой функции. Это связано с меньшим количеством точек разрыва спиральной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.
2. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
3. Гурса Э. Курс математического анализа : в 3 т. / Э. Гурса. – М.–Л.: ГТТИ, 1933. – Т. 3, ч. 1. – 276 с.
4. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1965. – 716 с.
5. Линейные уравнения математической физики / В.М. Бабиш, М.Б. Капелевич, С.Г. Михлин и др. – М.: Наука, 1964. – 368 с. – (Справочная математическая библиотека: Т. 10)
6. Ильин А.М. Разностные методы решения краевых задач с малым параметром и разрывными граничными условиями / А.М. Ильин // Труды Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. – 1976. – Вып. 21. – С. 5–18.
7. Йованович Б.С. О методе сеток решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в случае разрывных граничных условий / Б.С. Йованович // Математический вестник. – 1981. – Кн. 5(18)(33), № 1. – С. 74–84.
8. Krutitskii P.A. The Dirichlet problem for the Laplacian with discontinuous boundary data in a 2D multiply connected exterior domain / P.A. Krutitskii // Computers and Mathematics with Applications. – 2008. – Vol. 56, No. 12. – P. 3221–3235.
9. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – К.–Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
10. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
11. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моултер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
12. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1964. – 772 с.

Поступила в редакцию 14.05.2021 г.

A NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR SOLVING ONE DIRICHLET PROBLEM WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS

E. S. Glushankov

An approach is proposed for solving the Dirichlet problem for second-order elliptic PDE with constant coefficients with discontinuous boundary conditions. The solution is built with using the conformal mappings, complex functions, the least squares. The numerical studies are obtained for the error of the solution on the bound of the problem's domain.

Keywords: Dirichlet problem, second order PDE with constant coefficients, discontinuous boundary conditions, point of discontinuity, error of the solution.

Глушанков Евгений Сергеевич

кандидат физико-математических наук,
ГОУ ВПО «Донецкий национальный универси-
тет», г. Донецк, ДНР
evgenij.glushankov@gmail.com
283001, г. Донецк, пр. Гурова, 14, Главный корпус
ДонНУ, кафедра теории вероятностей и математи-
ческой статистики

Glushankov Eugene Sergeevich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 517.5+519.213

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЁННОСТИ КУСОЧНО ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

© 2021. В. П. Заставный, А. Д. Манов

В работе рассматривается следующая задача для функций, которые являются положительно определёнными на вещественном линейном пространстве E (класс $\Phi(E)$). Пусть $f, g \in \Phi(E)$ такие, что $f(0) = g(0)$ и $f \neq g$. Требуется найти множество $P_{f,g} := \{\lambda \in \mathbb{C} : f_\lambda \in \Phi(E)\}$, где $f_\lambda(x) := \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Рассмотрен также частный случай этой задачи, когда $g(x) \equiv f(ax)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, и требуется найти множество $P_{f,a} := P_{f,g}$. При $f(x) = (1 - |x|)_+$ получается задача о положительной определённости кусочно линейной функции. Доказано, что множество $P_{f,g}$ всегда является отрезком на вещественной прямой. Для случая $E = \mathbb{R}^n$ найдены формулы для концов этого отрезка. Приведены примеры функций $f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, для которых найдено множество $P_{f,a}$, в том числе и примеры функций, которые зависят от евклидовой нормы (радиальные положительно определённые функции).

Ключевые слова: положительно определённые функции, теорема Бохнера, преобразование Фурье, функции Бесселя.

§ 1. Введение. Постановка задач и формулировка результатов. Пусть E – нетривиальное вещественное линейное пространство. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ называется положительно определённой на E ($f \in \Phi(E)$), если при любом $m \in \mathbb{N}$, для любых точек $x_1, \dots, x_m$ из E и для любой системы комплексных чисел $c_1, c_2, \dots, c_m$ выполняется неравенство $\sum_{k,j=1}^m c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0$.

В [1] авторами рассмотрена и решена следующая задача Р. М. Тригуба. Для заданных $\alpha \in (0, 1)$ и $h \in \mathbb{R}$ чётную функцию $f_{\alpha,h}$ определим следующим образом: $f_{\alpha,h}(x) = 0$ при $x \in [1, +\infty)$, а на каждом отрезке $[0, \alpha]$ и $[\alpha, 1]$ функция $f_{\alpha,h}(x)$ является линейной и $f_{\alpha,h}(0) = 1$, $f_{\alpha,h}(\alpha) = h$, $f_{\alpha,h}(1) = 0$. Для каждого фиксированного $\alpha \in (0, 1)$ требуется найти множество всех $h \in \mathbb{R}$, для которых кусочно-линейная функция $f_{\alpha,h}$ является положительно определённой на $\mathbb{R}$.

Эту же задачу можно сформулировать иначе. Пусть $f(x) = (1 - |x|)_+$ и $a > 1$. Требуется определить все вещественные λ , при которых функция $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(ax)$ является положительно определённой на $\mathbb{R}$. Связь между старыми и новыми параметрами определяется из равенств: $\alpha a = 1$, $h = \lambda(1 - \alpha)$. В таком виде задача легко обобщается для положительно определённой на $\mathbb{R}^n$ функции f . При этом метод решения остаётся тот же. Кроме того, функцию $f(ax)$ можно заменить на $g(x)$.

Проблема 1. Пусть $f, g \in \Phi(E)$ такие, что $f(0) = g(0)$ и $f \neq g$. Требуется найти множество $P_{f,g} := \{\lambda \in \mathbb{C} : f_\lambda \in \Phi(E)\}$, где $f_\lambda(x) := \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Замечание 1. Рассмотрим частный случай задачи 1, когда $g(x) \equiv f(ax)$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Можно ограничиться случаем $a > 1$. Если f непрерывна в нуле по любому лучу, т.е. $f(\tau x) \rightarrow f(0)$ при $\tau \rightarrow +0$ для всех $x \in E$, то условие $f \neq g$ эквивалентно условию $f(x) \neq f(0)$.

Проблема 2. Пусть $f \in \Phi(E)$ такая, что f непрерывна в нуле по любому лучу и $f(x) \neq f(0)$. Требуется найти множество $P_{f,a} := \{\lambda \in \mathbb{C} : f_\lambda \in \Phi(E)\}$, где $f_\lambda(x) := \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(ax)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $a > 1$.

В следующей теореме доказано, что множество $P_{f,g}$ (и, значит, множество $P_{f,a}$) всегда является отрезком на вещественной прямой.

Теорема 1. Пусть $f, g \in \Phi(E)$ такие, что $f(0) = g(0)$ и $f \not\equiv g$. Тогда множество $P_{f,g}$ имеет вид $P_{f,g} = [c, d] \subset \mathbb{R}$, где $c \leq 0$, $d \geq 1$.

В следующих теоремах 2 и 3 получено решение задач 1 и 2 для случая $E = \mathbb{R}^n$. Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ определяется по формуле

$$\widehat{f}(t) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(t,x)} dx, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $(x, t) = x_1 t_1 + \dots + x_n t_n$ – скалярное произведение двух векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $t = (t_1, \dots, t_n)$ из $\mathbb{R}^n$. Пусть $N_{\widehat{f}} := \{t \in \mathbb{R}^n : \widehat{f}(t) = 0\}$ – множество нулей $\widehat{f}$.

Теорема 2. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap \Phi(\mathbb{R}^n)$, $f(0) = g(0)$, $f \not\equiv g$, а $N_{\widehat{f}}$, $N_{\widehat{g}}$ – множества нулей $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$ соответственно. Тогда

1.° Если $N_{\widehat{g}} \subset N_{\widehat{f}}$, то $P_{f,g} = [1/m, 1/M]$, где

$$\begin{aligned} m &:= \inf_{\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{g}}} \left(1 - \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{g}(t)} \right) = 1 - \sup_{\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{g}}} \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{g}(t)}, \quad m < 0; \\ M &:= \sup_{\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{g}}} \left(1 - \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{g}(t)} \right) = 1 - \inf_{\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{g}}} \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{g}(t)}, \quad 0 < M \leq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Если дополнительно $N_{\widehat{f}} \not\subset N_{\widehat{g}}$, то $P_{f,g} = [1/m, 1]$.

2.° Если $N_{\widehat{g}} \not\subset N_{\widehat{f}}$, то $P_{f,g} = [0, 1/M]$, где M определено по формуле (1). Если дополнительно $N_{\widehat{f}} \not\subset N_{\widehat{g}}$, то $P_{f,g} = [0, 1]$.

Замечание 2. Отметим, что проблема 1 без нормировки $f(0) = g(0)$ и самое главное без предположения $f \not\equiv g$ рассматривалась в работе [2, Proposition 1 (iii); Corollary 2], в которой рассмотрен частный случай, когда $N_{\widehat{g}} = \emptyset$.

Теорема 3. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap \Phi(\mathbb{R}^n)$, $f(0) \neq 0$, а $N_{\widehat{f}}$ – множество нулей $\widehat{f}$ и $a > 1$. Тогда

1.° Если $aN_{\widehat{f}} \subset N_{\widehat{f}}$, то $P_{f,a} = [1/(1 - a^n M(a)), 1/(1 - a^n m(a))]$, где

$$\begin{aligned} M(a) &:= \sup_{\mathbb{R}^n \setminus aN_{\widehat{f}}} \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} = \sup_{\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{f}}} \frac{\widehat{f}(at)}{\widehat{f}(t)}, \quad M(a) > \frac{1}{a^n}; \\ m(a) &:= \inf_{\mathbb{R}^n \setminus aN_{\widehat{f}}} \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} = \inf_{\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{f}}} \frac{\widehat{f}(at)}{\widehat{f}(t)}, \quad 0 \leq m(a) < \frac{1}{a^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если дополнительно $N_{\widehat{f}} \not\subset aN_{\widehat{f}}$, то $P_{f,a} = [1/(1 - a^n M(a)), 1]$.

2.° Если $aN_{\widehat{f}} \not\subset N_{\widehat{f}}$, то $P_{f,a} = [0, 1/(1 - a^n m(a))]$, где $m(a)$ определено по формуле (2). Если дополнительно $N_{\widehat{f}} \not\subset aN_{\widehat{f}}$, то $P_{f,a} = [0, 1]$.

В главе 2 данной работы приведены вспомогательные утверждения и факты. В главах 3 и 4 приведены доказательства теорем 1, 2 и 3. В главе 5 приведены примеры функций $f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, для которых найдено множество $P_{f,a}$, в том числе и примеры функций, которые зависят от евклидовой нормы $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$. Другие примеры можно найти в работе [2, Table 1].

В связи с теоремой 3 представляет интерес описание и конструкция множеств $V \subset \mathbb{R}$, для которых при некотором $\mu > 0$, $\mu \neq 1$, справедливо включение $\mu V \subset V$. В лемме 2 доказано, что если множество V с указанным условием является арифметической прогрессией с точностью до бесконечно малого слагаемого, то с некоторого номера это слагаемое равно нулю. Аналогичное утверждение для почти геометрической прогрессии доказано в лемме 3.

В главе 6 приведены конструкция и примеры положительно определённых функций f с компактным носителем, для которых $aN_{\hat{f}} \subset N_{\hat{f}}$.

Отметим, что задача, близкая к задаче 2, рассмотрена в работах [3, 4].

§ 2. Вспомогательные утверждения и факты. Отметим следующие свойства функций из $\Phi(E)$. Пусть $f, f_i \in \Phi(E)$. Тогда:

- 1) $|f(x)| \leq f(0)$, $\overline{f(-x)} = f(x)$, $x \in E$;
- 2) $|f(x+y) - f(x)|^2 \leq 2f(0)(f(0) - \operatorname{Re} f(y))$, $x, y \in E$;
- 3) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \overline{f}, \operatorname{Re} f, f_1 f_2 \in \Phi(E)$, где $\lambda_i \geq 0$;
- 4) если для всех $x \in E$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: g(x)$, то $g \in \Phi(E)$.

Свойства 1) – 4) хорошо известны (см., например, [5–9]).

Для непрерывных положительно определённых функций на $\mathbb{R}^n$ справедлива теорема Бохнера-Хинчина (см., например, [5–9], которая утверждает, что $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,t)} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Из этой теоремы не сложно получить (см., например, [9, Theorem 1.9.6], [10, гл. I, Следствие 1.26]) следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье: *если $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$, то $f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{f}(t) \geq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^n$, и в этом случае $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$.*

Для функций $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ (относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^n$) определена свертка

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

которая интегрируема на $\mathbb{R}^n$ и $\widehat{f * g}(t) := (\sqrt{2\pi})^n \widehat{f}(t) \widehat{g}(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ (см., например, [10]). А если дополнительно одна из функций ограничена на $\mathbb{R}^n$, то их свертка $f * g$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Отсюда вытекает следующий известный факт: *если функция $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и ограничена на $\mathbb{R}^n$, то функция $h := g * \tilde{g} \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$, где $\tilde{g}(x) := \overline{g(-x)}$, и значит $h \in \Phi(\mathbb{R}^n)$. Это следует из равенства $\widehat{h}(t) = (\sqrt{2\pi})^n |\widehat{g}(t)|^2$.*

Из теоремы Бохнера-Хинчина не сложно получить ещё один критерий положительной определённости: *если $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то $\widehat{g} \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff$ при почти всех $t \in \mathbb{R}^n$ (относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^n$) выполняется неравенство $g(t) \geq 0$.* Последнее неравенство должно выполняться по крайней мере во всех точках, в которых непрерывна функция g .

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующая лемма, представляющая и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть $G : V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \neq \emptyset$, $G \not\equiv 0$, $M := \sup_V G(t)$ и $m := \inf_V G(t)$. Определим множество $H := \{h \in \mathbb{R} : 1 - hG(t) \geq 0, \forall t \in V\}$. Тогда

1.° Если $M > 0$ и $m < 0$, то $H = [1/m, 1/M]$.

2.° Если $m \geq 0$, то $H = (-\infty, 1/M]$.

3.° Если $M \leq 0$, то $H = [1/m, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдём все значения $h \in \mathbb{R}$, при которых неравенство

$$1 - hG(t) \geq 0 \quad (3)$$

выполняется для всех $t \in V$. Решим эту задачу отдельно на каждом из множеств следующего разбиения множества V :

$$V_0 := \{t \in V : G(t) = 0\}, \quad V_- := \{t \in V : G(t) < 0\}, \quad V_+ := \{t \in V : G(t) > 0\}.$$

На V_0 (если оно не пусто) неравенство (3) будет выполнено для любого h .

1.° Пусть $M > 0$ и $m < 0$. Тогда V_- и V_+ не пусты и выполнены следующие равенства:

$$M = \sup_V G(t) = \sup_{V_+} G(t) \text{ и } m = \inf_V G(t) = \inf_{V_-} G(t).$$

На V_- неравенство (3) выполняется $\iff h \geq \sup_{V_-} 1/G(t) = 1/\inf_{V_-} G(t) = 1/m$. На V_+ неравенство (3) выполняется $\iff h \leq \inf_{V_+} 1/G(t) = 1/\sup_{V_+} G(t) = 1/M$.

2.° Пусть $m \geq 0$. Тогда $V_+ \neq \emptyset$ (иначе $G \equiv 0$, что противоречит условию), $V = V_0 \sqcup V_+$ и $M = \sup_V G(t) = \sup_{V_+} G(t) > 0$. Как и в 1), на V_+ неравенство (3) выполняется $\iff h \leq 1/M$.

Утверждение 3° доказывается аналогично. Лемма 1 доказана. $\square$

Следующая лемма используется в примере 4 и её доказательство основано на идее доказательства леммы 3 о нулях функции Бесселя из работы В. В. Волчкова [11].

Лемма 2. Пусть $V = \{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ – подмножество $\mathbb{R}$ такое, что $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_{m+1} > \lambda_m$ при $m \in \mathbb{N}$ и $\lambda_m = \alpha + \beta m + \varepsilon(m)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ и $\varepsilon(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Если для некоторого $\mu > 0$, $\mu \neq 1$ справедливо включение $\mu V \subset V$, то $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 2$, $\alpha(\mu - 1)/\beta \in \mathbb{Z}$ и найдётся такое m_0 , что $\lambda_m = \alpha + \beta m$ при $m \geq m_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\mu^k V \subset V$ при $k \in \mathbb{N}$. Если $0 < \mu < 1$, то $\mu^k \lambda_2 = \lambda_1$ при $k = 1, 2$, и значит, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Противоречие. Поэтому $\mu > 1$.

По условию

$$\mu \lambda_m = \lambda_{s(m)}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где последовательность $s(m)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} s(m+1) &> s(m), \quad m \in \mathbb{N}; \\ s(m) &> m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2; \\ s(m) &\in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, что

$$\mu(\lambda_{m+1} - \lambda_m) = \mu\beta + \mu(\varepsilon(m+1) - \varepsilon(m)).$$

С другой стороны,

$$\mu(\lambda_{m+1} - \lambda_m) = \lambda_{s(m+1)} - \lambda_{s(m)} = \beta(s(m+1) - s(m)) + \varepsilon(s(m+1)) - \varepsilon(s(m)).$$

Из последних двух равенств вытекает, что существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (s(m+1) - s(m)) = \mu.$$

Так как последовательность $s(m+1) - s(m)$, $m \in \mathbb{N}$ принимает только натуральные значения, то $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 2$ и для некоторого $m_0 \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $s(m+1) - s(m) = \mu$, $m \geq m_0$. Таким образом, $s(m) = \mu m + p$, $m \geq m_0$ для некоторого $p \in \mathbb{Z}$, которое зависит только от m_0 ($p = s(m_0) - m_0\mu$).

Из (4) вытекает, что $\mu(\alpha + \beta m + \varepsilon(m)) = \alpha + \beta s(m) + \varepsilon(s(m))$, $m \in \mathbb{N}$, и значит, $\varepsilon(s(m)) - \mu\varepsilon(m) = \alpha(\mu - 1) + \beta(\mu m - s(m))$, $m \in \mathbb{N}$. При $m \geq m_0$ получаем, что

$$\alpha(\mu - 1) - p\beta = \varepsilon(s(m)) - \mu\varepsilon(m).$$

Так как $\varepsilon(s(m)) - \mu\varepsilon(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то $\alpha(\mu - 1) + p\beta = 0$. Таким образом, $\alpha(\mu - 1)/\beta \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon(s(m)) = \mu\varepsilon(m)$ при $m \geq m_0$.

Пусть

$$s^{(k)}(m) := (\underbrace{s \circ \dots \circ s}_k)(m).$$

Из (5) следует, что $s^{(k)}(m) > m$ и $s^{(k)}(m)$ возрастает по k при фиксированном m . Очевидно, что

$$\frac{1}{\mu^k} \varepsilon(s^{(k)}(m)) = \varepsilon(m), \quad m \geq m_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Устремляя $k \rightarrow \infty$ в левой части получим, что $\varepsilon(m) = 0$ при $m \geq m_0$. □

Замечание 3. Если $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\alpha(\mu - 1)/\beta =: p \in \mathbb{Z}$ и $\lambda_m := \alpha + \beta m$, $\lambda_q \geq 0$ для некоторого $q \in \mathbb{Z}$, то множество $V = \{\lambda_m\}_{m=q}^{\infty}$ инвариантно относительно умножения на μ , т. е. $\mu V \subset V$. Действительно,

$$\mu\lambda_m = \mu\alpha + \mu\beta m = \alpha + \alpha(\mu - 1) + \mu\beta m = \alpha + \beta(p + \mu m).$$

Остаётся показать, что $p + \mu m \geq m$:

$$\mu m + p - m = (\mu - 1)m + p = \frac{\mu - 1}{\beta}(m\beta + \alpha) \geq 0, \quad m \geq q.$$

Лемма 3. Пусть $V = \{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ – подмножество $\mathbb{R}$ такое, что $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_{m+1} > \lambda_m$ при $m \in \mathbb{N}$ и $\lambda_m = \beta q^m(1 + \varepsilon(m))$, где $\beta > 0$, $q > 1$ и $\varepsilon(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Если для некоторого $\mu > 0$, $\mu \neq 1$ справедливо включение $\mu V \subset V$, то $\mu = q^p$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$ и найдётся такое m_0 , что $\lambda_m = \beta q^m$ при $m \geq m_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\mu > 1$ доказывается также, как и в лемме 2.

По условию

$$\mu\lambda_m = \lambda_{s(m)}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где последовательность $s(m)$ удовлетворяет условиям (5). Из (6) получаем, что

$$\mu \beta q^m (1 + \varepsilon(m)) = \beta q^{s(m)} (1 + \varepsilon(s(m))), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для достаточно больших m выполняется равенство:

$$q^{s(m)-m} = \mu \frac{1 + \varepsilon(m)}{1 + \varepsilon(s(m))}.$$

Таким образом, существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} (s(m) - m) = \log_q \mu =: p$. Так как последовательность $s(m) - m$ принимает только натуральные значения, то $p \in \mathbb{N}$ и найдётся такое $m_0 \in \mathbb{N}$, что справедливы равенства $s(m) - m = p$, $m \geq m_0$. Таким образом, $\mu = q^p$ и $\varepsilon(m) = \varepsilon(s(m))$. Равенство $\varepsilon(m) = 0$ при $m \geq m_0$ доказывается также, как и в лемме 2. $\square$

§ 3. Доказательство теоремы 1. Множество $P_{f,g}$ не пусто, т. к. оно содержит числа 0 и 1. Поэтому для доказательства теоремы нужно показать, что $P_{f,g}$ – выпуклое, замкнутое и ограниченное подмножество действительной прямой $\mathbb{R}$.

