ISSN 2415-7058

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Основан в 1997 году

Серия А
Естественные науки

1/2019

Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки»

Главный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**

Зам. главного редактора – д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**

Ответственный секретарь: канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**

Члены редколлегии: д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; д-р экон. наук., проф. **В.Н. Андриенко**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Белоусов**; доктор философии, профессор **С.В. Белый** (Тройский университет, США); д-р физ.-мат. наук, проф. **Б.В. Бондарев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Беларуси **С.А. Жданок** (Беларусь); д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров;** д-р физ.-мат. наук, доц. **С.А. Мельник** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**; д-р техн. наук, проф. **Ф.В. Недопекин**; д-р биол. наук, проф. **В.И. Соболев** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**; д-р биол. наук, проф. **Н.Н. Ярошенко**.

The Editorial Board of the journal "Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences"

The Editor-in-Chief – Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**

The Deputy of the Editor-in-Chief – Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**

Executive Secretary: Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**

The Members of the Editorial Board: Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Dr. of econ., prof. **V.N. Andrienko**; Dr. of tech., prof. **V.V. Belousov**; Dr of of Philosophy, prof. **S.V. Belyi** (Troy University, USA; Dr. of phys. and math., prof. **B.V. Bondarev**; Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Zhdanok** (Belarus); Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov;** Dr. of phys. and math., docent **S.A. Melnik** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **F.V. Nedopiokin**; Dr. of biol., prof. **V.I. Sobolev** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**; Dr. of biol., prof. **N.N. Jaroshenko**.

Адрес редакции: ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 283001

Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92.
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru **URL**: http://donnu.ru/vestnikA

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказы МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г. и № 1468 от 26.12.2017 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 – Математика; 01.02.00 – Механика; 01.04.00 – Физика; 02.00.00 – Химические науки; 03.02.00 – Общая биология.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Протокол № 5 от 31.05.2019 г.

© ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», 2019

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

***Серия А.* Естественные науки** **№ 1** Донецк **2019**

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Aleksandrova O.V., Zhmykhova T.V. The use of group analysis methods to value an insurance company capital in financial (B, S)-market with the price of risk asset described by Heston's model 3

Бондарев Б.В., Мельничук Н.Ю. Гарантированное оценивание неизвестного параметра, линейно входящего в снос стохастического дифференциала с периодическими коэффициентами при внутреннем периодическом зашумлении 8

Швидкий О.Н. Распространение дробного оператора Лапласа на пространство S' и некоторые приложения 16

Механика

Абрамова О.П. Комплексные нулевые операторы в связанной фрактальной структуре с элементами цилиндрического типа 25

Зыза А.В., Платонова Е.С. Новое полиномиальное решение одной задачи о движении гиростата 36

Калоеров С.А. Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит 42

Физика

Абрамов В.С. Активные нанообъекты, нейтрино и бозон Хиггса во фрактальных квантовых системах 59

Данилов В.В., Тимченко В.И. Оптические информационные технологии: физические основы 72

Пойманов В.Д. Аномальный сдвиг Гуса-Хенхен в гематите 84

Химические науки

Котенко А.А., Хилько С.Л., Прокопьева Т.М., Михайлов В.А. Мицеллообразование дигалогенгалогенатов цетилтриметиламмония в щелочных водных растворах 90

Крюк Т.В., Тюрина Т.Г., Кобцева О.С. Модификация сополимеров малеинового ангидрида с винилацетатом аминокислотами 100

Биологические науки

Кольченко О.Р., Корниенко В.О. Методический подход к оценке флуктуирующей асимметрии клена остролистного (*Acer platanoides* L.) в условиях г. Донецка 107

Мирненко Э.И. Гидрохимический режим прудов Старобешевского района 115

Сафонов А.И. Инвентаризация промышленных объектов Донбасса по фитоиндикационным критериям 121

Чуфицкий С.В., Ляшова А.С. Влияние солей тяжелых металлов на флуоресценцию клеток *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna* 129

Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

***Series A.* Natural Sciences** **No 1** Donetsk **2019**

CONTENTS

Mathematics

Александрова О.В., Жмыхова Т.В. Использование методов группового анализа для оценки капитала страховой компании на финансовом (B,S)-рынке с описываемой моделью Хестона ценой рискового актива 3

Bondarev B.V., Melnichuk N.Y. Guaranteed estimation of the unknown linear input parameter in the stochastic differential with periodic coefficients with internal periodic noise 8

Shvydkyi O.N. Extension of a fractional Laplace operator on space S' and some applications 16

Mechanics

Abramova O.P. Complex zero operators in coupled fractal structure with elements of cylindrical type 25

Zyza A.V., Platonova E.S. New cases of integrability of gyrostat motion equations in magnetic field 36

Kaloerov S.A. Boundary-value problems of applied bending theory of thin electromagnetoelasticity plates 42