1) Покажем, что $P_{f,g} \subset \mathbb{R}$. Предположим, что найдётся $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ такое, что $f_\lambda \in \Phi(E)$. Тогда $\overline{f_\lambda} \in \Phi(E)$ и поэтому

$$\overline{f_\lambda}(x) = f_\lambda(-x) = \lambda f(-x) + (1 - \lambda)g(-x), \quad x \in E.$$

С другой стороны,

$$\overline{f_\lambda}(x) = \overline{\lambda} f(-x) + (1 - \overline{\lambda})g(-x), \quad x \in E.$$

Приравнивая правые части этих равенств, получим

$$(\lambda - \overline{\lambda})f(-x) = (\lambda - \overline{\lambda})g(-x), \quad \forall x \in E.$$

Так как $(\lambda - \overline{\lambda}) = 2i \operatorname{Im} \lambda \neq 0$, то получим $f(x) = g(x)$, $\forall x \in E$. Получили противоречие с тем, что $f \neq g$.

2) Покажем, что $P_{f,g}$ – выпуклое множество. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in P_{f,g}$ и $\lambda = \delta \lambda_1 + (1 - \delta) \lambda_2$, $\delta \in [0, 1]$. Не сложно проверить, что $f_\lambda = \delta f_{\lambda_1} + (1 - \delta) f_{\lambda_2}$. Таким образом, $f_\lambda \in \Phi(E)$.

3) Докажем замкнутость $P_{f,g}$. Если $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset P_{f,g}$ и $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, то $f_{\lambda_n}(x) \rightarrow f_{\lambda_0}(x)$ при любом $x \in E$. Поэтому $f_{\lambda_0} \in \Phi(E)$, т. е. $\lambda_0 \in P_{f,g}$.

4) Докажем ограниченность $P_{f,g}$. Предположим обратное. Тогда существует последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset P_{f,g}$ с условием $0 < |\lambda_n| \rightarrow +\infty$. Обе части неравенства

$$|\lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)g(x)| \leq f(0) < +\infty, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in E,$$

делим на $|\lambda_n| > 0$ и переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$. Получим, что $f(x) \equiv g(x)$ на E , что противоречит условию задачи 1.

Теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательство теорем 2 и 3.

Доказательство теоремы 2. Сначала отметим, что $\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{f}} \neq \emptyset$. В противном случае $f(x) \equiv 0$, $g(0) = f(0) = 0$ и, значит, $g(x) \equiv 0$, что противоречит условию $f \neq g$. Аналогично $\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{g}} \neq \emptyset$.

Так как f и g обе интегрируемы и непрерывны, то $\widehat{f}(t) \geq 0$, $\widehat{g}(t) \geq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^n$ и $f_\lambda \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ ($\lambda \in P_{f,g}$) тогда и только тогда, когда

$$\widehat{f_\lambda}(t) = \lambda \widehat{f}(t) + (1 - \lambda) \widehat{g}(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

В силу теоремы 1 в этом неравенстве можно рассматривать только $\lambda \in \mathbb{R}$.

1°. Пусть $N_{\hat{g}} \subset N_{\hat{f}}$. Тогда на множестве $N_{\hat{g}}$ (если оно не пусто) неравенство (7) выполняется при любом λ . Так как $\hat{g}(t) > 0$ при $t \in \mathbb{R}^n \setminus N_{\hat{g}}$, то $f_\lambda \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда

$$1 - \lambda \left(1 - \frac{\hat{f}(t)}{\hat{g}(t)} \right) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^n \setminus N_{\hat{g}}. \quad (8)$$

Далее применяем лемму 1 для случая $V := \mathbb{R}^n \setminus N_{\hat{g}}$ и $G(t) := 1 - \hat{f}(t)/\hat{g}(t)$. Если $G(t) \geq 0$ при всех $t \in V$, то неравенство (8) справедливо по крайней мере при всех $\lambda \leq 0$, что противоречит ограниченности множества $P_{f,g}$. Поэтому этот случай невозможен, и значит $m = \inf_V G(t) < 0$ ($G \not\equiv 0$). Аналогично невозможен и случай, когда $G(t) \leq 0$ при всех $t \in V$. Таким образом, $M = \sup_V G(t) > 0$, $m = \inf_V G(t) < 0$ и $P_{f,g} = [1/m, 1/M]$ (см. первое утверждение в лемме 1). Из теоремы 1 следует, что $1/M \geq 1$.

Если дополнительно $N_{\hat{f}} \not\subset N_{\hat{g}}$, то найдётся точка t_0 , для которой $\hat{f}(t_0) = 0$, $\hat{g}(t_0) \neq 0$. Поэтому $t_0 \in V$ и, значит, $\inf_V \hat{f}(t)/\hat{g}(t) = 0$ и $M = 1$.

2°. Пусть $N_{\hat{g}} \not\subset N_{\hat{f}}$. Тогда найдётся точка $t_0 \in N_{\hat{g}}$, для которой $\hat{g}(t_0) = 0$ и $\hat{f}(t_0) \neq 0$. Поэтому на множестве $N_{\hat{g}}$ неравенство (7) выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda \geq 0$. Аналогично случаю 1) получаем: $f_\lambda \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда $\lambda \geq 0$ и выполняется неравенство (8). Далее применяем лемму 1 для случая $V := \mathbb{R}^n \setminus N_{\hat{g}}$ и $G(t) := 1 - \hat{f}(t)/\hat{g}(t)$. Если $G(t) \leq 0$ при всех $t \in V$, то неравенство (8) справедливо по крайней мере при всех $\lambda \geq 0$ и, значит, $P_{f,g} = [0, +\infty)$, что противоречит ограниченности множества $P_{f,g}$. Поэтому $M = \sup_V G(t) > 0$ ($G \not\equiv 0$). Из леммы 1 вытекает, что $H = [1/m, 1/M]$, если $m = \inf_V G(t) < 0$, или $H = (-\infty, 1/M]$, если $m \geq 0$. В любом случае $P_{f,g} = [0, +\infty) \cap H = [0, 1/M]$.

Если дополнительно $N_{\hat{f}} \not\subset N_{\hat{g}}$, то найдётся точка t_0 , для которой $\hat{f}(t_0) = 0$, $\hat{g}(t_0) \neq 0$. Поэтому $t_0 \in V$ и, значит, $\inf_V \hat{f}(t)/\hat{g}(t) = 0$ и $M = 1$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 получается из теоремы 2. В нашем случае $g(x) = f(ax)$. Так как f непрерывна, то (см. замечание 1) условие $f \not\equiv g$ эквивалентно условию $f(x) \not\equiv f(0)$. А так как f и интегрируема, то условие $f(x) \not\equiv f(0)$ эквивалентно условию $f(x) \not\equiv 0$. А для положительно определённых функций условие $f(x) \not\equiv 0$ эквивалентно условию $f(0) \neq 0$. Поэтому можем применить теорему 2. Так как $\hat{g}(t) = \hat{f}(t/a)/a^n$, то $N_{\hat{g}} = aN_{\hat{f}}$, а величины m и M из (1) связаны с величинами $M(a)$ и $m(a)$ из (2) равенствами: $m = 1 - a^n M(a)$ и $M = 1 - a^n m(a)$.

Теорема 3 доказана.

§ 5. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим задачу 2 для функции $f(x) = (1 - |x|)_+$, $x \in \mathbb{R}$, и $a > 1$. Не сложно посчитать, что $\hat{f}(t) = (4/\sqrt{2\pi}) \sin^2(t/2)/t^2 \geq 0$. Поэтому применима теорема 3. Множество нулей $\hat{f}$ имеет вид $N_{\hat{f}} = \{2\pi n : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Пусть $a > 1$. Покажем, что $aN_{\hat{f}} \subset N_{\hat{f}} \Leftrightarrow a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Пусть $aN_{\hat{f}} \subset N_{\hat{f}}$. Тогда $2\pi a \in N_{\hat{f}}$, то есть $2\pi a = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Осталось сократить на 2π и учесть, что $a > 1$. Достаточность очевидна.

1) Пусть $a \notin \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тогда $aN_{\hat{f}} \not\subset N_{\hat{f}}$. Так как $2\pi \in N_{\hat{f}}$ и $2\pi \notin aN_{\hat{f}}$, то $N_{\hat{f}} \not\subset aN_{\hat{f}}$. Таким образом, $P_{f,a} = [0, 1]$.

2) Пусть $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Найдем супремум и инфимум $\hat{f}(t)/\hat{f}(t/a)$ на $\mathbb{R} \setminus aN_{\hat{f}}$. Очевидно, что $\hat{f}(t)/\hat{f}(t/a) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \setminus aN_{\hat{f}}$. С другой стороны $\hat{f}(2\pi)/\hat{f}(2\pi/a) = 0$. Таким образом $m(a) = 0$. Найдем теперь супремум.

$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus aN_{\hat{f}}} \frac{\hat{f}(t)}{\hat{f}(t/a)} = \sup_{\mathbb{R}^n \setminus aN_{\hat{f}}} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{a^2 \sin^2 \frac{t}{2a}} = \frac{1}{a^2} \sup_{\mathbb{R}^n \setminus \frac{1}{2}N_{\hat{f}}} \frac{\sin^2(at)}{\sin^2 t}.$$

Из неравенства $|\sin nt| \leq n|\sin t|$, которое справедливо для всех $t \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ следует, что $\sup_{\mathbb{R} \setminus aN_{\hat{f}}} \hat{f}(t)/\hat{f}(t/a) \leq 1$. С другой стороны, $\lim_{t \rightarrow 0} \hat{f}(t)/\hat{f}(t/a) = 1$. Таким образом, $M(a) = 1$ и значит $P_{f,a} = [1/(1-a), 1]$.

Замечание 4. Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Пусть $a = 1/\alpha, \alpha \in (0, 1), h := \lambda(1-\alpha)$. Тогда $f_{\alpha,h} := f_{\lambda}$ - чётная функция такая, что $f_{\alpha,h}(x) = 0$ при $x \in [1, +\infty)$, а на каждом отрезке $[0, \alpha]$ и $[\alpha, 1]$ функция $f_{\alpha,h}$ является линейной и $f_{\alpha,h}(0) = 1, f_{\alpha,h}(\alpha) = h, f_{\alpha,h}(1) = 0$. Из полученного результата следует, что $f_{\alpha,h} \in \Phi(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $m(\alpha) \leq h \leq 1-\alpha$, где $m(\alpha) = 0$, если $1/\alpha \notin \mathbb{N}$, и $m(\alpha) = -\alpha$, если $1/\alpha \in \mathbb{N}$ (см. [1]).

Замечание 5. Так как $(1-|x|)_+ = (\chi_{[-1/2, 1/2]} * \chi_{[-1/2, 1/2]})(x), x \in \mathbb{R}$, то свёртка индикатора центрально-симметричного выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$ с самим собой является естественным обобщением функции $(1-|x|)_+$ на пространство $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$.

Для $x \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$, положим

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, +\infty), \quad \|x\|_{\infty} := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Для евклидовой нормы мы также используем обозначение $\|x\| := \|x\|_2$. Рассмотрим следующую функцию

$$s_{n,p}(x) := \frac{1}{\text{vol}_n(B_{p,1/2})} (\chi_{B_{p,1/2}} * \chi_{B_{p,1/2}})(x), \quad B_{p,1/2} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1/2\}. \quad (9)$$

Очевидно, что $s_{n,p}$ непрерывная, финитная функция и как следствие интегрируемая на $\mathbb{R}^n$ и кроме того $\widehat{s_{n,p}}(t) = ((\sqrt{2\pi})^n / \text{vol}_n(B_{p,1/2})) (\widehat{\chi_{B_{p,1/2}}}(t))^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, $s_{n,p} \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n) \cap \Phi(\mathbb{R}^n)$ и при $n = 1$ совпадает с функцией из примера 1.

Пример 2. Рассмотрим пример общего характера. Прежде отметим следующее. Пусть $f, g \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}) \cap \Phi(\mathbb{R})$. Прямое произведение функций f, g определяется следующим образом $f \otimes g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (f \otimes g)(x) := f(x_1)g(x_2)$. Хорошо известно, что определенная таким образом функция является непрерывной и интегрируемой. Кроме того, она является положительно определенной [6, гл. IV, Предложение 1.1(e)]. Таким образом $f \otimes g \in C(\mathbb{R}^2) \cap L_1(\mathbb{R}^2) \cap \Phi(\mathbb{R}^2)$.

Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям теоремы 3 и известно множество $P_{f,a}$. Рассмотрим новую функцию $F := \bigotimes_{k=1}^n f$. Очевидно

$$F(x) := \prod_{k=1}^n f(x_k), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Как было отмечено выше, F также удовлетворяет условиям теоремы 3.

Найдем связь между множествами $P_{F,a}$ и $P_{f,a}$. Очевидно, что $\widehat{F}(t) = \prod_{k=1}^n \widehat{f}(t_k), t \in \mathbb{R}^n$, т.е. $\widehat{F} = \bigotimes_{k=1}^n \widehat{f}$. Таким образом,

$$N_{\widehat{F}} = \bigcup_{k=1}^n N_{\widehat{f},k}, \quad N_{\widehat{f},k} := \{(t_1, \dots, t_k, \dots, t_n) : t_i \in \mathbb{R}, i \neq k, t_k \in N_{\widehat{f}}\}.$$

Пусть $aN_{\widehat{f}} \subset N_{\widehat{F}}$. Если $x \in aN_{\widehat{F}}$, то для некоторого k , $x \in aN_{\widehat{f},k} \subset N_{\widehat{f},k}$. Таким образом, $aN_{\widehat{F}} \subset N_{\widehat{F}}$.

Покажем, что из $aN_{\widehat{f}} \not\subset N_{\widehat{F}}$ следует, что $aN_{\widehat{F}} \not\subset N_{\widehat{F}}$. Пусть найдется элемент $x^\circ \in aN_{\widehat{f}}$ такой, что $x^\circ \notin N_{\widehat{f}}$. Возьмем элемент $x := (x^\circ, \dots, x^\circ) \in aN_{\widehat{F}}$. Очевидно, что он не принадлежит $N_{\widehat{F}}$.

Таким образом, получаем что $aN_{\widehat{f}} \subset N_{\widehat{F}} \iff aN_{\widehat{F}} \subset N_{\widehat{F}}$. Аналогично показывается, что из $N_{\widehat{f}} \not\subset aN_{\widehat{f}}$ следует $N_{\widehat{F}} \not\subset aN_{\widehat{F}}$. Далее, заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{F}} &= \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n N_{\widehat{f},k} \right) = \bigcap_{k=1}^n (\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{f},k}) = \\ &= \bigcap_{k=1}^n \left(\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times (\mathbb{R} \setminus N_{\widehat{f}})}_k \times \dots \times \mathbb{R} \right) = \prod_{k=1}^n (\mathbb{R} \setminus N_{\widehat{f}}) = (\mathbb{R} \setminus N_{\widehat{f}})^n. \end{aligned}$$

Пусть

$$M(a) := \sup_{\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{f}}} \frac{\widehat{f}(at)}{\widehat{f}(t)}, \quad m(a) := \inf_{\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{f}}} \frac{\widehat{f}(at)}{\widehat{f}(t)}.$$

Не сложно показать, что

$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{F}}} \frac{\widehat{F}(at)}{\widehat{F}(t)} = \sup_{(\mathbb{R} \setminus N_{\widehat{f}})^n} \prod_{k=1}^n \frac{\widehat{f}(at_k)}{\widehat{f}(t_k)} = \prod_{k=1}^n \left(\sup_{\mathbb{R} \setminus N_{\widehat{f}}} \frac{\widehat{f}(at_k)}{\widehat{f}(t_k)} \right) = [M(a)]^n.$$

Аналогично,

$$\inf_{\mathbb{R}^n \setminus N_{\widehat{F}}} \frac{\widehat{F}(at)}{\widehat{F}(t)} = [m(a)]^n.$$

Окончательно получаем:

- 1) Если $aN_{\widehat{f}} \subset N_{\widehat{f}}$, то $P_{F,a} = [1/(1 - a^n M^n(a)), 1/(1 - a^n m^n(a))]$. Если дополнительно $N_{\widehat{f}} \not\subset aN_{\widehat{f}}$, то $P_{F,a} = [1/(1 - a^n M^n(a)), 1]$.
- 2) Если $aN_{\widehat{f}} \not\subset N_{\widehat{f}}$, то $P_{F,a} = [0, 1/(1 - a^n m^n(a))]$. Если дополнительно $N_{\widehat{f}} \not\subset aN_{\widehat{f}}$, то $P_{F,a} = [0, 1]$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $s_{n,\infty}$, $n \geq 2$ (см. (9)). В этом случае $B_{\infty,1/2} = [-1/2, 1/2]^n$, $\text{vol}_n(B_{\infty,1/2}) = 1$. Не сложно проверить, что $s_{n,\infty}(x) = \prod_{k=1}^n (1 - |x_k|)_+$, $x \in \mathbb{R}^n$. Например, можно воспользоваться тем, что $\chi_{B_{\infty,1/2}}$ является прямым произведением индикаторов отрезка $[-1/2, 1/2]$ и посчитать преобразование Фурье.

Далее, можно было бы воспользоваться теоремой 3 для нахождения множества $P_{s_{n,\infty},a}$, но мы воспользуемся результатом примеров 1 и 2. Получаем, что если $a \notin \mathbb{N} \setminus \{1\}$, то $P_{s_{n,\infty},a} = [0, 1]$. Если же $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, то $P_{s_{n,\infty},a} = [1/(1 - a^n), 1]$.

Пример 4. Рассмотрим функцию $s_{n,2}$, $n \geq 2$ (см. (9)). Известно [9, Lemma 3.7.6], [12], что

$$s_{n,2}(x) = \begin{cases} \frac{n\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((n+1)/2)} \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du, & \|x\|_2 \leq 1, \\ 0, & \|x\|_2 > 1. \end{cases}$$

И преобразование Фурье $\widehat{s_{n,2}}$ имеет вид:

$$\widehat{s_{n,2}}(t) = 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{J_{n/2}^2(\|t\|_2/2)}{\|t\|_2^n}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\{\gamma_{\nu,m}\}_{m=1}^\infty$ – последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $J_\nu(x)$, $\nu > -1/2$. Справедлива следующая асимптотическая формула Макмагона (см. [13, 15.53], [14, 9.5.12]):

$$\gamma_{\nu,m} = \frac{(2\nu - 1)\pi}{4} + \pi m - \frac{4\nu^2 - 1}{\pi(8m + 4\nu - 2)} + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \quad m \rightarrow \infty.$$

Из леммы 2 вытекает, что если $aN_{\widehat{s_{n,2}}} \subset N_{\widehat{s_{n,2}}}$, то $n = 1$ и $a \in \mathbb{N}$. Получили противоречие с условием $n \geq 2$. Таким образом, $aN_{\widehat{s_{n,2}}} \not\subset N_{\widehat{s_{n,2}}}$. Также очевидно, что $N_{\widehat{s_{n,2}}} \not\subset aN_{\widehat{s_{n,2}}}$. Таким образом, $P_{s_{n,2},a} = [0, 1]$, $n \geq 2$.

Пример 5. Рассмотрим функцию

$$j_\nu(x) := \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(k + \nu + 1)} \cdot \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{C}, \quad \nu \in \mathbb{C},$$

где J_ν – функция Бесселя первого рода. Из представления Пуассона [13, 3.3]

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{itz} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} \quad (10)$$

и теоремы Бохнера-Хинчина следует, что $j_\nu \in \Phi(\mathbb{R})$ при $\nu > -1/2$. Очевидно $j_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi} \cos x \in \Phi(\mathbb{R})$. Если $\nu > 1/2$, то $j_\nu \in L_1(\mathbb{R})$. Это следует из асимптотической формулы

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \pi.$$

Рассмотрим задачу 2 для функции $f(x) := j_\nu(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\nu \geq -1/2$, и $a > 1$.

Пусть $\nu > 1/2$. Тогда к функции $f = j_\nu$ применима теорема 3. В этом случае $\widehat{f}(t) = K(1 - t^2)_+^{\nu-1/2}$, где $K = K(\nu) > 0$ – некоторая константа и $N_{\widehat{f}} = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. Так как $aN_{\widehat{f}} \subset N_{\widehat{f}}$, то можно воспользоваться первым утверждением теоремы 3. Найдём точные грани функции

$$\frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} = \frac{a^{2\nu-1}(1-t^2)_+^{\nu-\frac{1}{2}}}{(a^2-t^2)_+^{\nu-\frac{1}{2}}}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus aN_{\widehat{f}} = (-a, a).$$

При $1 \leq |t| < a$ эта функция равна нулю. Поэтому $m(a) = 0$, а для нахождения $M(a)$ можно ограничиться только промежутком $(-1, 1)$. На этом промежутке функция дифференцируема и производная обращается в ноль только в одной точке $t = 0$. Следовательно $M(a) = \hat{f}(t)/\hat{f}(t/a)|_{t=0} = 1$ и $P_{j_\nu, a} = [1/(1-a), 1]$.

Пусть $\nu \in (-1/2, 1/2]$. Тогда $j_\nu \notin L_1(\mathbb{R})$. Поэтому к функции $f = j_\nu$ теорема 3 не применима. В этом случае воспользуемся представлением Пуассона (10).

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(ax) = \frac{1}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \left(\lambda(1 - t^2)_+^{\nu - \frac{1}{2}} + (1 - \lambda) \frac{1}{a} \left(1 - \left(\frac{t}{a} \right)^2 \right)_+^{\nu - \frac{1}{2}} \right) dt.$$

Конечность меры в данном интегральном представлении очевидна. Чтобы определить при каких λ мера в интегральном представлении неотрицательна, требуется для каждого $\nu \in (-1/2, 1/2]$ относительно λ решить неравенство

$$\lambda(1 - t^2)_+^{\nu - \frac{1}{2}} + (1 - \lambda) \frac{1}{a} \left(1 - \left(\frac{t}{a} \right)^2 \right)_+^{\nu - \frac{1}{2}} \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1) \cup (1, a). \quad (11)$$

Рассмотрим сначала случай $\nu \in (-1/2, 1/2)$. Необходимость условия $\lambda \leq 1$ вытекает из (11) при $t \in (1, a)$. Необходимость условия $\lambda \geq 0$ вытекает из того, что первое слагаемое не ограничено в окрестности единицы. Учитывая теорему 1, получаем равенство $P_{j_\nu, a} = [0, 1]$.

Рассмотрим случай $\nu = 1/2$. В этом случае неравенство (11) будет иметь следующий вид:

$$\lambda \chi_{[-1, 1]}(t) + (1 - \lambda) \frac{1}{a} \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1) \cup (1, a).$$

Решая это неравенство отдельно на каждом из промежутков $[0, 1)$ и $(1, a)$, получаем равенство $P_{j_\nu, a} = [1/(1-a), +\infty) \cap (-\infty, 1] = [1/(1-a), 1]$.

Если $\nu = -1/2$, то $j_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi} \cos x$ и $\lambda j_{-1/2}(x) + (1 - \lambda)j_{-1/2}(ax) \in \Phi(\mathbb{R}) \iff 0 \leq \lambda \leq 1$. Поэтому $P_{j_\nu, a} = [0, 1]$.

Т.о. $P_{j_\nu, a} = [1/(1-a), 1]$ при $\nu \geq 1/2$, и $P_{j_\nu, a} = [0, 1]$ при $\nu \in [-1/2, 1/2)$.

Пример 6. Если $n \in \mathbb{N}$, то функция $j_{\frac{n}{2}}(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$ является преобразованием Фурье индикатора единичного шара в евклидовой норме на $\mathbb{R}^n$, т. е. $j_{\frac{n}{2}}(\|x\|) := \hat{\chi}_B(x)$, где $B := B_{2,1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Таким образом, $j_{\frac{n}{2}}(\|x\|) \in \Phi(\mathbb{R}^n)$.

Из элементарных свойств преобразования Фурье, а также его инъективности, вытекает, что $\lambda j_{\frac{n}{2}}(\|x\|) + (1 - \lambda)j_{\frac{n}{2}}(a\|x\|) \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda \chi_B(t) + (1 - \lambda) \frac{1}{a^n} \chi_{aB}(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad \|t\| \neq 1, \quad \|t\| \neq a. \quad (12)$$

Решая неравенство (12) на множествах: 1) $a < \|t\|$, 2) $1 < \|t\| < a$, 3) $\|t\| < 1$, получаем, что $\lambda j_{\frac{n}{2}}(\|x\|) + (1 - \lambda)j_{\frac{n}{2}}(a\|x\|) \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff \lambda \in [1/(1-a^n), 1]$.

Следствие 1. Пусть $\varphi \in C[0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$ и $\varphi(\|x\|) \in \Phi(\mathbb{R}^{n+2})$. Если $\lambda \in [1/(1-a^n), 1]$, то $\lambda \varphi(\|x\|) + (1 - \lambda)\varphi(a\|x\|) \in \Phi(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство следствия 1 вытекает из примера 6 и следующей теоремы Шенберга [15] об описании радиальных положительно определенных функций: если $\varphi \in C[0, +\infty)$ и $n \in \mathbb{N}$, то $\varphi(\|x\|) \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(s) := \int_0^\infty j_{\frac{n}{2}-1}(st) d\mu(t)$, $s \geq 0$, где μ – конечная, неотрицательная борелевская мера на $[0, +\infty)$.

Следствие 2. Пусть $a > 1$, $\gamma \in (0, 2]$ и $f(s) := e^{-s^\gamma}$, $s \geq 0$. Тогда функция $\lambda f(\|x\|) + (1 - \lambda)f(a\|x\|) \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ при $\lambda \in [1/(1 - a^n), 1]$.

При $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$ точный результат содержится в примерах 7 и 8. Доказательство следствия 2 вытекает из следствия 1 и хорошо известного результата Шенберга: функция $e^{-\|x\|^\gamma} \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff 0 \leq \gamma \leq 2$.

Пример 7. Рассмотрим задачу 2 для функции $f(x) = e^{-\|x\|}$, $x \in \mathbb{R}^n$, и $a > 1$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Известно [5, Ch. 2], [10, Ch. 1, Theorem 1.14], что

$$\widehat{f}(t) = \frac{2^{n/2} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(1 + \|t\|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Поэтому применима теорема 3. Очевидно, что $N_{\widehat{f}} = \emptyset$ и $aN_{\widehat{f}} \subset N_{\widehat{f}}$. Найдём точные грани функции

$$\frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} = \frac{(a^2 + \|t\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}{a^{n+1}(1 + \|t\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Функция

$$\frac{a^2 + s}{1 + s} = 1 + \frac{a^2 - 1}{1 + s}, \quad s \geq 0,$$

имеет инфимум при $s \rightarrow +\infty$ и достигает максимума в нуле. Таким образом,

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} = 1,$$

$$\inf_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} = 1/a^{n+1}$$

и значит $P_{f,a} = [1/(1 - a^n), a/(a - 1)]$.

Пример 8. Рассмотрим задачу 2 для функции $f(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$, и $a > 1$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Тогда $\widehat{f}(t) = e^{-\frac{\|t\|^2}{2}}$. Поэтому применима теорема 3. Очевидно, что $N_{\widehat{f}} = \emptyset$ и $aN_{\widehat{f}} \subset N_{\widehat{f}}$. Найдём точные грани функции

$$\frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} = e^{-(1 - \frac{1}{a^2}) \frac{\|t\|^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Учитывая, что $a > 1$, сразу получаем

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} = \left. \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} \right|_{t=0} = 1,$$

$$\inf_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{f}(t/a)} = 0.$$

Таким образом, $P_{f,a} = [1/(1 - a^n), 1]$.

§ 6. Пример положительно определённой функции с компактным носителем, для которой $aN_{\hat{f}} \subset N_{\hat{f}}$. Условием из названия параграфа удовлетворяет функция из примера 1 при $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Покажем, как получить подобные примеры при произвольном $a > 1$.

Преобразованием Фурье финитной и интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f является целой функцией экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) $\hat{f} =: F$, которая ограничена на вещественной оси. По сути, задача сводится к построению ограниченной на $\mathbb{R}$ ц.ф.э.т. F , у которой множество вещественных нулей N_F обладает свойством: $aN_F \subset N_F$.

Введем следующие обозначения. Пусть B_σ множество ц.ф.э.т. не более σ , ограниченных на $\mathbb{R}$, а $W_{p,\sigma}$ множество ц.ф.э.т. не более σ , сужение на $\mathbb{R}$ которых принадлежит $L_p(\mathbb{R})$, $p > 0$.

Пусть A некоторое множество. Если комплекснозначная функция h определена на A , то $N_h(A) := \{x \in A : h(x) = 0\}$, $N_h := N_h(\mathbb{R})$.

Лемма 4. Пусть h ц.ф.э.т. $\leq \sigma$ такая, что $h(0) = 1$, $\sup_{\mathbb{R}} |h(x)| \leq 1$, $h \neq \text{const.}$ Тогда произведение

$$Q(z) := \prod_{k=0}^{\infty} h\left(\frac{z}{a^k}\right), \quad a > 1 \quad (13)$$

сходится равномерно внутри $\mathbb{C}$, причём $Q \in B_{\sigma_1}$, где $\sigma_1 := \sigma a / (a - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем, что для любого круга найдётся номер, начиная с которого в произведении (13) все множители отличны от нуля сразу для всех z из взятого круга.

Пусть $K_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ произвольный открытый круг с центром в нуле. Тогда K_R содержит лишь конечное число нулей функции h . Это следует из теоремы единственности. В силу того, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ функции $h(z/a^k)$ также являются целыми, для них также справедливо это утверждение.

Предположим, что $N_h(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ и выберем точку $z_0 \in N_h(\mathbb{C})$ такую, что $|z_0| = \min_{z \in N_h(\mathbb{C})} |z|$. Из условия $h(0) = 1$, следует, что $|z_0| > 0$. Для $R > 1$ берём $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы при $k \geq k_0$ выполнялось неравенство $a^k |z_0| > R$. Можно взять, например,

$$k_0 = k_0(R) := \max\{0, [\log_a(R/|z_0|)] + 1\}.$$

Тогда для $k \geq k_0$ нули функции $h(z/a^k)$ содержатся вне K_R . Если же $N_h(\mathbb{C}) = \emptyset$, то положим $k_0 = 0$.

2) Докажем, что произведение (13) сходится равномерно внутри любого круга.

Пусть $R > 1$. Представим произведение (13) в следующем виде

$$Q(z) = r(z) \cdot \prod_{k=0}^{k_0-1} h\left(\frac{z}{a^k}\right), \quad \text{где } r(z) = \prod_{k=k_0}^{\infty} h\left(\frac{z}{a^k}\right).$$

Произведение $r(z)$ сходится равномерно внутри K_R тогда и только тогда, когда сходится равномерно ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} |1 - h(z/a^k)|$ внутри K_R .

Так как функция $(1 - h(z))/z$ целая, то

$$|1 - h(z)| \leq M|z|, \quad |z| \leq |z_0|, \quad \text{где } M := \max_{|z|=|z_0|} \left| \frac{1 - h(z)}{z} \right|.$$

Если $k \geq k_0$ и $z \in K_R$, то $|z/a^k| \leq |z_0|$. Таким образом

$$\left| 1 - h\left(\frac{z}{a^k}\right) \right| \leq M \frac{|z|}{a^k} < \frac{MR}{a^k}, \quad \forall k \geq k_0, \quad \forall z \in K_R.$$

Ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} 1/a^k$ сходится. В силу признака Вейерштрасса ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} |1 - h(z/a_k)|$ сходится равномерно внутри K_R . Таким образом $r(z)$ сходится равномерно внутри K_R . Учитывая произвольность числа $R > 1$, получаем, что $Q(z)$ целая функция.

3) Докажем, что $Q \in B_{\sigma_1}$. Для h справедливо неравенство [16, Lecture 6, Remark 2]

$$|h(z)| \leq e^{\sigma |\operatorname{Im} z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом,

$$\prod_{k=0}^n \left| h\left(\frac{z}{a^k}\right) \right| \leq \prod_{k=0}^n e^{(\sigma/a^k) |\operatorname{Im} z|} = e^{\sigma \sum_{k=0}^n (1/a^k) |\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$|Q(z)| \leq e^{\sigma a/(a-1) |\operatorname{Im} z|} \leq e^{\sigma a/(a-1) |z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, $Q \in B_{\sigma_1}$. □

Замечание 6. Очевидно $N_Q(\mathbb{C}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} a^k N_h(\mathbb{C})$ и значит, $a N_Q(\mathbb{C}) \subset N_Q(\mathbb{C})$. Поэтому и для вещественных нулей справедливо включение $a N_Q \subset N_Q$.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 4. Если дополнительно $h \in L_1(\mathbb{R})$, то $Q \in L_p(\mathbb{R})$ при любом $p > 0$ и при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} |Q(x)|^{\frac{1}{n}} dx \leq a^{n-1} \int_{\mathbb{R}} |h(x)| dx. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала по индукции следующее утверждение: если $h_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i \in \mathbb{Z}_+$, то $\prod_{i=0}^{n-1} h_i \in L_{1/n}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \prod_{i=0}^{n-1} h_i(x) \right|^{\frac{1}{n}} dx \leq \left(\prod_{i=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} |h_i(x)| dx \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (15)$$

При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n = 2$. Тогда из неравенства Гёльдера следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} |h_0(x) h_1(x)|^{\frac{1}{2}} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |h_0(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_1(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Предположим, что $\prod_{i=0}^{n-1} h_i \in L_{1/n}(\mathbb{R})$ и выполняется неравенство (15). Тогда из неравенства Гёльдера при $p = (n+1)/n$ и $q = n+1$ и предположения индукции следует

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \prod_{i=0}^n h_i(x) \right|^{\frac{1}{n+1}} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \prod_{i=0}^{n-1} h_i(x) \right|^{\frac{1}{n}} dx \right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_n(x)| dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \left(\prod_{i=0}^n \int_{\mathbb{R}} |h_i(x)| dx \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Из доказанного утверждения и неравенства

$$|Q(x)| \leq \prod_{k=0}^{n-1} \left| h\left(\frac{x}{a^k}\right) \right|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (16)$$

вытекает, что $Q \in L_{1/n}(\mathbb{R})$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и выполняется неравенство (14). Так как $|Q(x)| \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}$ (см. (16) при $n = 1$), то $Q \in L_p(\mathbb{R})$ при любом $p > 0$. $\square$

Замечание 7. Хорошо известно, что если $h \in W_{1,\sigma}$, то $h \in B_\sigma$. Это вытекает из того, что функция

$$G(z) := \int_0^z h(t) dt$$

очевидно принадлежит классу B_σ . Тогда из неравенства Бернштейна для ц.ф.э.т. получаем, что

$$|h(x)| = |G'(x)| \leq \sigma \sup_{\mathbb{R}} |G(x)| =: M, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, $h \in B_\sigma$. Отсюда и из неравенства

$$|h(x)|^p \leq M^{p-1} |h(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p > 1,$$

сразу следует, что $h \in W_{p,\sigma}$ при $p > 1$. Можно также показать, что $h(x) = o(1)$, $x \rightarrow \pm\infty$.

Замечание 8. Не сложно показать, что существует функция h удовлетворяющая условиям леммы 4. Пусть $s \in C(\mathbb{R})$, $\text{supp } s \subset [-\sigma/2, \sigma/2]$, $s \not\equiv 0$ и $\omega := s * \tilde{s}$. Очевидно, что $\omega \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, причём $\text{supp } \omega \subset [-\sigma, \sigma]$. Таким образом, $\hat{\omega}$ - ц.ф.э.т. не более σ . Из положительной определённости ω следует, что $\hat{\omega}(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Так как $\hat{\omega} \in C_0(\mathbb{R})$, то найдется $t_0 \in \mathbb{R}$ такая, что $\sup_{\mathbb{R}} \hat{\omega}(t) = \hat{\omega}(t_0)$. Пусть $h(z) := (1/M) \hat{\omega}(z + t_0)$, $z \in \mathbb{C}$, где $M = \sup_{\mathbb{R}} \hat{\omega}(t)$. Заметим, что сдвиг не влияет на тип ц.ф.э.т. Таким образом, мы построили h удовлетворяющую условиям леммы 4, а также неотрицательную на действительной оси.

Если дополнительно $s \in C^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, то $h \in L_1(\mathbb{R})$, т.е. удовлетворяет условиям леммы 5.

Пример 9. Пусть h удовлетворяет условиям леммы 5, а также неотрицательна на $\mathbb{R}$. Рассмотрим функцию Q определенную равенством (13). Из лемм 4, 5 следует, что $Q \in W_{2,\sigma_1}$. По теореме Винера-Пэли [17, Theorem 6.8.1] получаем, что

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \psi(x) e^{izx} dx, \quad \psi \in L_2[-\sigma_1, \sigma_1] \subset L_1[-\sigma_1, \sigma_1].$$

Пусть $f(x) := (1/\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbb{R}} Q(t) e^{-itx} dt$. Из формулы обращения следует, что $f = \psi$ п.в.

Функция f является непрерывной и финитной и $\hat{f} = F(t) = Q(-t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Таким образом $f \in \Phi(\mathbb{R})$. Учитывая замечание 6, получим, что $aN_F \subset N_F$.

Замечание 9. Если же, $Q \in B_{\sigma_1}$ (не обязательно интегрируемая), то нужно подобрать функцию $\varphi \in W_{1,\sigma_1}$ такую, что $\varphi(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ и определить новую функцию $Q^* := \varphi \cdot Q$. В качестве φ можно взять преобразование Фурье сплайна A_{3n-2} , $n \geq 2$ [18, (20)]. Его преобразование Фурье положительно [18, Theorem 4]. А в силу $2n - 2$ дифференцируемости самого сплайна, оно также интегрируемо (в силу скорости убывания на бесконечности).

В заключении отметим, что в работе первого автора [19, Theorem 9] рассмотрена и решена задача, близкая к проблеме 2: *если $\varepsilon \in \mathbb{R}$, а функция $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[0, +\infty)$, дифференцируема на интервале $(0, +\infty)$ и $xh'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +0$, то $h(\rho(u)) - a^{-\varepsilon}h(a\rho(u)) \in \Phi(E)$, $\forall a > 1 \iff \psi_\varepsilon(\rho(u)) \in \Phi(E)$, где $\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon h(x) - xh'(x)$ при $x > 0$ и $\psi_\varepsilon(0) := \varepsilon h(0)$. Здесь ρ – неотрицательная, однородная функция на E и $\rho(u) \not\equiv 0$. В качестве следствия доказано (см. [19, Example 6]), что: 1) $e^{-\alpha\|u\|}(1 - \beta\|u\|) \in \Phi(\mathbb{R}^m) \iff -\alpha \leq \beta \leq \alpha/m$; 2) $e^{-\alpha\|u\|^2}(1 - \beta\|u\|^2) \in \Phi(\mathbb{R}^m) \iff 0 \leq \beta \leq 2\alpha/m$. Здесь $\|u\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^m$. При доказательстве использовались примеры 7 и 8.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Manov A. Positive definiteness of piecewise-linear function / A. Manov, V. Zastavnyi // *Expositiones Mathematicae*. – 2017. – V. 35. – P. 357–361.
2. On potentially negative space time covariances obtained as sum of products of marginal ones / P. Gregori, E. Porcu, J. Mateu, Z. Sasvári // *Ann. Inst. Statist. Math.* – 2008. – V. 60, № 4. – P. 865–882.
3. Zastavnyi V.P. On positive definiteness of some radial functions / V.P. Zastavnyi, E. Porcu // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2017. – V. 38. – P. 386–394.
4. Porcu E. Buhmann covariance functions, their compact supports, and their smoothness / E. Porcu, V.P. Zastavnyi, M. Bevilacqua // *Dolomites Research Notes on Approximation*. – 2017. – V. 10. – P. 33–42.
5. Akhiezer N.I. *Lectures on Integral Transforms* / N.I. Akhiezer. – Providence, Rhode Island: AMS, 1988.
6. Vahania N.N. *Probability Distributions in Banach Spaces* / N.N. Vahania, V.I. Tarieladze, S.A. Chobanian. – Moscow: Nauka, 1985. – 482 p.
7. Trigub R.M. *Fourier Analysis and Approximation of Functions* / R.M. Trigub, E.S. Belinsky. – Boston, Dordrecht, London: Kluwer-Springer, 2004. – 586 p.
8. Hewitt E. *Abstract Harmonic Analysis Volume II: Structure and Analysis for Compact Groups Analysis on Locally Compact Abelian Groups* / E. Hewitt, K.A. Ross. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1970. – 783 p.
9. Sasvári Z. *Multivariate Characteristic and Correlation Functions* / Z. Sasvári. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. – 377 p.
10. Stein E.M. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces* / E.M. Stein, G. Weiss. – Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1971. – 312 p.
11. Volchkov V.V. New theorems on the mean for solutions of the helmholtz equation / V.V. Volchkov // *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* – 1994. – V. 79. – P. 281–286.
12. Gneiting T. Radial positive definite functions generated by euclid's hat / T. Gneiting // *Journal of Multivariate Analysis*. – 1997. – V. 69. – P. 88–119.
13. Watson G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions (2nd.ed.)* / G.N. Watson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1944. – 815 p.
14. Abramowitz M. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55 / M. Abramowitz, I. A. Stegun. – Washington, 1972. – 1046 p.
15. Schoenberg I.J. Metric spaces and completely monotone functions / I.J. Schoenberg // *Ann. Math.* – 1938. – V. 39. – P. 811–841.
16. Levin B. Ya. *Lectures on Entire Functions* / B. Ya. Levin – Providence, Rhode Island: AMS, 1996. – 248 p.
17. Boas R. P. *Entire Functions* / R. P. Boas. – New York: Academic Press, 1954. – 276 p.
18. Zastavnyi V.P. Positive-definite splines of a special form / V.P. Zastavnyi, R.M. Trigub // *Sbornik: Mathematics*. – 2002. – V. 193. – P. 1771–1800.
19. Zastavnyi V.P. Some Problems Related to Completely Monotone Positive Definite Functions / V.P. Zastavnyi // *Math. Notes*. – 2019. – V. 106, № 2. – P. 212–228.

Поступила в редакцию 01.07.2021 г.