Physics

Abramov V.S. Active nanoobjects, neutrino and Higgs boson in fractal quantum systems 59

Danilov V.V., Timchenko V.I. Optical information technologies: physical foundations 72

Poimanov V.D. Negative Goos-Hanchen shift on the border of the multisublattice antiferrodielectric 84

Chemical sciences

Kotenko A.A., Hilko S.L., Prokopieva T.M., Mikhailov V.A. Micellisation of cetyltrimethylammonium dihalogenohalogenates in water under basic conditions 90

Kryuk T.V., Tyurina T.G., Kobtceva O.S. Modification of maleic anhydride and vinyl acetate copolymers by amino acids 100

Biological sciences

Kolchenko O.R., Kornienko V.O. Metodical approach to assessing fluctuating asymmetry of norway maple (*Acer platanoides* L.) in the conditions of Donetsk 107

Mirnenko E.I. Ecological and hydrochemical features of phytoplankton formation in Starobeshevsky district 115

Safonov A.I. Inventory of industrial objects of Donbass using phytoindication criteria 121

Chufitsky S.V., Lyashova A.S. Influence of salts of heavy metals on fluorescence of *Chlorella Sorokiniana* and *Pleurochloris Magna* cells 129

М А Т Е М А Т И К А

UDK 519.21

THE USE OF GROUP ANALYSIS METHODS TO VALUE AN INSURANCE COMPANY CAPITAL IN FINANCIAL (B, S) - MARKET WITH THE PRICE OF RISK ASSET DESCRIBED BY HESTON`S MODEL

© 2019. ***O.V. Aleksandrova, T.V. Zhmykhova***

The model that describes the dynamics of the company's capital operates in the financial (B, S) - market is studied. The evolution of the risk asset price is described by Heston`s model. The company works just with its own capital, mobilization of external funds is not considered. The system of stochastic differential equations governs the dynamics of capital was deduced. The solution of this system in the explicit form was founded by group analysis methods of stochastic differential equations.

Keywords: Heston`s model, stochastic differential equation, group analysis, financial (B, S) - market.

Introduction. In modern actuarial mathematics the particular interest sets out such risk models, when the insurance company is the investor in the financial market ([1–5], etc.), because developed economies are characterized by the investment activities of insurance companies, commensurate with the work of the major credit and financial institutions: investment funds and banks. The effective functioning of the insurance company can be provided by the creation of adequate insurance fund. The most existing models of actuarial mathematics do not take into account the possible investment activities ([6, 7]). However, at this time a lot of scientific works are published where these models are generalized to the case of investment activity and founded such an important characteristic of the insurance company, as the probability of ruin ([8, 9], and others.) However, the subject of study of this article is not the probability of ruin, but it is the capital of the company. In contrast to [10], where the risk of a risk asset is described by Samuelson`s model, in this paper we consider the case the price of risk assets is described by Heston`s model [11]. This model is more common in comparison with the model of Black-Scholes (BSc), based on Samuelson model, changes in the price of financial assets, because it includes a BSc model as a special case. In [12] it was discussed a backward stochastic differential equation, (BSDE), approach to a risk-based, optimal investment problem of an insurer, however, it was just linked the BSDE solution to a classical solution of a semi-linear PDE. Despite the fact that the model of Heston`s has some drawbacks, none the less its advantages, such as: the existence of exact solutions, the presence of the possibility of generating close to realizable value distribution function and the account of the correlation between price and volatility and generate surface implicit volatility close to the real. Say that with the help of the Heston`s model the future price of risk assets can be estimated more equally and explicitly and therefore the capital of the insurance company.

The statement of the problem. Consider the financial (B,S)-market, which is of two assets – riskless (bank account), the price is described by the equation:

$$dB(t) = rB(t)dt, B(0) > 0, \tag{1}$$

where $r(r>0)$ is the bank interest, $B(0)$ is the sum on the deposit in the initial moment of time. The price of risk asset is described by the model, which is on a standard probability space (Ω, F, P) and has the following form:

$$dS(t) = S(t)\left(\mu dt + \sqrt{V(t)}dW_1(t)\right), \tag{2}$$

where $V(t)$ satisfies the stochastic differential equation

$$dV(t) = \gamma(\theta - V(t))dt + k\sqrt{V(t)}dZ(t). \tag{3}$$

The equation (3) describes the process, where V lets to the meaning θ upon the average. Wiener process $W_1(t)$ of equation (2) is correlated with the process $Z(t)$ from (3) in common case:

$$dZ(t) = \rho dw_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}\, dw_2(t),$$

where $\rho \in [-1;1]$ is correlation parameter, $w_2(t)$ is standard Wiener process, independent of $W_1(t)$, $S(t), V(t)$ are the price and volatility of basic asset correspondingly.