SOME GENERALIZATIONS OF THE PROBLEM OF POSITIVE DEFINITENESS OF A
PIECEWISE-LINEAR FUNCTION

V. P. Zastavnyi, A. D. Manov

In this paper we consider the following problem for positive definite functions on a real linear space E (the class $\Phi(E)$). Let $f, g \in \Phi(E)$ be such that $f(0) = g(0)$ and $f \not\equiv g$. The problem is to find the set $P_{f,g} := \{\lambda \in \mathbb{C} : f_\lambda \in \Phi(E)\}$, where $f_\lambda(x) := \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. We also study this problem for $g(x) \equiv f(ax)$, where $a > 0$, $a \neq 1$ and it is required to find the set $P_{f,a} := P_{f,g}$. In case of $f(x) = (1 - |x|)_+$ this problem is reduced to the problem of positive definiteness of piecewise-linear function. We prove that $P_{f,g}$ is a closed interval of $\mathbb{R}$. In the case $E = \mathbb{R}^n$ we obtain formulas for endpoints of this interval. We also give examples of functions $f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ for which the set $P_{f,a}$ is found, including examples of radial positive definite functions.

Keywords: positive-definite functions, Bochner theorem, Fourier transform, Bessel functions.

Заставный Виктор Петрович

доктор физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный универси-
тет», г. Донецк, ДНР
zastavn@rambler.ru

83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, ка-
федра математического анализа и дифференци-
альных уравнений

Манов Анатолий Дмитриевич

ассистент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный универси-
тет», г. Донецк, ДНР
manov.ad@ro.ru

83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, ка-
федра математического анализа и дифференци-
альных уравнений
пр.Театральный, 13, IV корпус ДонНУ,
кафедра математической физики

Zastavnyi Viktor Petrovych

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

Manov Anatoliy Dmitrievych

assistant, Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 517.983.36

ОБ УСЛОВИЯХ ПОДЧИНЕННОСТИ ДЛЯ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ С КРАТНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ НУЛЯМИ

© 2021. *Д. В. Лиманский*

В статье получено описание линейного пространства минимальных дифференциальных операторов, подчиненных тензорному произведению двух конкретных обыкновенных дифференциальных полиномов четвертого и пятого порядков, символы которых имеют кратные вещественные, а также не вещественные нули. На этом примере показано, что, в отличие от случая полиномов с символами, имеющими лишь вещественные нули, указанное пространство может быть нетривиальным.

Ключевые слова: дифференциальный полином, априорная оценка, тензорное произведение, мультипликатор, многогранник Ньютона.

§ 1. Введение. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$. Рассматривается задача об описании линейного пространства $\mathcal{L}_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$ минимальных дифференциальных операторов $Q(D)$, подчиненных системе данных дифференциальных полиномов $\{P_j(D)\}_1^N$ в $L^p(\Omega)$ -норме, т. е. пространство операторов $Q(D)$, удовлетворяющих априорной оценке

$$\|Q(D)f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\bar{\Omega}), \quad (1)$$

с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от выбора f .

Легко видеть, что пространство $\mathcal{L}_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$ конечномерно. Это вытекает из того, что степень многочлена $Q(\xi)$ (как по каждой из переменных, так и по их совокупности) не превышает наибольшей из степеней многочленов $\{P_j(\xi)\}_1^N$; в противном случае оценка (1) легко приводится к противоречию (см. [1, 2]). Отметим, что пространство $\mathcal{L}_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$ минимально в том и только в том случае, когда оно является линейной оболочкой операторов $\{P_j(D)\}_1^N$ и тождественного оператора I .

Задача об описании пространства $\mathcal{L}_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$ была исчерпывающе решена Л. Хёрмандером [3] в случае $N = 1$, $p = 2$ и ограниченной области Ω . Применяя этот критерий, Хёрмандер доказал, что для *тензорного произведения* $P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D)$ двух дифференциальных операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$, действующих по различным группам переменных, т. е. для оператора вида

$$P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D) := P_1(D_1, \dots, D_{p_1}, 0, \dots, 0) P_2(0, \dots, 0, D_{p_1+1}, \dots, D_n), \quad (3)$$

пространство $\mathcal{L}_{2,\Omega}(P)$ совпадает с линейной оболочкой произведений операторов из $\mathcal{L}_{2,\Omega}(P_k)$, $k = 1, 2$, т. е. равно тензорному произведению этих линейных пространств, $\mathcal{L}_{2,\Omega}(P) = \mathcal{L}_{2,\Omega}(P_1) \otimes \mathcal{L}_{2,\Omega}(P_2)$.

Пусть теперь $p = \infty$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$. Пространство $\mathcal{L}_{\infty,\mathbb{R}^n}(P_1, \dots, P_N)$ будем далее обозначать $\mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$. Из результатов М. М. Маламуда [4] и де Лю и Миркила [5] (см. также [6]) вытекает, что для эллиптического оператора $P(D)$ порядка l базис пространства $\mathcal{L}(P)$ образуют $P(D)$ и дифференциальные мономы $\{D^\alpha\}_{|\alpha| < l}$.

Боманом [1] было получено описание пространства $\mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$ в случае, когда $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — дифференциальные мономы (см. теорему 2). Некоторые обобщения теоремы Бомана для случая произвольных дифференциальных полиномов были получены автором в работе [7] (см. теоремы 3 и 4). Оказалось, что структура пространства $\mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$ тесно связана с геометрическими свойствами *многогранника Ньютона* символов $\{P_j(\xi)\}$ (см. определение 4, а также [8, 9]).

Будем называть полином $P(\xi)$ *невыврожденным*, если он не имеет вещественных нулей, т. е. $P(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. В связи с вышеприведенным результатом Хёрмандера возникает задача об описании пространства $\mathcal{L}(P)$ для операторов вида $P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D)$. В [6] автором и М. М. Маламудом получено утверждение для эллиптических операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$, символы $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ которых невырождены. В этом случае пространство $\mathcal{L}(P)$ будет таким же, как и у Хёрмандера, т. е. $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(P_1) \otimes \mathcal{L}(P_2)$. Но в случае, если сомножители эллиптичны и однородны, размерность пространства $\mathcal{L}(P)$ минимальна, т. е. $\dim \mathcal{L}(P) = 2$, хотя размерность каждого из пространств $\mathcal{L}(P_1)$ и $\mathcal{L}(P_2)$ максимально возможная (см. [10]).

Далее будем рассматривать случай $n = 2$, т. е. тензорного произведения двух *обыкновенных* дифференциальных полиномов:

$$P(D_1, D_2) := p_1(D_1) \otimes p_2(D_2). \quad (2)$$

В работе автора [11] было получено описание пространства $\mathcal{L}(P)$ для случая, когда символ первого сомножителя $p_1(\xi_1)$ имеет специальный вид (все его нули вещественные и простые). Оказалось, что в этом случае размерность пространства $\mathcal{L}(P)$ тем меньше, чем больше вещественных нулей (с учетом их кратности) имеет символ второго сомножителя $p_2(\xi_2)$. В частности, было доказано, что $\dim \mathcal{L}(P)$ максимальна, когда полином $p_2(\xi_2)$ невырожден, и минимальна, если все нули полинома $p_2(\xi_2)$ вещественны. Продолжая исследования из [11], в работе [12] пространство $\mathcal{L}(P)$ было описано еще для ряда случаев: например, когда символ $p_1(\xi_1)$ первого сомножителя — дифференциальный моном, а символ второго сомножителя $p_2(\xi_2)$ невырожден. Далее, в работе автора [13] пространство $\mathcal{L}(P)$ описано для дифференциальных полиномов $P(D)$ вида (2), символы которых не имеют кратных вещественных нулей.

Более трудным является случай, когда символы обоих сомножителей $p_1(\xi)$ и $p_2(\xi_2)$ в (2) содержат *кратные вещественные нули*. Один из примеров такого тензорного произведения разобран в [12]: там $p_1(\xi)$ и $p_2(\xi_2)$ являются конкретными полиномами четвертого порядка, все нули которых вещественны, и среди них есть кратные. В этом примере оказалось, что размерность пространства $\mathcal{L}(P)$ минимальна — его базис состоит из самого оператора $P(D)$ и тождественного оператора I .

В настоящей работе рассматривается еще более трудный случай, когда среди нулей обоих символов-сомножителей есть и кратные вещественные, и не вещественные. Разобран конкретный пример такого оператора $P(D)$ девятого порядка, для которого описано пространство $\mathcal{L}(P)$, что составляет основной результат работы (см. теорему 5). В этом случае пространство $\mathcal{L}(P)$ уже оказывается нетривиальным: его базис содержит совершенно "неожиданные" элементы, не диктуемые структурой нулей символов-сомножителей, как это было ранее. Отметим, что доказательство теоремы 5 опирается на весь спектр известных методов — от алгебро-аналитических (разложение полиномов по степеням одночлена, использование свойств преобразования Фурье и мультипликаторов и т. д.) до геометрических (теорема Бомана и ее обобщения для многогранника Ньютона системы полиномов).

Автор полагает, что такое соединение всех известных подходов (алгебраических, аналитических и геометрических) к изучению априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ является ключом для поиска решения обсуждаемой задачи и в общем виде.

§ 2. Вспомогательные понятия и утверждения. В этом параграфе мы приведем ряд обозначений, понятий и утверждений, необходимых в дальнейшем.

Обозначения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, \dots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ и $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, пусть $|x| := (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$ и $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ для $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим через I тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, $If = f$, через $\text{ch } K$ — выпуклую оболочку множества $K \subset \mathbb{R}^n$, а через $\mathcal{N}(P_1, \dots, P_N)$ — многогранник Ньютона (м. Н.) системы полиномов $\{P_j(\xi)\}_1^N$. Для дифференциального полинома $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha D^\alpha$ порядка l обозначим через $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha \xi^\alpha$ его символ, через $P^l(\xi) = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \xi^\alpha$ — его главный символ. Через $P^\nu(\xi)$ будет обозначаться ν -главный символ оператора $P(D)$ относительно м. Н. $\mathcal{N}(P)$ его символа $P(\xi)$, где ν — единичный вектор внешней нормали соответствующей грани. Через $\deg P$ будет обозначаться степень полинома $P(\xi)$, через $\deg_{\xi_k} P$ — его степень по переменной ξ_k .

Через $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ будет обозначаться алгебра мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$; через $\hat{f}(\hat{\mu})$ — преобразование Фурье (Фурье – Стильеса) функции f (меры μ). Через $C^\infty(\Omega)$ обозначается множество функций, бесконечно дифференцируемых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а через $C_0^\infty(\Omega)$ — его подмножество функций, финитных в Ω .

2.1. Мультипликаторы и априорные оценки.

Определение 1. [14] Пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} := \mathcal{F}f$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называют *мультипликатором* в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если оператор свертки $f \rightarrow T_\Phi f :=: \mathcal{F}^{-1}\Phi\mathcal{F}f$ отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Мультипликаторы в $L^p(\mathbb{R}^n)$ образуют алгебру $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, финитные функции являются мультипликаторами, т. е. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_p$, $p \in [1, \infty]$. Известно полное описание алгебры $\mathcal{M}_p$ при $p = 1, 2, \infty$. Нас интересует описание алгебры $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}^n)$, обозначаемой далее $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ или просто $\mathcal{M}$ (если не возникает неопределенности, о пространстве какой размерности идет речь).

Предложение 1. [14] Алгебра $\mathcal{M}$ есть множество образов конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье — Стильеса:

$$\Phi \in \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty \iff \Phi(\xi) = \hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x), \quad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty. \quad (3)$$

Следствие 1. [14] 1. Функции из $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ограничены и равномерно непрерывны в $\mathbb{R}^n$.

2. Алгебра $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ инвариантна относительно отражений $\Phi(x) \mapsto \Phi(-x)$, сдвигов $\Phi(x) \mapsto \Phi(x - h)$, $h \in \mathbb{R}^n$ и растяжений $\Phi(x) \mapsto \Phi(rx)$, $r > 0$.

3. Справедливо включение $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ при $m < n$.

Априорные оценки и мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ связаны следующим образом.

Теорема 1 (де Лю и Миркила). [5] Пусть $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — дифференциальные полиномы, $D = (D_1, \dots, D_n)$. Тогда априорная оценка

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (4)$$

справедлива тогда и только тогда, когда существуют мультипликаторы $M_j(\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq N+1$ такие, что выполняется тождество

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) P_j(\xi) + M_{N+1}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Определение 2. [2, 8] Система дифференциальных полиномов $\{P_j(D)\}_1^N$ порядка l называется эллиптической, если l -главные символы $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$ этих операторов не имеют общих нетривиальных вещественных нулей, т. е.

$$(P_1^l(\xi), \dots, P_N^l(\xi)) \neq (0, \dots, 0), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

В частности, все обыкновенные дифференциальные операторы (от одной переменной) можно считать эллиптическими.

В работе [15] были получены достаточные условия принадлежности функции $\Phi(\cdot)$ алгебре мультипликаторов $\mathcal{M}$. Там же, в [15], из этого результата выведено

Предложение 2. [15] Пусть $\{P_j(D)\}_1^N$ — эллиптическая система дифференциальных полиномов порядка l . Тогда функции

$$\Phi_{j\alpha}(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi^\alpha \overline{P_j(\xi)}}{\sum_{k=1}^N |P_k(\xi)|^2}, \quad |\alpha| < l, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (6)$$

принадлежат $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p \in [1, \infty]$. Здесь $\chi(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — срезающая функция, т. е. $0 \leq \chi(\xi) \leq 1$, $\chi(\xi) = 0$ при $|\xi| \leq r$ и $\chi(\xi) = 1$ при $|\xi| > R$, где $0 \leq r < R$.

Срезающая функция $\chi(\cdot)$ в предложении 2 определена корректно, так как множество совместных нулей $\{\xi \in \mathbb{R}^n : P_j(\xi) = 0, j = \overline{1, N}\}$ системы эллиптических полиномов $\{P_j(\xi)\}_1^N$ компактно (см. [6]). Если это множество пусто, можно положить $\chi(\xi) \equiv 1$.

Следствие 2. [11] При $n = 1$ утверждение 2 справедливо для всех $|\alpha| \leq l$ для произвольного полинома $P(\xi_1)$ степени l .

Следствие 3. [13, 15] Пусть справедливы включения $\Phi_{j\alpha} \in \mathcal{M}$ для функций $\Phi_{j\alpha}(\cdot)$ вида (6). Тогда для всех соответствующих α справедливы включения $D^\alpha \in \mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, функция $\Psi(\xi) := (1 - \chi(\xi))\xi^\alpha$ финитна, поэтому $\Psi \in \mathcal{M}$ и

$$\xi^\alpha = \chi(\xi) \xi^\alpha + (1 - \chi(\xi)) \xi^\alpha = \sum_{j=1}^N \Phi_{j\alpha}(\xi) P_j(\xi) + \Psi(\xi), \quad \text{где } \Phi_{j\alpha}, \Psi \in \mathcal{M}.$$

Осталось применить теорему 1 де Лю и Миркила. □

Лемма 1. *Отношение подчиненности операторов транзитивно, т. е. если $Q_k \in \mathcal{L}_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$ при всех $k = \overline{1, M}$, то $\mathcal{L}_{p,\Omega}(Q_1, \dots, Q_M) \subset \mathcal{L}_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это свойство вытекает непосредственно из определения подчиненности операторов. В самом деле, пусть $Q \in \mathcal{L}_{p,\Omega}(Q_1, \dots, Q_M)$. Тогда

$$\|Q(D)f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{k=1}^M \|Q_k(D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) \quad (7)$$

и

$$\|Q_k(D)f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{1k} \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_{2k} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\overline{\Omega}), \quad k = \overline{1, M}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в правую часть (7), получим

$$\begin{aligned} \|Q(D)f\|_{L^p(\Omega)} &\leq C_1 \sum_{k=1}^M \left[C_{1k} \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_{2k} \|f\|_{L^p(\Omega)} \right] + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)} = \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\sum_{k=1}^M C_1 C_{1k} \right] \|P_j(D)f\|_{L^p(\Omega)} + \left[\sum_{k=1}^M C_1 C_{2k} + C_2 \right] \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\overline{\Omega}), \end{aligned}$$

откуда $Q \in \mathcal{L}_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$. $\square$

Следующее утверждение доказано в работе [13], хотя и не сформулировано там явно. Приведем его здесь без доказательства.

Лемма 2. [13] Пусть $n = 2$ и символ $P(\xi)$ оператора $P(D) = P(D_1, D_2)$ имеет вещественные нули $\xi_1 = \alpha_j, j = \overline{1, p}$ и $\xi_2 = \beta_k, k = \overline{1, q}$, ($\alpha_j \neq \alpha_k$ и $\beta_j \neq \beta_k$ при $j \neq k$), т. е.

$$P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - \alpha_1) \dots (\xi_1 - \alpha_p)(\xi_2 - \beta_1) \dots (\xi_2 - \beta_q) \tilde{P}(\xi), \quad (9)$$

где $\tilde{P}(\xi)$ — многочлен.

Если оператор $Q(D)$ таков, что $Q \in \mathcal{L}(P)$, то его символ $Q(\xi)$ имеет вид

$$Q(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - \alpha_1) \dots (\xi_1 - \alpha_p)(\xi_2 - \beta_1) \dots (\xi_2 - \beta_q) \tilde{Q}(\xi) + c, \quad (10)$$

где $\tilde{Q}(\xi)$ — многочлен, c — константа.

2.2. Многогранник Ньютона, теорема Бомана и ее обобщения.

Определение 3. [16] Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что *выпуклой оболочкой* $\text{ch } K$ множества K называется наименьшее выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее K (т. е. пересечение всех выпуклых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, содержащих K).

В случае, если множество K конечно, $K = \{v_j\}_{j=1}^m$, его выпуклая оболочка $\text{ch } K$ совпадает с множеством всевозможных *выпуклых комбинаций* точек $\{v_j\}_{j=1}^m$:

$$v = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Если точки $\{v_j\}_{j=1}^m$ линейно независимы, множество $\text{ch } K$ представляет собой замкнутый многогранник с вершинами в этих точках.

Определение 4. [8] Пусть $\{\mathcal{A}_j\}_{j=1}^N$ — конечные подмножества в $\mathbb{Z}_+^n$. Многогранником Ньютона (в случае $n = 2$ — многоугольником Ньютона) полиномов

$$P_j(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j} a_{j\alpha} \xi^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\},$$

будем называть *выпуклую оболочку* объединения множеств $\mathcal{A}_j$ и начала координат $0 = (0, \dots, 0)$ и обозначать ее через

$$\mathcal{N}(P_1, \dots, P_N) := \text{ch} [\cup_{j=1}^N \mathcal{A}_j \cup \{0\}].$$

Пример многоугольника Ньютона (м. Н.) на плоскости приведен на рис. 1.

Определение 5. [8, 9] Пусть $\mathcal{N}$ — многогранник Ньютона, ν — произвольный единичный вектор в $\mathbb{R}^n$ (т. е. $|\nu| = 1$). Множество

$$\Gamma := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, \nu \rangle = \max_{\eta \in \mathcal{N}} \langle \eta, \nu \rangle\}$$

назовем *гранью* многогранника $\mathcal{N}$, а вектор ν — ее *внешней нормалью* (см. рис. 2).

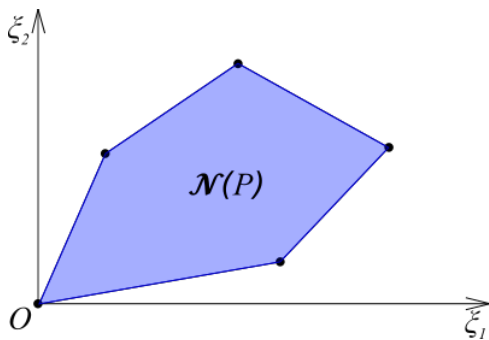


Рис. 1. Пример м. Н. на плоскости

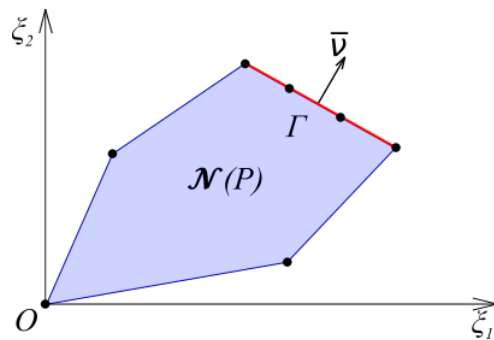


Рис. 2. Грань м. Н.

Отметим, что грань многогранника Ньютона может быть как точкой (вершиной — гранью размерности 0), отрезком прямой (ребром — гранью размерности 1) и т. д., так и частью гиперплоскости (гранью размерности $n - 1$).

Определение 6. [7] Назовем *координатным подпространством* в $\mathbb{R}^n$ размерности $k \in [0, n]$ подмножество в $\mathbb{R}^n$ вида

$$L_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_{j_1} = \xi_{j_2} = \dots = \xi_{j_{n-k}} = 0\},$$

где $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k} \leq n$ — возрастающая последовательность индексов. При $k = 0$ $L_0 = \{0\}$, а при $k = n$ полагаем $L_n := \mathbb{R}^n$.

Для дальнейшего целесообразно расширить понятие главной части дифференциального оператора, отнеся к ней мономы, лежащие на *некоторой грани* его многогранника Ньютона.

Определение 7. [7, 8] Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha \xi^\alpha$ — полином, $\mathcal{N}(P)$ — его многогранник Ньютона. Пусть также ν — произвольный единичный вектор из $\mathbb{R}^n$, Γ — соответствующая грань многогранника Ньютона $\mathcal{N}(P)$. Тогда ν -главной частью $P^\nu(\xi)$ полинома $P(\xi)$ (относительно $\mathcal{N}(P)$) будем называть полином

$$P^\nu(\xi) := \sum_{\alpha \in \Gamma \cap \mathcal{A}} a_\alpha \xi^\alpha.$$

В работе [1] Боман получил необходимые и достаточные условия подчиненности дифференциального монома в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ произвольной системе других мономов. Сформулируем этот результат в терминах многогранника Ньютона этой системы.

Теорема 2 (Бомана). [1] Пусть $\{\alpha_j\}_1^m$ и β — мультииндексы из $\mathbb{Z}_+^n$ и $\mathcal{N}$ — многогранник Ньютона системы мономов $\{\xi^{\alpha_j}\}_{j=1}^m$. Тогда включение

$$D^\beta \in \mathcal{L}(D^{\alpha_1}, \dots, D^{\alpha_m})$$

справедливо в точности тогда, когда β — либо внутренняя точка многогранника $\mathcal{N}$, либо принадлежит его грани, параллельной одному из k -мерных координатных подпространств в $\mathbb{R}^n$, где $0 \leq k \leq n-1$.

В работе автора [7] получен ряд обобщений теоремы 2.

Теорема 3. [7] Если для дифференциальных полиномов $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ справедлива априорная оценка (4), то для соответствующих многогранников Ньютона справедливо включение

$$\mathcal{N}(Q) \subset \mathcal{N}(P_1, \dots, P_N).$$

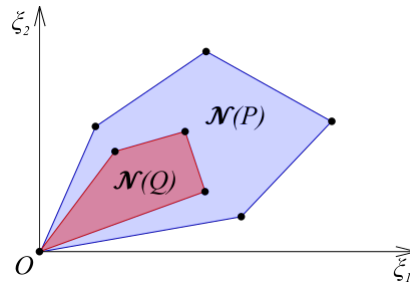


Рис. 3. Иллюстрация к теореме 3

Теорема 4. [7] Пусть операторы $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ удовлетворяют априорной оценке (4), $Q^\nu(\xi)$ и $\{P_j^\nu(\xi)\}_1^N$ — ν -главные части символов $Q(\xi)$ и $\{P_j(\xi)\}_1^N$ соответственно относительно многогранника Ньютона $\mathcal{N}(P_1, \dots, P_N)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $|\nu| = 1$.

Если все компоненты вектора ν отличны от нуля, $\nu_k \neq 0$ при $k = \overline{1, N}$, т. е. соответствующая грань многогранника Ньютона $\mathcal{N}(P_1, \dots, P_N)$ не параллельна ни одной из осей координат, то справедливо тождество

$$Q^\nu(\xi) = c_0 + \sum_{j=1}^N c_j P_j^\nu(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (11)$$

с некоторыми константами $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{0, \dots, N\}$.

§ 3. Основная теорема. В этом параграфе будет сформулирован и доказан основной результат работы — описано пространство $\mathcal{L}(P)$ для тензорного произведения $P(D) = p_1(D_1) \otimes p_2(D_2)$ двух операторов четвертого и пятого порядков, символы которых имеют как кратные вещественные, так и не вещественные нули.

Теорема 5. Пусть $n = 2$, $P(D_1, D_2) = p_1(D_1) \otimes p_2(D_2)$, где $p_1(D_1) := D_1^2(D_1^2 + I)$ и $p_2(D_2) := D_2^2(D_2 - I)(D_2^2 + I)$. Тогда $Q \in \mathcal{L}(P)$ в точности тогда, когда

$$Q(D) = c_1 + c_2 D_1 D_2 (D_2 - I) + \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq 2} c_{\alpha\beta} D_1^{2+\alpha} D_2^{2+\beta} (D_2 - I), \quad (12)$$

где c_1, c_2 и $\{c_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=0}^2$ — произвольные постоянные. Таким образом, $\dim \mathcal{L}(P) = 11$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Необходимость. Пусть $Q \in \mathcal{L}(P)$. Требуется доказать, что оператор $Q(D)$ имеет вид (12). Отметим сразу, что $\deg_{\xi_1} Q \leq \deg_{\xi_1} P = 4$, $\deg_{\xi_2} Q \leq \deg_{\xi_2} P = 5$ (см. введение).

Так как символ $P(\xi)$ имеет вещественные нули $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ и $\xi_2 = 1$, то по лемме 2 имеем

$$Q(\xi) = \xi_1 \xi_2 (\xi_2 - 1) \widehat{Q}(\xi_1, \xi_2) + c, \quad \text{где} \quad \deg_{\xi_k} \widehat{Q} \leq 3, \quad k = 1, 2.$$

Поэтому полином $Q(\xi)$ имеет вид

$$Q(\xi) = \xi_1 \xi_2 (\xi_2 - 1) \sum_{j,k=0}^3 c_{jk} \xi_1^j \xi_2^k + c. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(P)$ многочлена $P(\xi)$. Как нетрудно видеть, он имеет форму выпуклого четырехугольника с вершинами $(0; 0)$, $(2; 5)$, $(4; 5)$ и $(4; 2)$ (см. рис. 4). Согласно теореме 3, $\mathcal{N}(Q) \subset \mathcal{N}(P)$, поэтому мономы, соответствующие внешним для $\mathcal{N}(P)$ точкам $(1; 5)$, $(1; 4)$, $(1; 3)$, $(4; 1)$ и $(3; 1)$, не входят в запись $Q(\xi)$ (см. рис. 5).

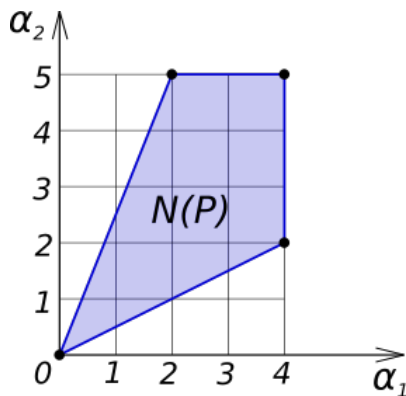


Рис. 4. М. Н. $\mathcal{N}(P)$ полинома $P = \xi_1^2(\xi_1^2 + 1) \otimes \xi_2^2(\xi_2^2 + 1)(\xi_2 - 1)$

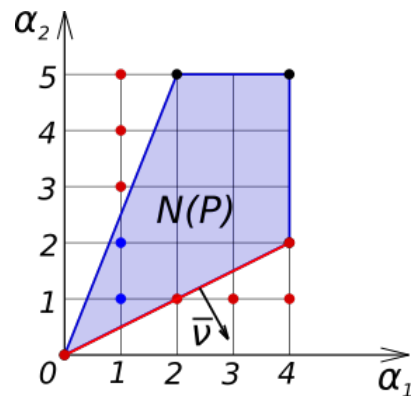


Рис. 5. Внешние точки и грань м. Н. $\mathcal{N}(P)$ полинома $P(\xi_1, \xi_2)$

Кроме того, точка $(2; 1)$ лежит на стороне четырехугольника $\mathcal{N}(P)$, не параллельной осям координат, и не совпадает с вершинами $\mathcal{N}(P)$. Поэтому, согласно теореме 4, моном $\xi_1^2 \xi_2$ также не входит в запись $Q(\xi)$. В самом деле, для соответствующего указанной стороне вектора нормали ν имеем (см. рис. 5):

$$Q^\nu(\xi) = c_0 + c_1 \xi_1^2 \xi_2 + c_2 \xi_1^4 \xi_2^2, \quad P^\nu(\xi) = -\xi_1^4 \xi_2^2,$$

и тогда в силу тождества (11) получим

$$c_0 + c_1 \xi_1^2 \xi_2 + c_2 \xi_1^4 \xi_2^2 \equiv C \xi_1^4 \xi_2^2 + C',$$

откуда $c_1 = 0$.

Ниже выпишем коэффициенты в сумме (13) при указанных шести мономах и приравняем их нулю. Имеем:

$$\begin{aligned} \xi_1 \xi_2^5 : \quad & c_{03} = 0, & \xi_1^4 \xi_2 : \quad & -c_{30} = 0; \\ \xi_1 \xi_2^4 : \quad & c_{02} - c_{03} = 0, & \xi_1^3 \xi_2 : \quad & -c_{20} = 0; \\ \xi_1 \xi_2^3 : \quad & c_{01} - c_{02} = 0, & \xi_1^2 \xi_2 : \quad & -c_{10} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из системы (14) получаем, что $c_{0k} = c_{j0} = 0$ при всех $j, k = \overline{1, 3}$, поэтому равенство (13) принимает вид

$$Q(\xi) = \xi_1 \xi_2 (\xi_2 - 1) \left[\sum_{j,k=1}^3 c_{jk} \xi_1^j \xi_2^k \right] + c = \sum_{j,k=0}^2 c_{jk} \xi_1^{2+j} \xi_2^{2+k} (\xi_2 - 1) + c_{00} \xi_1 \xi_2 (\xi_2 - 1) + c, \quad (15)$$

т. е. вид (12).

Отметим, что в записи (13) многочлена $Q(\xi)$ остался коэффициент c_{00} , а, значит, и "нетривиальный" полином $\xi_1 \xi_2 (\xi_2 - 1)$, соответствующий двум внутренним точкам $(1; 1)$ и $(1; 2)$ м. Н. $\mathcal{N}(P)$ (см. рис. 5). Нетривиальность этого слагаемого заключается в том, что остальные мономы, входящие в запись (15), естественным образом соответствуют стандартным мультипликаторам в $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ (см. далее доказательство достаточности, п. 2.1).

2. Достаточность. Пусть оператор $Q(D)$ имеет вид (12). Требуется показать, что $Q \in \mathcal{L}(P)$. В силу линейности пространства $\mathcal{L}(P)$, достаточно проверить, что операторы $R_{\alpha\beta}(D) := D_1^{2+\alpha} D_2^{2+\beta} (D_2 - I)$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 2$ и $T(D) := D_1 D_2 (D_2 - I)$ принадлежат $\mathcal{L}(P)$ (включение $I \in \mathcal{L}(P)$ очевидно).

2.1. Покажем, что $R_{\alpha\beta} \in \mathcal{L}(P)$ для всех $0 \leq \alpha, \beta \leq 2$. Рассмотрим отношение

$$\frac{R_{\alpha\beta}(\xi)}{P(\xi)} = \frac{\xi_1^{2+\alpha} \xi_2^{2+\beta} (\xi_2 - 1)}{\xi_1^2 (\xi_1^2 + 1) \xi_2^2 (\xi_2^2 + 1) (\xi_2 - 1)} = \frac{\xi_1^\alpha \xi_2^\beta}{(\xi_1^2 + 1) (\xi_2^2 + 1)} = \frac{\xi_1^\alpha}{\xi_1^2 + 1} \cdot \frac{\xi_2^\beta}{\xi_2^2 + 1}. \quad (16)$$

Знаменатели каждой из дробей $\frac{\xi_1^\alpha}{\xi_1^2 + 1}$ и $\frac{\xi_2^\beta}{\xi_2^2 + 1}$ — невырожденные полиномы одной переменной, и поэтому обе функции принадлежат $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ (а, значит, и $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$) при $\alpha \leq 2$ и $\beta \leq 2$ (см. следствие 2). А, значит, и $\frac{R_{\alpha\beta}(\xi)}{P(\xi)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, что в силу следствия 3 означает, что $R_{\alpha\beta} \in \mathcal{L}(P)$ при указанных α и β .

2.2. Покажем, что $T \in \mathcal{L}(P)$. Для этого рассмотрим вспомогательные дифференциальные полиномы:

$$T_1(D) := D_1^3 D_2^4 (D_2 - I), \quad T_2(D) := D_1^2 D_2^2 (D_2 - I)^3, \quad T_3(D) := D_1^4 D_2^3 (D_2 - I). \quad (17)$$

Легко видеть, что каждый из операторов (17) является линейной комбинацией операторов вида $R_{\alpha\beta}(D)$, введенных в п. 2.1, и поэтому $T_j \in \mathcal{L}(P)$ для всех $j = 1, 2, 3$.

Далее, наряду с операторами (17), введем дифференциальные мономы

$$S_1(D) := D_1^3 D_2^4 D_3, \quad S_2(D) := D_1^2 D_2^2 D_3^3, \quad S_3(D) := D_1^4 D_2^3 D_3. \quad (18)$$

Они получаются из операторов (17), если множитель $D_2 - I$ в них заменить на D_3 . Кроме того, рассмотрим моном $S(D) := D_1 D_2 D_3$, который получается из полинома $T(D) = D_1 D_2 (D_2 - I)$ таким же образом.

Воспользуемся теоремой 2 Бомана и покажем, что

$$S \in \mathcal{L}(S_1, S_2, S_3). \quad (19)$$

Для этого достаточно установить, что точка $(1; 1; 1)$ принадлежит внутренности многогранника Ньютона, образованного мономами $\{S_j(\xi)\}_1^3$, т. е. внутренности выпуклой оболочки точек $(3; 4; 1)$, $(2; 2; 3)$, $(4; 3; 1)$ и $(0; 0; 0)$. Аналитически это означает, что точка

$(1; 1; 1)$ является выпуклой комбинацией указанных четырех точек с ненулевыми коэффициентами. Нетрудно видеть, что

$$(1; 1; 1) = \frac{1}{17} (3; 4; 1) + \frac{5}{17} (2; 2; 3) + \frac{1}{17} (4; 3; 1) + \frac{10}{17} (0; 0; 0),$$

и, следовательно, требуемое включение (19) установлено.

Тогда, в силу теоремы 1, найдутся мультипликаторы $M_j(\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$, $j \in \{1, \dots, 4\}$ такие, что

$$S(\xi) = \sum_{j=1}^3 M_j(\xi) S_j(\xi) + M_4(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^3. \quad (20)$$

В тождестве (20) заменим ξ_3 на $\xi_3 - 1$, при этом преобразованные функции

$$\widetilde{M}_j(\xi) := M_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3 - 1), \quad j \in \{1, \dots, 4\}$$

останутся мультипликаторами в силу следствия 1. После указанного преобразования получим символы операторов $T(D)$ и $T_j(D)$, $j = 1, 2, 3$ соответственно:

$$T(\xi) = \sum_{j=1}^3 \widetilde{M}_j(\xi) T_j(\xi) + \widetilde{M}_4(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^3. \quad (21)$$

В силу теоремы 1, из тождества (21) вытекает включение $T \in \mathcal{L}(T_1, T_2, T_3)$. Но так как $T_j \in \mathcal{L}(P)$ для всех $j = 1, 2, 3$, то по свойству транзитивности пространства $\mathcal{L}(P)$ (см. лемму 1), имеем включение

$$T \in \mathcal{L}(T_1, T_2, T_3) \subset \mathcal{L}(P),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5 полностью доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boman J. Supremum norm estimates for partial derivatives of functions of several real variables / J. Boman // Illinois J. Math. 1972. – V. 16, № 2. – P. 203–216.
2. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 480 с.
3. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М.: ИЛ, 1959. – 132 с.
4. Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ / М. М. Маламуд // Труды ММО. – 1995. – Т. 56. – С. 206–261.
5. De Leeuw K. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm / K. de Leeuw, H. Mirkil // Illinois J. Math. – 1964. – V. 8, № 1. – P. 112–124.
6. Лиманский Д. В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Мат. сборник. – 2008. – Т. 199, № 11. – С. 75–112.
7. Лиманский Д. В. Обобщения теоремы Бомана и априорные оценки для систем минимальных дифференциальных операторов / Д. В. Лиманский // Труды ИПММ. – 2017. – Т. 31. – С. 118–133.
8. Волевич Л. Р. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
9. Геворгян О. В. Оценки мономов через квазиполиномы и коэрцитивность квазидифференциальных операторов / О. В. Геворгян // Известия Академии наук Армянской ССР. – 1990. – Т. 25, № 2. – С. 182–192.
10. Лиманский Д. В. Об оценках для тензорного произведения двух однородных эллиптических операторов / Д. В. Лиманский // Укр. матем. вісник. – 2011. – Т. 8, № 1. – С. 101–111.

11. Лиманський Д. В. Умови підпорядкованості для тензорного добутку двох звичайних диференціальних операторів / Д. В. Лиманський // Доповіді НАН України. – 2012. – № 4. – С. 25–29.
12. Лиманский Д. В. Многоугольник Ньютона и априорные оценки для дифференциальных полиномов на плоскости / Д. В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 67–79.
13. Лиманский Д. В. О подчиненности одного дифференциального оператора тензорному произведению других в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ / Д. В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 41–49.
14. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
15. Belinsky E. S. Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators / E. S. Belinsky, M. Z. Dvejrin, M. M. Malamud // Russian Journal of Math. Phys. – 2005. – V. 12, № 1. – P. 6–16.
16. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 472 с.

Поступила в редакцию 21.08.2021 г.

ON SUBORDINATED CONDITIONS FOR THE TENSOR PRODUCT OF TWO ORDINARY DIFFERENTIAL POLYNOMIALS WITH MULTIPLE REAL ZEROS

D. V. Limanskii

In the paper there is obtained a description for the linear space of minimal differential operators subordinated to the tensor product of two specific ordinary differential polynomials of the fourth and fifth orders, whose symbols have multiple real and non-real zeros. This example shows that, in contrast to the case of polynomials with symbols that have only real zeros, the indicated space can be nontrivial.

Keywords: differential polynomial, a priori estimate, tensor product, multiplier, Newton polyhedron.

Лиманский Дмитрий Владимирович

кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР
d.limanskiy@donnu.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Limanskii Dmitrii Vladimirovich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk National University,
Donetsk, DPR

УДК 517.5

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2021. А. Д. Манов

Хорошо известно, что для любой положительно определённой функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$. В работе доказано, что если дополнительно $f(x) = 0$ при $|x| \geq 1$, то выполняется неравенство $|f(x)| + |f(y)| \leq f(0)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $|x| + |y| \geq 1$. Кроме того, получено аналогичное неравенство для периодических положительно определённых функций специального вида.

Ключевые слова: положительно определённые функции, теорема Бохнера, преобразование Фурье.

§ 1. Введение. Комплекснозначная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ ($f \in \Phi(\mathbb{R})$), если для любого $n \in \mathbb{N}$, и для любых элементов $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geq 0. \quad (1)$$

Если $f \in \Phi(\mathbb{R})$, то из неравенства (1) при $n = 2$ вытекает, что $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$. Для некоторых классов положительно определённых функций это неравенство можно уточнить. Например, хорошо известно неравенство Боаса-Каца (см. [1]): Пусть $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 1$. Тогда справедливо неравенство:

$$|\varphi(x)| \leq \varphi(0) \cos \left(\frac{\pi}{\lceil 1/|x| \rceil + 1} \right), \quad |x| > 0,$$

где $\lceil a \rceil$ – наименьшее целое число, для которого $a \leq \lceil a \rceil$.

Отметим, что неравенство Боаса-Каца является аналогом неравенства Фейера-Эгервари-Сасса-Сегё для неотрицательных тригонометрических многочленов (см. [2, Satz I], [3], [4, Ch. 2, Theorem 2.4.1]).

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in \Phi(\mathbb{R})$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 1$. Тогда для всех $x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $|x| + |y| \geq 1$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)| + |\varphi(y)| \leq \varphi(0). \quad (2)$$

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\varphi \in C(\mathbb{R})$ и для некоторых $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ таких, что $|x_0| + |y_0| = 1$, $x_0 \notin \mathbb{Q}$ в (2) достигается равенство, то $\varphi(x) = \varphi(0)e^{i\beta x}(1 - |x|)_+$, $x \in \mathbb{R}$, где $\beta \in \mathbb{R}$;
- 2) если $\varphi \in C(\mathbb{R})$ и $\varphi(0) > 0$, то при $|x| + |y| > 1$ таких, что $x/y \notin \mathbb{Q}$ неравенство (2) является строгим.

Замечание 1. Отметим, что если $|\varphi(x_0)| + |\varphi(1 - x_0)| = \varphi(0)$ при некотором $x_0 \in \mathbb{Q}$, то отсюда, вообще говоря, не следует, что $\varphi(x) = \varphi(0)e^{i\beta x}(1 - |x|)_+$, $x \in \mathbb{R}$.

Действительно, пусть $x_0 = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$ и $0 < p < q$. Тогда функция $\varphi(x) := \cos(2\pi qx)(1 - |x|)_+$, $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и справедливо равенство $|\varphi(x_0)| + |\varphi(1 - x_0)| = \varphi(0)$.

Неравенство (2) является аналогом следующего неравенства для неотрицательных тригонометрических многочленов: Пусть $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ и $c_k := 0$ при $|k| \geq n + 1$. Тогда для всех $k, p \in \mathbb{Z}$ таких, что $|k| + |p| \geq n + 1$ справедливо неравенство:

$$|c_k| + |c_p| \leq c_0. \quad (3)$$

Неравенство (3) было доказано Эгервари и Сассом (см. [2, Satz 2]) в случае $|k| + |p| = n + 1$. В общем случае неравенство было доказано Schoenfeld в [5]. В [5] также приведено обобщение данного неравенства.

Отметим, что доказательства Эгервари, Сасса и Schoenfeld существенно опираются на представление Рисса-Фейера неотрицательных тригонометрических многочленов. В данной работе *основное утверждение* теоремы 1 доказывается иным способом, без использования аналогичного представления для финитных положительно определённых функций. Данный способ позволяет нам доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \Phi(\mathbb{R})$ и φ – 2π -периодическая функция такая, что $\varphi(x) = 0$ при $2\pi/(n + 1) \leq |x| \leq \pi$. Тогда справедливо неравенство:

$$\left| \varphi(x) + e^{i\frac{2\pi m}{n+1}} \varphi\left(x + \frac{2\pi}{n+1}\right) \right| \leq \varphi(0), \quad x \in [-2\pi/(n+1), 0], \quad m = 0, \dots, n+1. \quad (4)$$

В частности, если $\varphi(x) = \varphi(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ и n – нечётное число, то справедливо неравенство:

$$|\varphi(x)| + |\varphi(2\pi/(n+1) - x)| \leq \varphi(0), \quad x \in [0, 2\pi/(n+1)]. \quad (5)$$

Работа организована следующим образом. В разделе 2 приведены вспомогательные факты и утверждения. В разделах 3 и 4 мы докажем теоремы 1 и 2, соответственно.

§ 2. Вспомогательные факты и утверждения. Отметим следующие свойства функций из $\Phi(\mathbb{R})$. Пусть $f, f_i \in \Phi(\mathbb{R})$. Тогда:

- 1) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \bar{f}, \operatorname{Re} f, f_1 f_2 \in \Phi(\mathbb{R})$, где $\lambda_i \geq 0$;
- 2) $|f(x)| \leq f(0)$, $\overline{f(-x)} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
- 3) $|f(0)f(x+y) - f(x)f(y)|^2 \leq (f(0)^2 - |f(x)|^2)(f(0)^2 - |f(y)|^2)$, $x, y \in \mathbb{R}$; (неравенство Вейля)

Свойства 1) – 3) хорошо известны (см., например, [6, 7]).

Замечание 2. Пусть $f \in \Phi(\mathbb{R})$. Из неравенства Вейля следует, что если $|f(T)| = f(0)$ для некоторого $T \neq 0$, то $|f|$ является T -периодической функцией.

В 1932 году Бохнер и независимо Хинчин доказали следующий критерий положительной определённости:

Теорема 3 (Bohner-Хинчин). Функция $f \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}$ такая, что

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [6–8]. Как прямое следствие, мы получаем следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье:

Следствие 1. Если $f \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то $f \in \Phi(\mathbb{R}) \iff \widehat{f}(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}$, где

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx} dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

и в этом случае $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

Из следствия 1, например, вытекает положительная определённость функции $f(x) = (1 - |x|)_+, x \in \mathbb{R}$. Действительно, $\widehat{f}(t) = \sin^2(t/2)/(t/2)^2 \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Кроме того, из формулы обращения преобразования Фурье следует, что

$$(1 - |x|)_+ = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(t/2)}{(t/2)^2} e^{itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 1. Пусть $f \in \Phi(\mathbb{R})$ и $f(k) = 0$ при $|k| \geq m, k \in \mathbb{Z}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)e^{ikx} \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $x_p = p, c_p = e^{ipx}, p = 1, \dots, n$. Тогда из (1) вытекает, что

$$0 \leq \sum_{p,j=1}^n f(x_p - x_j)c_p \overline{c_j} = \sum_{k=-n}^n (n - |k|)f(k)e^{ikx}.$$

Остаётся поделить неравенство на n и перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. $\square$

Короткое доказательство леммы 1 воспроизведено из [7, Exercise 1.4.13].

Лемма 2. Пусть $h, s > 0$ и $\omega, \psi \in \Phi(\mathbb{R})$ такие, что для любого $x \in \mathbb{R}$ следующий ряд содержит лишь конечное число слагаемых:

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega(ks)\psi(x - kh), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда $F \in \Phi(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}, \{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию:

$$g(t) := \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \psi(x_i - x_j + t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из определения положительно определённых функций вытекает, что $g \in \Phi(\mathbb{R})$. Рассмотрим теперь функцию:

$$f(t) := \omega(ts) \overline{g(th)} = \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \omega(ts) \psi(x_i - x_j - th), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что $f \in \Phi(\mathbb{R})$. Из условий леммы вытекает, что для любого $x \in \mathbb{R}$ найдётся такое $m(x) \in \mathbb{N}$, что $\omega(ks)\psi(x - kh) = 0$ при $|k| \geq m(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, и значит, функция f удовлетворяет условиям леммы 1. Из (6) при $x = 0$ вытекает, что

$$0 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega(ks) \psi(x_i - x_j - kh) \right) = \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j F(x_i - x_j).$$

Таким образом, $F \in \Phi(\mathbb{R})$. □

Если взять $\omega(x) \equiv 1$, то получим следующее следствие.

Следствие 2. Пусть $h > 0$ и $\psi \in \Phi(\mathbb{R})$ такая, что $\psi(x) = 0$ при $|x| \geq a$, $a > 0$. Тогда следующая функция является положительно определённой на $\mathbb{R}$:

$$F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(x - kh), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следствие 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\psi \in \Phi(\mathbb{R})$ и ψ – 2π -периодическая функция. Тогда следующая функция является положительно определённой на $\mathbb{R}$:

$$F(x) := \sum_{k=0}^n \psi \left(x - \frac{2\pi k}{n+1} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega(x) := (1 - |x|)_+$, $x \in \mathbb{R}$ и $s = 1/(n+1)$, $h = 2\pi/(n+1)$. Из леммы 2 вытекает, что следующая функция положительно определена на $\mathbb{R}$:

$$G(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{|k|}{n+1} \right)_+ \psi \left(x - \frac{2\pi k}{n+1} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что $F(x) = G(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$G(x) = \psi(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \psi \left(x - \frac{2\pi k}{n+1} \right)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=-n}^{-1} \left(1 + \frac{k}{n+1} \right) \psi \left(x - \frac{2\pi k}{n+1} \right)}_{S_2}.$$

Преобразуем последнее слагаемое S_2 :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \psi \left(x + \frac{2\pi k}{n+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{n+1} \cdot \psi \left(x - 2\pi + \frac{2\pi k}{n+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{n+1} \cdot \psi \left(x - 2\pi \frac{n+1-k}{n+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} \cdot \psi \left(x - \frac{2\pi k}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$G(x) = \psi(x) + S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^n \psi \left(x - \frac{2\pi k}{n+1} \right) =: F(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Также нам потребуются некоторые утверждения, связанные с целыми функциями экспоненциального типа $\leq \sigma$ (ц.ф.э.т. $\leq \sigma$). Обозначим символом $W_{p,\sigma}$ множество ц.ф.э.т. $\leq \sigma$ таких, что их сужение на $\mathbb{R}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$.

Хорошо известно следующее описание неотрицательных функций из $W_{1,\sigma}$. (см. [9, 7.5.1], [6, Theorem 3.10.2], [1, Lemma 5.1]).

Теорема 4 (Боас-Кац, Крейн). Пусть $f \in W_{1,\sigma}$ и $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда найдётся $g \in W_{2,\sigma/2}$ такая, что справедливо равенство:

$$f(x) = |g(x)|^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 3. Пусть $f \in W_{2,\sigma}$ и $f(\pi k/\sigma) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $f(z) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Пэли-Винера вытекает, что найдётся функция $h \in L_2[-\sigma, \sigma]$ такая, что

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} h(t) e^{itz} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из полноты системы экспонент $\{e^{i\pi kt/\sigma}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ в $L_2[-\sigma, \sigma]$ вытекает, что $h(x) = 0$ п. в. на $[-\sigma, \sigma]$, и значит, $f(z) \equiv 0$. $\square$

Утверждение леммы 3 также следует из теоремы Котельникова-Шеннона (см., например, [8, 3.4.7]).

Лемма 4. Пусть $f \in W_{2,\sigma}$, $m_0 \in \mathbb{Z}$ и $\xi \in \mathbb{C}$. Если $f(\pi k/\sigma) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{m_0\}$ и $f(\pi m_0/\sigma) = \xi$, то

$$f(z) = \xi \cdot \frac{\sin(\sigma z - \pi m_0)}{\sigma z - \pi m_0}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $F(z)$:

$$F(z) := f(z) - \xi \cdot \frac{\sin(\sigma z - \pi m_0)}{\sigma z - \pi m_0}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, что функция F удовлетворяет условиям леммы 3, и значит, $F(z) \equiv 0$. $\square$

Лемма 5. Пусть $f \in W_{2,\sigma}$, $\varepsilon > \sigma$ и $\{k_1, \dots, k_n\} \subset \mathbb{Z}$. Если $f(\pi k/\varepsilon) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{k_1, \dots, k_n\}$, то $f(z) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем набор чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ такой, что $0 < \alpha_p < (\varepsilon - \sigma)/n$, $p = 1, \dots, n$. Определим теперь функцию $F(z)$ следующим образом:

$$F(z) := f(z)g(z), \quad \text{где } g(z) := \prod_{p=1}^n \sin \alpha_p(z - \pi k_p/\varepsilon).$$

Так как

$$\sigma + \alpha_1 + \dots + \alpha_n < \sigma + n \cdot \frac{\varepsilon - \sigma}{n} = \varepsilon,$$

то F – ц.ф.э.т. $\leq \varepsilon$. Кроме того, так как функция g ограничена на $\mathbb{R}$, то сужение функции F на $\mathbb{R}$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$. Таким образом, $F \in W_{2,\varepsilon}$.

Очевидно, что $F(\pi k/\varepsilon) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Из леммы 3 следует, что $F(z) \equiv 0$. Отсюда получаем, что $f(z) \equiv 0$ или $g(z) \equiv 0$, но $g(z) \not\equiv 0$. Таким образом, $f(z) \equiv 0$. $\square$

§ 3. Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi \in \Phi(\mathbb{R})$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 1$. Так как функция $G(x, y) := |\varphi(x)| + |\varphi(y)|$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ чётная по каждой переменной, то достаточно доказать неравенство (2) для $x, y \geq 0$, $x + y \geq 1$. Кроме того, можно ограничиться случаем $\max\{x, y\} \leq 1$, так как в противном случае неравенство (2) тривиально.

Пусть $h \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть также $\psi(x) := e^{i\alpha x}\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ и

$$F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(x - kh), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для функции $|F|$ справедливо следующее равенство:

$$|F(x)| = |e^{i\alpha x}\varphi(x) + e^{i\alpha(x-h)}\varphi(x-h)| = |\varphi(x) + e^{-i\alpha h}\varphi(x-h)|, \quad x \in [0, h], \quad h \geq 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

При $\alpha = (\arg \varphi(x-h) - \arg \varphi(x))/h$ получим, что

$$|F(x)| = |\varphi(x)| + |\varphi(x-h)| = |\varphi(x)| + |\varphi(h-x)|, \quad x \in [0, h], \quad h \geq 1.$$

Из следствия 2 вытекает, что $F \in \Phi(\mathbb{R})$, и значит, $|F(x)| \leq F(0)$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем, что

$$|\varphi(x)| + |\varphi(h-x)| \leq \varphi(0), \quad x \in [0, h], \quad h \geq 1.$$

Сделаем замену $y := h - x$. Очевидно, что $y \geq 0$ и $x + y \geq 1$. Основное утверждение теоремы доказано.

1) Если $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(x) \equiv 0$ и в этом случае утверждение 1) тривиально. Далее будем предполагать, что $\varphi(0) > 0$. Кроме того, можно ограничиться случаем $\varphi(0) = 1$.

Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R})$ и для некоторого x_0 , $x_0 \notin \mathbb{Q}$ и $y_0 = 1 - x_0$ неравенство (2) обращается в равенство, т. е.

$$|\varphi(x_0)| + |\varphi(1 - x_0)| = \varphi(0) = 1.$$

Отсюда вытекает, что при $h = 1$ и некотором $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $|F(x_0)| = F(0)$. Так как $F \in \Phi(\mathbb{R})$, то x_0 является периодом функции $|F|$ (см. замечание 2).

С другой стороны функции $|F|$ является 1-периодической. Таким образом, функция $|F|$ имеет два несоизмеримых периода. Так как $F \in C(\mathbb{R})$, то $|F(x)| \equiv 1$.

Из неравенства Вейля вытекает, что функция F удовлетворяет функциональному соотношению

$$F(x + y) = F(x)F(y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

и значит, F является гомоморфизмом группы $\mathbb{R}$ в группу комплексных чисел, равных по модулю единице с обычной операцией умножения.

Хорошо известно, что все такие *непрерывные* гомоморфизмы имеют вид $e^{i\gamma x}$, $x \in \mathbb{R}$, где $\gamma \in \mathbb{R}$. Так как F – 1-периодическая функция, то $F(x) = e^{i2\pi m_0 x}$, $x \in \mathbb{R}$ для некоторого $m_0 \in \mathbb{Z}$.

Найдём выражение коэффициентов Фурье функции F через значения преобразования Фурье функции ψ :

$$\begin{aligned} c_k(F) &:= \int_0^1 F(x)e^{-2\pi i k x} dx = \int_0^1 (\psi(x) + \psi(x-1))e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \int_0^1 \psi(x)e^{-2\pi i k x} dx + e^{-2\pi i k} \int_{-1}^0 \psi(x)e^{-2\pi i k x} dx = \int_{-1}^1 \psi(x)e^{-2\pi i k x} dx = \widehat{\psi}(2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Из единственности разложения в ряд Фурье вытекает, что

$$\widehat{\psi}(2\pi m_0) = 1, \quad \widehat{\psi}(2\pi k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{m_0\}.$$

Так как $\widehat{\psi}(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}, \widehat{\psi} \in L_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{\psi}$ продолжается до ц.ф.э.т. ≤ 1 , то из теоремы 4 следует, что существует ц.ф.э.т. $\leq 1/2$ g такая, что

$$\widehat{\psi}(t) = |g(t)|^2, t \in \mathbb{R}.$$

Так как $g \in L_2(\mathbb{R})$ и $g(2\pi m_0) = e^{i\delta}, \delta \in \mathbb{R}, g(2\pi k) = 0, k \neq m_0$, то из леммы 4 следует, что

$$g(z) = e^{i\delta} \cdot \frac{\sin(z/2 - \pi m_0)}{z/2 - \pi m_0}, z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2((t - 2\pi m_0)/2)}{((t - 2\pi m_0)/2)^2} e^{itx} dt = e^{i2\pi m_0 x} (1 - |x|)_+, x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi(x) = e^{i(2\pi m_0 - \alpha_0)x} (1 - |x|)_+, x \in \mathbb{R}.$$

Полагая $\beta := 2\pi m_0 - \alpha_0$ получаем требуемое. Утверждение 1) доказано.

2) Очевидно, что утверждение 2) достаточно доказать в предположении, что $x, y > 0$ и $\varphi(0) = 1$.

Предположим противное, что для некоторых $|x_0| + |y_0| > 1$ таких, что $x_0/y_0 \notin \mathbb{Q}$ выполняется равенство

$$|\varphi(x_0)| + |\varphi(y_0)| = \varphi(0) = 1.$$

Тогда при $h = y_0 + x_0 > 1$ и некотором $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $|F(x_0)| = F(0)$.

Так как $F \in \Phi(\mathbb{R})$, то x_0 является периодом функции $|F|$ (см. замечание 2). Очевидно, что $x_0/h \notin \mathbb{Q}$, и значит, функция $|F|$ имеет два несоизмеримых периода.

Далее рассуждая также, как и при доказательстве утверждения 1) получаем, что для некоторого $m_0 \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$F(x) = e^{\frac{i2\pi m_0 x}{h}}, x \in \mathbb{R}.$$

Не сложно найти выражение коэффициентов Фурье функции F через значения преобразования Фурье функции ψ :

$$c_k(F) := \frac{1}{h} \int_0^h F(x) e^{-\frac{2\pi i k x}{h}} dx = \frac{1}{h} \widehat{\psi}\left(\frac{2\pi k}{h}\right), k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Из единственности разложения в ряд Фурье вытекает, что

$$\widehat{\psi}\left(\frac{2\pi m_0}{h}\right) = 1, \quad \widehat{\psi}\left(\frac{2\pi k}{h}\right) = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{m_0\}.$$

Так как $\widehat{\psi}(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}, \widehat{\psi} \in L_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{\psi}$ продолжается до ц.ф.э.т. ≤ 1 , то из теоремы 4 следует, что существует ц.ф.э.т. $\leq 1/2$ g такая, что

$$\widehat{\psi}(t) = |g(t)|^2, t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем, что

$$g\left(\frac{2\pi k}{h}\right) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{m_0\}.$$

Пусть $\varepsilon := h/2$. Тогда $\varepsilon > 1/2$ и из леммы 5 вытекает, что $g(t) \equiv 0$. Получили противоречие, с тем, что $\varphi(0) > 0$.

Теорема доказана. $\square$

§ 4. Доказательство теоремы 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \Phi(\mathbb{R})$ и φ – 2π -периодическая функция такая, что $\varphi(x) = 0$ при $2\pi/(n+1) \leq |x| \leq \pi$.

Пусть $m \in \mathbb{Z}$ и $\psi(x) := e^{imx}\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию

$$F(x) := \sum_{k=0}^n \psi\left(x - \frac{2\pi k}{n+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для функции $|F|$ при всех $x \in [-2\pi/(n+1), 0]$ и $m \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство:

$$|F(x)| = \left| e^{imx}\varphi(x) + e^{im\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right)}\varphi\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right) \right| = \left| \varphi(x) + e^{i\frac{2\pi m}{n+1}}\varphi\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right) \right|.$$

Из следствия 3 вытекает, что $F \in \Phi(\mathbb{R})$, и значит, $|F(x)| \leq F(0)$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем, что

$$\left| \varphi(x) + e^{i\frac{2\pi m}{n+1}}\varphi\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right) \right| \leq \varphi(0), \quad x \in [-2\pi/(n+1), 0], \quad m = 0, \dots, n+1.$$

Неравенство (4) доказано. Докажем теперь (5). Пусть $n = 2p - 1$, $p \in \mathbb{N}$.

При $m = 0$ и $m = p$ получаем, что для всех $x \in [-2\pi/(n+1), 0]$ справедливы неравенства:

$$\left| \varphi(x) + \varphi\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right) \right| \leq \varphi(0), \quad \left| \varphi(x) - \varphi\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right) \right| \leq \varphi(0). \quad (8)$$

Из чётности φ следует, что она принимает только вещественные значения. Таким образом, из неравенств (8) вытекает, что

$$|\varphi(x)| + |\varphi(x + 2\pi/(n+1))| \leq \varphi(0), \quad x \in [-2\pi/(n+1), 0].$$

Остаётся сделать замену $x \rightarrow -x$. Теорема 2 доказана. $\square$

§ 5. Заключение. В заключении отметим, что по мнению автора, представляет интерес следующая задача.

Обозначим символом $\mathfrak{F}$ множество функций $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ таких, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 1$. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Требуется найти следующую величину:

$$M(x, y) := \sup\{|\varphi(x)| + |\varphi(y)| : \varphi \in \mathfrak{F}\}. \quad (9)$$

Очевидно, что в задаче (9) достаточно рассматривать только точки (x, y) из множества $D : 0 \leq y \leq x$. Кроме того, если $1 \leq y \leq x$, то $M(x, y) = 0$. Из теоремы 1 вытекает, что $M(x, y) \leq 1$ при $|x| + |y| \geq 1$ и $M(x, y) = 1$ при $|x| + |y| = 1$. Отметим также, что из точности неравенства Боаса-Каца можно получить решения в случае, когда точка (x, y) принадлежит одной из прямых $y = x$ или $y = 0$, а также в случае, когда точки принадлежат множеству: $x \geq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Похожие задачи об оценке значений положительно определённых функций из различных классов рассматривались в ряде работ. Отметим, в частности [10] и [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boas R. P., Jr. Inequalities for Fourier transforms of positive functions / R. P., Jr Boas, M. Kac // Duke Math. J. – 1945. – Vol. 12, № 1. – P. 189 – 206.
2. Egerváry E. Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome / E. Egerváry, O. Szász // Math. Zeitschr. – 1928. – Bd. 27. – S. 641 – 652.
3. Поля Г. Задачи и теоремы из анализа Ч. 2. / Г. Поля, Г. Серё. – М.: Наука, 1978. – 435 с.
4. Milivanović G. V. Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros. / G. V. Milivanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias. – Singapore: World Sci., 1994. – 821 p.
5. Schoenfeld L. On The Coefficients of a Trigonometric Polynomial / L. Schoenfeld // SIAM Rev. – 1965. – V. 7, № 2. – P. 293 – 294.
6. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions / Z. Sasvári. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. – 366 p.
7. Bisgaard T. M. Characteristic functions and moment sequences: Positive definiteness in probability / T. M. Bisgaard, Z. Sasvári. – New York: Nova Sci. Publishers, 2000. – 144 p.
8. Trigub R. M. Fourier Analysis and Approximation of Functions / R. M. Trigub, E. S. Belinsky. – Boston, Dordrecht, London: Kluwer-Springer, 2004. – 585 p.
9. Boas R. P., JR. Entire Functions / Boas R. P., JR. – New York: Academic Press, 1954. – 276 p.
10. Arestov V. On pointwise Turan's problem for positive definite functions / V. Arestov, E. Berdysheva, H. Berens // East J. Approx. – 2003. – V. 9, № 1. – P. 31 – 42.
11. Kolountzakis M. On Pointwise Estimates of Positive Definite Functions With Given Support / M. Kolountzakis, S. G. Révész // Canad. J. Math. – 2006. – V. 58, № 2. – P. 401 – 418.

Поступила в редакцию 10.06.2021 г.

SOME INEQUALITIES FOR POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS

A. D. Manov

It is well-known that, for any positive definite function $f(x)$ on $\mathbb{R}$, the inequality $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$ holds. We prove that if additionally $f(x) = 0$ for $|x| \geq 1$, then, for all $x, y \in \mathbb{R}$ such that $|x| + |y| \geq 1$, the following inequality holds: $|f(x)| + |f(y)| \leq f(0)$. In addition, we obtained a similar inequality for a special class of periodic positive definite functions.

Keywords: positive-definite functions, Bochner theorem, Fourier transform.

Манов Анатолий Дмитриевич

ассистент

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

manov.ad@ro.ru

83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

пр. Театральный, 13, IV корпус ДонНУ,

кафедра математической физики

Manov Anatoliy Dmitrievych

assistant, Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 517.988.28

О ФУНКЦИЯХ С НУЛЕВЫМИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО РАВНОСТОРОННИМ ТРЕУГОЛЬНИКАМ

© 2021. П. А. Машаров

Получены новые двусторонние оценки наименьшего радиуса шара, в котором из равенства нулю интегралов следует равенство нулю функции. Рассматриваются поверхностные интегралы по равносторонним треугольникам в многомерном пространстве.

Ключевые слова: проблема Помпейю, экстремальный радиус Помпейю, свойства функции с нулевыми интегралами по равносторонним треугольникам, локальный вариант проблемы Помпейю, радиус Помпейю для равностороннего треугольника.

§ 1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

при всех $\lambda \in M(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A . В этой постановке указанная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ получили румынский математик Помпейю в 1929 году [1, 2] и другие [3–5].

Для многих конкретных случаев известен ряд результатов, с помощью которых можно определить, имеет ли множество A свойство Помпейю или нет [6–9]. Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [10]:

Пусть A — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, гомеоморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание $\bar{A} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница A является вещественно–аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

Этот результат показывает, что многие множества A с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. В случае множества A с вещественно–аналитической границей ситуация сложнее. Примерами множеств $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ для любого $n \geq 2$ являются эллипсоид, отличный от шара, замыкание внутренности тора и другие [11].

Относительно недавно были получены примеры множеств Помпейю, граница которых не обязательно липшицева [12]. Одним из таких множеств является «снежинка Коха».

В случае, когда некоторое множество не обладает свойством Помпейю, наличие ненулевой функции с условием (1) дает возможность получить нетривиальные оценки плотности укладки произвольного компакта в $\mathbb{R}^n$ множествами вида λA , $\lambda \in M(n)$. Такие оценки получил Б. Д. Котляр [13]. Если же A имеет свойство Помпейю, то в силу теоремы Винера возможна аппроксимация в $L_1(\mathbb{R}^n)$ линейными комбинациями индикаторов множеств вида λA , $\lambda \in M(n)$ [14].

Ряд обобщений проблемы Помпейю связан с заменой тройки $(\mathbb{R}^n, M(n), dx)$ на тройку $(X, \mathcal{Z}, d\mu)$, где X — многообразие, $\mathcal{Z}$ — группа Ли, действующая транзитивно

на X , $d\mu$ — инвариантная относительно $\mathcal{Z}$ мера на X . Одним из наиболее интересных примеров является случай, когда X — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\mathcal{Z}$ — группа конформных автоморфизмов X [15, 16].

Другие обобщения проблемы Помпейю возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, которые инвариантны только относительно вращений. Наиболее полная теория в этом направлении соответствует тому, что известно под названием локальной проблемы Помпейю.

Упомянув о методике решения указанных задач, следует отметить, что наиболее сильные результаты из цитированных выше работ получены с помощью аппарата преобразования Фурье и других элементов гармонического анализа. Несмотря на достигнутые успехи, в ряде случаев такой подход является либо неприменимым, либо недостаточно тонким (например, при изучении локальных вариантов проблемы Помпейю). Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы.

§ 2. Постановка задачи. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R^n$ и равенство (1) выполняется при всех $\lambda \in M(n)$ таких, что $\lambda A \subset \mathbb{B}_R^n$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ п.в. в $\mathbb{B}_R^n$, будем говорить, что A является множеством Помпейю на шаре $\mathbb{B}_R^n$ и обозначать $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$. Если $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого значения радиуса R (по сравнению с размерами множества A) выполняется $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ [17–19].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0: A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)\},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A .

В [19] поставлена следующая

Проблема 1. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(A)$.

Если точное значение $\mathcal{R}(A)$ найти не удаётся, то возникает

Проблема 2. Для данного компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ получить оценки величины $\mathcal{R}(A)$, уточняющие известные ранее.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К. А. Беренштейном и Р. Гэм [17, 18], а также В. В. Волчковым [19, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [19–24].

Выше рассматривались случаи, когда компактное множество A имеет такую же размерность, что и пространство. Пусть теперь размерность множества A равна $m \leq n$, интеграл в (1) понимается как m -кратный. Чтобы выделить такие интегралы, вместо dx будем писать $d\mu_m$. В определении множества Помпейю в $\mathbb{B}_R^n$ для множества положительной коразмерности (если $m < n$) локальную суммируемость функции f заменим на непрерывность. Это обусловлено тем, что даже равная нулю почти всюду (по n -мерной мере Лебега μ_n) функция может иметь не все равные нулю интегралы, поскольку если множество A имеет размерность $m < n$, то $\mu_n(A) = 0$. Будем рассматривать совокупность $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)$ всех m -мерных множеств Помпейю в $\mathbb{B}_R^n$ и величину

$$\mathcal{R}_{m,n}(A) = \inf\{R > 0: A \in \mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)\}.$$

Аналогично проблеме 1, в [25] поставлена следующая

Проблема 3. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^m$ найти значение $\mathcal{R}_{m,n}(A)$.

Локальный вариант проблемы Помпейю для множеств положительной коразмерности напоминает теорему Мореры, в которой из нулевых интегралов по границам плоских множеств делается вывод о голоморфности функции. В [26] рассмотрена проблема Помпейю для шаров и сфер положительной коразмерности. Достаточно полный список множеств A , для которых известно точное значение $\mathcal{R}_{m,n}(A)$, можно найти в [27, 28].

В данной работе в качестве множества, для которого изучаются аналоги проблемы Помпейю, рассмотрен $T = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, |x_2| \leq \frac{x_1}{\sqrt{3}}, x_k = 0, k \in \{3, \dots, n\}\}$ — плоский равносторонний треугольник со стороной 1. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. Для любого $n \geq 3$ имеет место оценка $\frac{13\sqrt{3}}{36} \leq \mathcal{R}_{2,n}(T) \leq \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Заметим, что $\mathcal{R}_{2,2}(T) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ (В. В. Волчков, 1996, [29]), минимальный радиус $r^*(T)$ замкнутого шара в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), содержащего T , равен $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$, а для любого $n \geq 3$ полученные в данной работе границы оценки $\frac{13\sqrt{3}}{36} \approx 0,625$, $\frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0,661$.

§ 3. Вспомогательные обозначения и утверждения. Далее будем рассматривать действительное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geq 3$ со стандартным скалярным произведением и евклидовой нормой $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $M(n)$ — группу движений $\mathbb{R}^n$. Для непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ положим $\text{Mot}(A, B) = \{\lambda \in M(n) : \lambda A \subset B\}$. Для $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ рассмотрим шар $\mathbb{B}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ и сферу $\mathbb{S}_R^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = R\}$ в $\mathbb{R}^n$ радиуса R ; $\mathbb{B}_{r,R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < R\}$ — шаровой слой, если $r \geq 0$, или шар в $\mathbb{R}^n$, если $r < 0$. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ под ∂A будем понимать множество граничных точек A , а под $\bar{A} = A \cup \partial A$ — замыкание A .

Для непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $L_{loc}(B)$ будем понимать класс локально интегрируемых на B функций, то есть таких функций $f : B \rightarrow \mathbb{C}$, для которых интеграл по любому компактному подмножеству из B конечен. Так как интегрирование часто будет вестись по множествам вида λA , где множество A рассматривается m -мерным, то здесь и далее под dx в случаях $m \leq n$ понимается m -мерная мера Лебега μ_m . Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества B под $C^k(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в B , $C(B)$ — класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(B)$.

Далее, под $\mathfrak{P}(A, B)$ будем понимать класс функций из $L_{loc}(B)$, для которых равенство (1) верно для всех $\lambda \in \text{Mot}(\bar{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^k(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^k(B)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^\infty(B)$; $\mathfrak{P}_0^\infty(A, B)$ — класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(A, B)$, то есть таких, что для любых $x, y \in B$, для которых $|x| = |y|$, выполняется $f(x) = f(y)$.

Для обозначения частной производной функции $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ по переменной x_j будем использовать запись $\frac{\partial u}{\partial x_j}$. Символ Δ обозначает оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Заметим, что из линейности пространств гладких и интегрируемых функций следует линейность пространств $\mathfrak{P}^k(A, B)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Для произвольного непустого $B \subset \mathbb{R}^n$, фиксированного числа $\varepsilon > 0$ и вектора $t \in \mathbb{R}^n$ положим $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon, y \in B\}$, $B + t = \{x + t \in \mathbb{R}^n : x \in B\}$.

Лемма 1. Пусть A — компакт, B — область в $\mathbb{R}^n$, числа $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\varepsilon > 0$ фиксированы, функция $\varphi_\varepsilon \in C^k(B_\varepsilon)$ имеет носитель $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset \mathbb{B}_\varepsilon^n$, а функция $f \in \mathfrak{P}(A, B_\varepsilon)$. Тогда свёртка $f * \varphi_\varepsilon \in \mathfrak{P}^k(A, B)$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [27].

Лемма 2. Пусть A — компакт с внутренними точками в $\mathbb{R}^m$ ($m \leq n$), для произвольного фиксированного значения $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ дифференциальный оператор $\partial = \partial/\partial x_j$. Пусть также для некоторого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$, для которого $\text{Mot}(A, B) \neq \emptyset$, выполнено $f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B)$. Тогда $\partial f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B)$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [27].

Для произвольного непустого компакта или ограниченной области A из $\mathbb{R}^n$ через $r^*(A)$ обозначим радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего $\bar{A}$. Таким образом, $r^*(A) = \inf\{R > 0: \exists \lambda \in \text{Mot}(\bar{A}, \mathbb{B}_R^n)\}$. Отметим, что из определений $r^*(A)$ и $\text{Mot}(A, B)$ следует, что для произвольного компакта A множество $\text{Mot}(A, \mathbb{B}_R^n) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $R > r^*(A)$, а для открытого ограниченного множества — когда $R \geq r^*(A)$.

Для рассматриваемого в настоящей работе множества T значение $r^*(T)$ равно радиусу описанной окружности, $r^*(T) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$. Отсюда следует тривиальная оценка снизу радиуса Помпейю: $\mathcal{R}_{2,n}(T) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ для любого $n \geq 2$. С другой стороны, учитывая $\mathcal{R}_{2,2}(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, вполне естественно считать, что $\mathcal{R}_{2,n}(T) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ для всех $n \geq 2$.

Координаты точки в $\mathbb{R}^n$, начиная с некоторой, если они нули, будем обозначать одним символом $\vec{0}$. Обозначим начало координат $O(\vec{0})$, вершины треугольника T : $\zeta_0 = (\vec{0})$, $\zeta_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \vec{0})$, $\zeta_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \vec{0})$, стороны, соединяющие вершины ζ_j и ζ_k — ζ_{jk} , где $j, k \in \{0, 1, 2\}$, $j < k$, $\zeta_3(\frac{\sqrt{3}}{2}, \vec{0})$ — середина стороны ζ_{12} . Если $\mathfrak{E}$ — элемент треугольника T (вершина, точка, сторона), то, когда будет рассматриваться треугольник λT ($\lambda \in \mathbb{M}(n)$), его соответствующий элемент будем обозначать $\lambda \mathfrak{E}$. Например, сторона треугольника ζ_{12} трансформируется в $\lambda \zeta_{12}$.

Рассмотрим дифференциальные операторы $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\partial = \partial_1 \partial_2 \partial_3$. Замети, что для этих операторов выполняются равенства: $df(t, -\frac{t}{\sqrt{3}}, \vec{0}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial x_2}) dt = \partial_1 f dt$, $df(\frac{\sqrt{3}}{2}, t, \vec{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_2} dt = \partial_2 f dt$, $df(t, \frac{t}{\sqrt{3}}, \vec{0}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial x_2}) dt = \partial_3 f dt$.

Лемма 3. Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ функция $f \in C^3(T_\varepsilon)$. Тогда имеют место равенства

$$\int_T (\partial_1 \partial_3 \frac{\partial}{\partial x_1} f)(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-1/2}^{1/2} (\Delta f)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, t, \vec{0}\right) dt - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_1) \right) + \quad (2)$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_1);$$

$$\int_T \partial f d\mu_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} (\partial_2 f)(\zeta_0) - (\partial_3 f)(\zeta_1) + (\partial_1 f)(\zeta_2). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переход от кратного интеграла по T к повторному можно осуществить двумя способами:

$$\begin{aligned} \int_T f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 &= \int_0^{\sqrt{3}/2} dx_1 \int_{-x_1/\sqrt{3}}^{x_1/\sqrt{3}} f(x_1, x_2, \vec{0}) dx_2 = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} dx_2 \int_{\sqrt{3}|x_2|}^{\sqrt{3}/2} f(x_1, x_2, \vec{0}) dx_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим } \int_T \partial_1 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 &= \int_{-1/2}^{1/2} dx_2 \int_{\sqrt{3}|x_2|}^{\sqrt{3}/2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \vec{0}) dx_1 - \\ - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}/2} dx_1 \int_{-x_1/\sqrt{3}}^{x_1/\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \vec{0}) dx_2 &= \int_{-1/2}^{1/2} (f(\frac{\sqrt{3}}{2}, x_2, \vec{0}) - f(\sqrt{3}|x_2|, x_2, \vec{0})) dx_2 - \end{aligned}$$

$-\frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}/2} (f(x_1, \frac{x_1}{\sqrt{3}}, \vec{0}) - f(x_1, -\frac{x_1}{\sqrt{3}}, \vec{0})) dx_1$. Сделаем замены $t = \pm\sqrt{3}x_2$ в интеграле $-\int_{-1/2}^{1/2} f(\sqrt{3}|x_2|, x_2, \vec{0}) dx_2 = -\int_{-1/2}^0 f(-\sqrt{3}x_2, x_2, \vec{0}) dx_2 - \int_0^{1/2} f(\sqrt{3}x_2, x_2, \vec{0}) dx_2 =$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}/2}^0 f(t, -\frac{t}{\sqrt{3}}, \vec{0}) dt - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}/2} f(t, \frac{t}{\sqrt{3}}, \vec{0}) dt$, а в остальных переменную интегрирования заменим на t . Тогда $\int_T \mathfrak{d}_1 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-1/2}^{1/2} f(\frac{\sqrt{3}}{2}, t, \vec{0}) dt - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}/2} f(t, \frac{t}{\sqrt{3}}, \vec{0}) dt$.

Учитывая теперь формулу вычисления интеграла от полного дифференциала, получаем

$$\int_T \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-1/2}^{1/2} (\mathfrak{d}_3 f)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, t, \vec{0}\right) dt - \frac{2}{\sqrt{3}} f(\zeta_2) + \frac{2}{\sqrt{3}} f(\zeta_0). \quad (4)$$

Так как $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\frac{\sqrt{3}}{2}, t, \vec{0}) dt = f(\zeta_2) - f(\zeta_1)$, то (4) можно записать в виде

$$\int_T \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, t, \vec{0}\right) dt - \frac{1}{\sqrt{3}} f(\zeta_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} f(\zeta_1) + \frac{2}{\sqrt{3}} f(\zeta_0).$$

Отсюда $\int_T (\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 \frac{\partial}{\partial x_1} f)(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\frac{\sqrt{3}}{2}, t, \vec{0}) dt - \frac{1}{\sqrt{3}} (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_1)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0)$. Прибавляя к этому $0 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\frac{\sqrt{3}}{2}, t, \vec{0}) dt - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_1)$, получаем $\int_T (\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 \frac{\partial}{\partial x_1} f)(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-1/2}^{1/2} (\Delta f)(\frac{\sqrt{3}}{2}, t, \vec{0}) dt - \frac{1}{\sqrt{3}} (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_1)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_1)$.

Для доказательства (3) подставим в (4) $\mathfrak{d}_2 f$ вместо f и поменяем местами дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Получим $\int_T \mathfrak{d} f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = (\mathfrak{d}_3 f)(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \vec{0}) - (\mathfrak{d}_3 f)(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \vec{0}) - \frac{2}{\sqrt{3}} (\mathfrak{d}_2 f)(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \vec{0}) + \frac{2}{\sqrt{3}} (\mathfrak{d}_2 f)(0, 0, \vec{0}) = \frac{2}{\sqrt{3}} (\mathfrak{d}_2 f)(\vec{0}) - (\mathfrak{d}_3 f)(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \vec{0}) + (\mathfrak{d}_1 f)(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \vec{0})$. $\square$

Для доказательства основного результата воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого можно найти в [19]. Перед его формулировкой введем используемые в нём обозначения. Для набора точек $\{v_\nu\}_{\nu=1}^k \subset \mathbb{R}^n$, где $v_i \neq v_j$ для $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$, числа $\varepsilon > 0$ положим $\Omega_{\nu, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : |v_\nu| - \varepsilon < |x| < |v_\nu| + \varepsilon\}$, $\nu = 1, \dots, k$. Для открытого непустого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ под $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$ понимается класс радиальных локально суммируемых в $\mathcal{U}$ распределений. $\vec{\partial} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$.

Утверждение 1 (Теорема 3.2 из [19, Глава 4]). Пусть $F_\nu \in \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu, \varepsilon})$ для $\nu = 1, \dots, k$ и существуют многочлены $P_\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что для любого $x \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$ выполняется $\sum_{\nu=1}^k (P_\nu(\vec{\partial}) F_\nu)(x + v_\nu) = 0$, которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен $P: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $P(\Delta) F_\nu = 0$ в $\Omega_{\nu, \varepsilon}$.

Для $R > \frac{\sqrt{3}}{3}$ будем рассматривать различные положения треугольника λT внутри шара $\mathbb{B}_R^3$. Обозначим ρ_0, ρ_1, ρ_2 — расстояния от начала координат до вершины $\lambda\zeta_0$, до стороны $\lambda\zeta_{12}$, до плоскости треугольника λT соответственно. Для каждого $j \in \{0, 1, 2\}$ положим $\min_j = \inf\{\rho_j: \lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)\}$ и $\max_j = \sup\{\rho_j: \lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)\}$, для $0 < a < b$ шаровой слой в $\mathbb{R}^3$ обозначим $\mathbb{B}(a; b) = \{x \in \mathbb{R}^3: a < |x| < b\}$.

Лемма 4. Пусть $R \in (\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} \max_0 &= R, & \min_0 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}; \\ \max_1 &= \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}, & \min_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - R; \\ \max_2 &= \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}}, & \min_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства будем рассматривать $\lambda \in \text{Mot}(T, \overline{\mathbb{B}_R^2})$ и для изучения $\rho_2 \lambda \in \text{Mot}(T, \overline{\mathbb{B}_R^3})$. Учитывая содержащиеся в Mot сдвиги и вращения, не важно, каких именно представителей вершин и сторон треугольника выбирать для доказательства необходимых равенств.

Рассмотрим λ_1 — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $-R$ (см. рис. 1). Тогда координаты вершин $\lambda_1\zeta_{1/2} = (\frac{\sqrt{3}}{2} - R, \pm\frac{1}{2}, \vec{0})$, расстояние $\rho(O, \lambda_1\zeta_{1/2}) = \sqrt{1 - \sqrt{3}R + R^2} < R$ так как $R > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Значит $\lambda_1 \in \text{Mot}(T, \overline{\mathbb{B}_R^3})$. Так как координаты вершины $\lambda_1\zeta_0 = (-R, \vec{0})$, и расстояние $\rho(O, \lambda_1\zeta_0) = R$, то $\max_0 = R$.

Отрезок $O\lambda_1\zeta_3$ перпендикулярен отрезку, соединяющему точки $\lambda_1\zeta_1$ и $\lambda_1\zeta_2$, значит расстояние $\rho(O, \lambda_1\zeta_{12}) = O\lambda_1\zeta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - R$, так как $R < \frac{\sqrt{3}}{2}$. С другой стороны, по неравенству треугольника, для произвольного $\lambda \in \text{Mot}(T, \overline{\mathbb{B}_R^3})$ выполняется неравенство $\rho(\lambda\zeta_0, \lambda\zeta_3) \leq \rho(\lambda\zeta_0, O) + \rho(O, \lambda\zeta_3)$, откуда $\rho(O, \lambda\zeta_3) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - \rho(\lambda\zeta_0, O) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - R$, значит $\min_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - R$.

Рассмотрим λ_2 — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $-(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}})$ (см. рис. 2). Тогда координаты вершин $\lambda_2\zeta_{1/2} = (\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}, \pm\frac{1}{2}, \vec{0})$, и $\lambda_2\zeta_0 = (\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \vec{0})$, расстояния $\rho(O, \lambda_2\zeta_{1/2}) = R$, $\rho(O, \lambda_2\zeta_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} < R$, поскольку $R > \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $\lambda_2 \in \text{Mot}(T, \overline{\mathbb{B}_R^3})$. Так как при этом обе вершины $\lambda_2\zeta_1$ и $\lambda_2\zeta_2$ находятся на сфере $\mathbb{S}_R^3$, то расстояние $\rho(O, \lambda_2\zeta_3) = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$ — максимально возможное значение ρ_1 , то есть $\max_1 = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$.

По неравенству треугольника, для произвольного $\lambda \in \text{Mot}(T, \overline{\mathbb{B}_R^3})$ выполняется неравенство $\rho(\lambda\zeta_0, \lambda\zeta_3) \leq \rho(\lambda\zeta_0, O) + \rho(O, \lambda\zeta_3)$, откуда $\rho(\lambda\zeta_0, O) \geq \rho(\lambda\zeta_0, \lambda\zeta_3) - \rho(O, \lambda\zeta_3) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$.

Так как для λ_2 оценка снизу достигается, то $\min_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$.

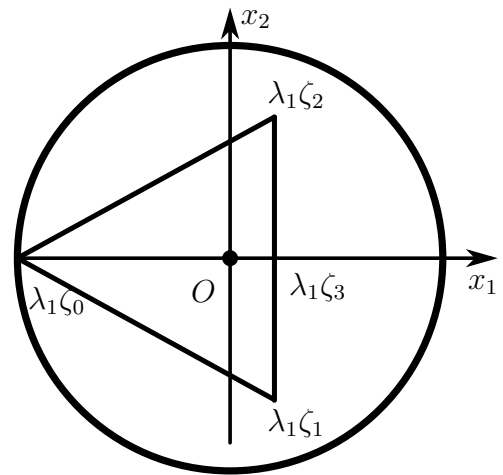


Рис. 1. Положение $\lambda_1 T$

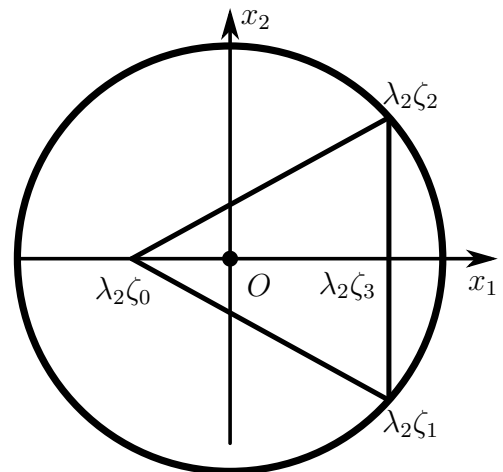


Рис. 2. Положение $\lambda_2 T$

Рассмотрим теперь в $\mathbb{R}^3$ λ_3 — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и вдоль оси Ox_3 на $\sqrt{R^2 - \frac{1}{3}}$ (см. рис. 3). Тогда координаты вершин $\lambda_3\zeta_0 = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}})$, $\lambda_3\zeta_{1/2} = (\frac{\sqrt{3}}{6}, \pm\frac{1}{2}, \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}})$, и расстояния от них до начала координат равно R . Значит $\lambda_3 \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)$. Расстояние $\rho(O, \lambda_3 T)$ равно длине перпендикуляра, проведенного из O к $\lambda_3 T$. Так как вершины находятся на сфере $\mathbb{S}_R^3$, то это расстояние — максимально возможное.

Если $\zeta_4 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \vec{0})$, то координаты $\lambda_3\zeta_4 = (0, 0, \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}})$, отрезок, соединяющий O с точкой $\lambda_3\zeta_4$ перпендикулярен плоскости треугольника $\lambda_3 T$, значит $\max_2 = \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}}$. Минимальное аналогичное расстояние достигается для движения, оставляющего треугольник в плоскости Ox_1x_2 , и равно $\min_2 = 0$.

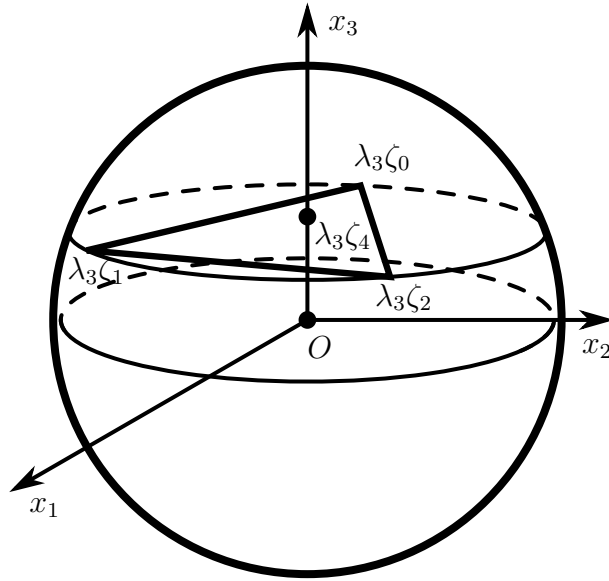


Рис. 3. Положение $\lambda_3 T$

Решим несколько неравенств с найденными выражениями. Рассмотрим $\min_0 < \max_1$. Имеем $\frac{\sqrt{3}}{2} < 2\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$. Учитывая неотрицательность обеих частей неравенства, получаем $\frac{3}{16} < R^2 - \frac{1}{4}$; $R^2 > \frac{7}{16}$; $|R| > \frac{\sqrt{7}}{4}$. Так как $R > 0$, то $R > \frac{\sqrt{7}}{4}$. Заметим, что $\frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0,661$.

Теперь рассмотрим $\min_1 < \max_2$. Имеем $\frac{\sqrt{3}}{2} - R < \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}}$; $\frac{3}{4} - \sqrt{3}R + R^2 < R^2 - \frac{1}{3}$; $\sqrt{3}R > \frac{13}{12}$; $R > \frac{13\sqrt{3}}{36}$. При этом $\frac{13\sqrt{3}}{36} \approx 0,625$. Из этих рассуждений получаем

Замечание 1. Для $R \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, в обозначениях (5), решением неравенства $\min_1 < \max_2$ является $\frac{13\sqrt{3}}{36} < R < \frac{\sqrt{3}}{2}$, а системы неравенств $\min_0 < \max_1$; $\min_1 < \max_2$ является $\frac{\sqrt{7}}{4} < R < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Лемма 5. Пусть $R > \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}; R)$.

Доказательство. Применим утверждение 1 к $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3) \subset \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu, \varepsilon})$ для набора точек $v_\nu = \zeta_j$ ($j \in \{0, 1, 2\}$) — вершин треугольника T . Учитывая равенство (3), левая часть которого в данном случае по лемме 2 обратится в нуль, получаем, что существует нетривиальный многочлен $q: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\Omega_{\nu, \varepsilon}$. Так как функция f общая для всех точек v_ν , то $\Omega_{\nu, \varepsilon}$ представляет из себя множество точек из $\mathbb{B}_R^3$, в которые можно попасть вершинами треугольника λT , $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)$. Таким образом, $\Omega_{\nu, \varepsilon} = \mathbb{B}(\min_0; \max_0)$, что, с учетом леммы 4, завершает доказательство. $\square$

Для формулировки следующего утверждения рассмотрим преобразование Радона. Пусть $n \geq 2$; $\xi(\omega, d)$ — гиперплоскость с расстоянием d до начала координат, нормалью которой является вектор $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Преобразование Радона вводится для $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\mathbf{R}f(\omega, d) = \int_{\xi(\omega, d)} f(x) dx,$$

где в данном случае dx — $(n - 1)$ -мерная мера.

Утверждение 2 (Следствие 8.4 из [19, Глава 1]). Пусть $r \geq 0$, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет $\mathbf{R}f(\omega, d) = 0$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ и почти всех $d \in (r, +\infty)$. Если существует множество $\Omega \subset (r, +\infty)$ положительной меры такое, что $f(x) = 0$ в $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \in \Omega\}$, тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}(r; +\infty)$.

Лемма 6. Пусть $R > \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлен q из леммы 5, для которого выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}(\min_0; \max_0)$, и функции $F = q(\Delta)f$, $\tilde{F} = \Delta F$. По лемме 2, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$. Применив лемму 2 к функции F , получаем (2), что означает выполнение равенств $\int_{\lambda\zeta_{12}} \tilde{F}(x) ds = 0$, где ds — элемент длины отрезка ζ_{12} , $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)$.

Другими словами, имеем нулевые интегралы от $\tilde{F}$ по всем отрезкам, расстояние от которых до начала координат лежит в пределах от $\min_1$ до $\max_1$. Доопределив $\tilde{F}$ нулем вне $\mathbb{B}_R^3$, имеем нулевые интегралы от $\tilde{F}$ по всем прямым, расстояние от которых до начала координат больше $\min_1$. Отсюда интегралы по всем плоскостям, расстояние до которых от начала координат больше $\min_1$, равны нулю, что по утверждению 2 означает $\tilde{F} = 0$ в $\mathbb{B}(\min_1, R)$.

Аналогичными рассуждениями, учитывая выполнение $\max_2 > \min_1$ и нулевые интегралы по всем треугольникам $\lambda T \subset \mathbb{B}_R^3$ от функции $\tilde{F}$, а значит и по всем плоскостям, получаем $\tilde{F} = 0$ в $\mathbb{B}(\min_2, R)$, то есть в $\mathbb{B}_R^3$. $\square$

Приведём одно довольно общее утверждение, доказательство которого можно найти в [19], предварительно пояснив смысл входящих в него обозначений.

Пусть $\mathcal{U}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Под $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ понимается класс функций из $C^\infty(\mathcal{U})$ с компактным носителем в $\mathcal{U}$; $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ — пространство распределений на $\mathcal{U}$; $SO(n)$ — группа евклидовых вращений пространства $\mathbb{R}^n$; для распределения $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ и $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ распределение $\lambda\varphi$ определяется на $\mathcal{D}'(\lambda^{-1}\mathcal{U})$ формулой $\langle \lambda\varphi, f(x) \rangle = \langle \varphi, f(\lambda^{-1}x) \rangle$, где $f \in \mathcal{D}(\lambda^{-1}\mathcal{U})$, $\langle \varphi, f \rangle$ обозначает значение φ на элементе f ; $\mathcal{D}'_\varphi(\mathcal{U}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}) : f * \varphi = 0 \text{ в области определения}\}$; $C_\varphi^m(\mathcal{U}) = (\mathcal{D}'_\varphi \cap C^m)(\mathcal{U})$, где $m \in \mathbb{Z}_+$ или $m = \infty$; $A_\varphi^m(\mathcal{U}) = \bigcap_{\tau \in SO(n)} C_{\tau\varphi}^m(\mathcal{U})$.

Утверждение 3 (Предложение 5.9 из [19, Глава 1]). Пусть $\mathcal{U} = \mathbb{B}_R^n$ и $A_\varphi^\infty(\mathcal{U}) \neq \{0\}$. Тогда $A_\varphi^\infty(\mathcal{U})$ содержит радиальную функцию, отличную от нуля.

Взяв $\varphi = \chi_T$ — индикатор множества T , получаем

Следствие 1. Пусть для некоторого $R > 0$ выполняется $\mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3) = \{0\}$. Тогда $\mathfrak{P}^\infty(T, \mathbb{B}_R^3) = \{0\}$.

Лемма 7. Пусть $R > \frac{\sqrt{3}}{3}$, для некоторой функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$ и для некоторого многочлена $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ выполняется $\Delta q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R^3$. Тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}_R^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть разложение на линейные множители многочлена $b \cdot q(b)$ имеет вид $bq(b) = b_0(b - b_1) \cdot \dots \cdot (b - b_m)$. Рассмотрим $g = (\Delta - b_2) \cdot \dots \cdot (\Delta - b_m)f$, $g \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$. Для неё имеем дифференциальное уравнение $(\Delta - b_1)g = 0$ в $\mathbb{B}_R^3$, общим решением которого при $b_1 \neq 0$ является $g(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{b_1}\rho) + C_2 N_0(\sqrt{b_1}\rho)$, при $b_1 = 0$ $g(\rho) = C_3 + C_4 \ln \rho$, где J_0 , N_0 — функции Бесселя и Неймана соответственно. Учитывая, что $N_0(\sqrt{b_1}\rho)$ и $\ln |\rho|$ имеют особенности в нуле, а $g(\rho)$ непрерывна, то $C_2 = C_4 = 0$. Значит $g(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{b_1}\rho)$ или $g(\rho) = C_3$ в $\mathbb{B}_R^3$. Продолжая её в $\mathbb{R}^3$ этими же функциями,

получаем, что вещественно-аналитическая $g \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{R}^3)$. А так как T является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^2$, то $g = 0$. Рассуждая аналогично для $(\Delta - b_3) \cdot \dots \cdot (\Delta - b_m)f, \dots, f$, приходим к утверждению леммы. $\square$

Приведём ещё одно утверждение, которое необходимо будет для доказательства основного утверждения.

Утверждение 4 (Следствие 8.2 из [19, Глава 1]). Пусть чётная функция $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. Тогда существует $f \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, что $\mathbf{R}f(\omega, d) = g(d)$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}^1$.

§ 4. Построение решения задачи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим сначала случай $R \in (\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{13\sqrt{3}}{36})$. Исходя из леммы 4 и замечания 1, для указанного R выполняется неравенство $\max_2 < \min_1$. Рассмотрим функцию

$$g(d) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |d| \leq \max_2; \\ e^{1/((|d| - \max_2)(|d| - \min_1))}, & \max_2 < |d| < \min_1; \\ 0, & |d| \geq \min_1. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет условиям утверждения 4, поэтому существует такая $f \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, что $\mathbf{R}f(\omega, d) = g(d)$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}^1$. Это означает, что интегралы от f по всем плоскостям, расстояние от которых до начала координат меньше $\max_2$ или больше $\min_1$ равны нулю. Исходя из утверждения 2, $f(\rho) = 0$, если $\rho \geq \min_1$, причем не верно, что $f = 0$ п.в., поскольку иначе выполнялось бы $\mathbf{R}f(\omega, d) = 0$ всюду.

По определению величин $\max_2$ и $\min_1$, для любого $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^n)$ плоскость треугольника λT удалена от начала координат не дальше, чем на $\max_2$, при этом $\lambda T \cap \mathbb{B}_{\min_1}^n \subset \lambda T$, поскольку стороны находятся на расстоянии большем, чем $\min_1$. Следовательно, ненулевая функция $f \in \mathfrak{P}(T, \mathbb{B}_R^n)$, что доказывает оценку $\mathcal{R}_{2,n}(T) > R$, откуда $\mathcal{R}_{2,n}(T) \geq \frac{13\sqrt{3}}{36}$.

Пусть теперь $R > \frac{\sqrt{7}}{4}$, $f: \mathbb{B}_R^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in C(\mathbb{B}_R^3)$ и удовлетворяет (1) для любого $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)$. Для $r \in (\frac{\sqrt{7}}{4}; R)$ рассмотрим $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$: $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{B}_{R-r}^3$. Тогда по лемме 1 функция $\tilde{f} = \varphi * f \in C^\infty(\mathbb{B}_r^3)$ и удовлетворяет (1) для любого $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_r^3)$, то есть $\tilde{f} \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_r^3)$. По лемме 6 существует ненулевой многочлен $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)\tilde{f} = 0$ в $\mathbb{B}_r^3$. Отсюда по лемме 7 $\tilde{f} = 0$ в $\mathbb{B}_r^3$, что означает $\mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_r^3) = \{0\}$. Применив следствие 1, получаем $\mathfrak{P}^\infty(T, \mathbb{B}_r^3) = \{0\}$. Устремив $r \rightarrow R - 0$, приходим к $f = 0$ в $\mathbb{B}_R^3$, что означает $\mathcal{R}_{2,3}(T) \leq \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Рассмотрим произвольной точку $y \in \mathbb{B}_R^n$, где размерность $n \geq 4$ и $R > \sqrt{7}/4$. Сечение $\mathbb{B}_R^n$ трехмерной гиперплоскостью, проходящей через y и начало координат O , является, если там ввести свою систему координат, шаром $\mathbb{B}_R^3$. Если некоторая функция имеет нулевые интегралы по треугольникам в $\mathbb{B}_R^n$, то и в полученном $\mathbb{B}_R^3$, откуда, учитывая непрерывность f , из доказанного выше следует, что $f \equiv 0$ в $\mathbb{B}_R^3$, значит и в точке y , откуда $\mathcal{R}_{2,n}(T) \leq \frac{\sqrt{7}}{4}$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompeiu D. Sur certains systems d'equation lineaires et sur une propriete integrale de fonctions de plusieurs variables / D. Pompeiu // C. R. Accd. Sci. Paris. – 1929. – V. 188. – P. 1138–1139.
2. Pompeiu D. Sur une propriete de fonctions continues depended de deux variables realles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1929. – V. 15, № 5. – P. 265–269.
3. Nicolesco M. Sur un theoreme de Pompeiu / M. Nicolesco // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1930. – V. 16, № 5. – P. 817–822.

4. Ilieff L. Sur un probleme de Pompeiu / L. Ilieff // Ann. Univ. Sofia Fac. Phys., Livre 1. – 1949. – V. 45. – P. 111–114.
5. Christov C. Sur laquation integrale generalisee de Pompeiu / C. Christov // Ann. Univ. Sofia Fac. Sci., Livre 1. – 1949. – V. 45. – P. 167–178.
6. Произволов В. В. Об интегралах, постоянных на конгруэнтных областях / В. В. Произволов // Мат. заметки. – 1977. – Т. 21, №2. – С. 183–186.
7. Заставный В. П. Теорема о нулях преобразования Фурье индикатора и ее применение / В. П. Заставный. – Новосибирск: Ред. «Сиб. мат. журн.». – 1986. – 18 с. Деп. в ВИНТИ 29.10.87: № 701-в. 87.
8. Ebenfalt P. Some results on the Pompeiu problem / P. Ebenfalt // Ann. Acad. Sci. Ser. A. J. Math. – 1993. – V. 24. – P. 16–31.
9. Garofalo N. Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // J. Anal. Math. – 1991. – v. 56. – p. 1–28.
10. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183–190.
11. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 352. – P. 2723–2736.
12. Volchkov V. V. New results in integral geometry / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Contemp. Math. – 2005. – V. 382. – P. 417–432.
13. Котляр Б. Д. Плотности упаковок ограниченных множеств / Б. Д. Котляр // Сообщ. Акад. наук Грузинской ССР. – 1987. – Т. 126, №3. – С. 469–472.
14. Sitaram A. On an analogue of the Wiener Tauberian theorem for symmetric spaces of the non-compact type / A. Sitaram // Pacific J. Math. – 1988. – V. 133. – P. 197–208.
15. Benyamini Y. Harmonic analysis of spherical functions on $SV(1, 1)$ / Y. Benyamini, Y. Weit // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1992. – V. 42. – P. 671–694.
16. Agranovsky M. L. Fourier transform on $SL_2(\mathbb{R})$ and Morera type theorem / M. L. Agranovsky // Sovo Math. Dokl. – 1978. – V. 19. – P. 1522–1525.
17. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
18. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
19. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
20. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al., 1992. – P. 185–194.
21. Zalcman L. Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of the Pompeiu problem'. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
22. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
23. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
24. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12., № 1. – С. 51–79.
25. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для квадрата в трёхмерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 50–60.
26. Chang D. C. The Pompeiu problem for sets of higher codimension in Euclidean space and the Heisenberg group / D. C. Chang, W. Eby // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2008. – V. 12. – pp. 2619–2640.
27. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для куба в многомерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020. – № 2. – С. 92–103.
28. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства из треугольника и квадрата / П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко // Труды Института прикладной математики и механики. – 2020. – Т. 34. – С. 85–92.
29. Волчков В. В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры / В. В. Волчков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 6. – С. 804–809.

30. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции : Пер. с англ. П.А. Кучмента. - М. : Мир, 1987 с.

Поступила в редакцию 14.08.2021 г.

ON FUNCTIONS WITH ZERO SURFACE INTEGRALS OVER EQUILATERAL TRIANGLES

P. A. Masharov

New two-sided estimates of the smallest radius of the ball are obtained, in which the equality of integrals to zero implies the equality of the function to zero. Surface integrals over equilateral triangles in a multidimensional space are considered.

Keywords: the Pompeiu problem, the extreme Pompeiu radius, the properties of functions with vanishing integrals by equilateral triangles, the local Pompeiu problem, the Pompeiu radius for the equilateral triangle.

Машаров Павел Анатольевич

кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР
pavelmasharov@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Masharov Pavlo Anatoliyovych

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk National University,
Donetsk, DPR

Научное издание

**Вестник Донецкого национального университета.
Серия А: Естественные науки
2021. – № 2**

Технические редакторы: *М. В. Фоменко, П. А. Машаров*

Свидетельство о регистрации СМИ Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

Адрес редакции:
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
ул. Университетская, 24,
83001, г. Донецк
Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: <http://donnu.ru/vestnikA>

Подписано к печати 28.09.2021 г.
Формат 60 × 84/8. Бумага офсетная.
Печать — цифровая. Усл. печ. л. 14,0
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24,
Тел: (062) 302-92-27.
Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности
в Государственный реестр
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.