Suppose company (C) have the capital $X_x(t)\left(X(0) = x\right)$ at the moment of time t, works on the financial (B, S) - market, the prices of assets are described by equations (1) and (2). Moreover $uX_x(t)$ $(0 < u < 1)$ is the part of a capital company invests in risk assets; $(1-u)X_x(t)$ is the part of capital C invests in the bank account. Suppose IC works just with its own capital, the financial borrowing of external funds is not considered. If at the moment t the price of risk asset is $S(t)$, then on the sum $uX_x(t)$ we can buy $uX_x(t)/S(t)$ risk assets.

Taking into account the income of the investment activity in the (B, S)- market, the equation described the dynamics of the C`s capital is

$$dX_x(t) = uX_x(t)dB(t) + (1-u)X_x(t)dS(t) \tag{4}$$

or by setting the equalities (1) and (2) here

$$\begin{cases} dX_x(t) = X_x\left((ur + (1-u)\mu)dt + (1-u)\sqrt{V(t)}dw_1(t)\right), \\ dV(t) = \gamma(\theta - V(t))dt + k\rho\sqrt{V(t)}dw_1(t) + k\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{V(t)}dw_2(t). \end{cases} \tag{5}$$

The problem is to find out an explicit solution of the equation (4) that is, the finding the C`s capital operates in the financial market, prices of assets are described by equations (1) and (2). We will find the solution by the group analysis methods of the stochastic differential equations. We have already discussed these methods in [10, 13–15].

Main results. In this section, we state the main results of this paper. From the statement of the problem, we obtain the system of equations, the solution of which will allow to estimate the C`s capital.

In the equation (1) of the system (5)

$$ur + (1-u)\mu > 0,\ (1-u)\sqrt{V(t)} > 0,\ \frac{2(ur + (1-u)\mu)}{(1-u)^2 V(t)} > 1, \tag{6}$$

therefore, the system has a solution.

In [13] the invariance criterion of a system of stochastic differential equations (SDE) with respect to the permissible transformation group was formulated and proved. In the article [14] invariant sets for the Heston`s model was constructed:

$$\begin{cases} dS(t) = S(t)\left(\mu dt + \sqrt{V(t)}dw_1(t)\right), \\ dV(t) = \gamma(\theta - V(t))dt + k\rho\sqrt{V(t)}dw_1(t) + k\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{V(t)}dw_2(t). \end{cases} \tag{7}$$

Here θ is the medium meaning of volatility when $t \to \infty$, γ is the relaxation rate to medium meaning θ, k characterizes the fluctuations V, $W_1(t), W_2(t)$ are independent Wiener processes.

Since the second equation of system (5) is independent of X_x, we can make out the first integral for the second equation and then using this framework we can get the explicit solution of the system (5).

If $k^2/4 = \gamma\theta, k \neq 0, \gamma \neq 0, \theta \neq 0$, the first integral of the system (7) has the form [14, 16]:

$$\Phi = \left(e^{\frac{\gamma}{2}t} \left(2\sqrt{V} - \alpha(t) \right) + \frac{\gamma}{2} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}h} \alpha(h)\, dh \right)_+, \tag{8}$$

where

$$\alpha(t) = k\rho w_1(t) + k w_2(t)\sqrt{1-\rho^2}\ . \tag{9}$$

We will show that the function (8) is really the first integral of the second equation of the system (5). If we will apply to the function (8) Ito`s formula, we will get:

$$d\Phi = \left(\gamma\sqrt{V} e^{\frac{\gamma}{2}t} - \frac{\gamma e^{\frac{\gamma}{2}t}}{\sqrt{V}}(V-\theta) - \frac{k^2 e^{\frac{\gamma}{2}t}}{4\sqrt{V}} \right) dt + e^{\frac{\gamma}{2}t} \left(\frac{k\sqrt{V}}{\sqrt{V}} - k \right) dw(t). \tag{10}$$

From the last formulae it follows that if $k^2/4 = \gamma\theta, k \neq 0, \gamma \neq 0, \theta \neq 0$ the function (8) is really the first integral of the second equation of system (6).

We write an explicit solution of the system (5). From the formulae (8) if $\Phi = \sqrt{V(0)}$ we find by the elementary transformations:

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{4} \Bigg[& \sqrt{V(0)} + e^{\frac{\gamma}{2}t} \left(k\rho w_1(t) + k\sqrt{1-\rho^2} w_2(t) \right) - \\ & - \frac{\gamma}{2} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}h} \left(k\rho w_1(h) + k\sqrt{1-\rho^2} w_2(h) \right) dh \Bigg]^2. \end{aligned} \tag{11}$$

If we apply in the first equation of (5):

$$\alpha = ur + (1-u)\mu,\ \beta = (1-u)\sqrt{V(t)}, \tag{12}$$

then

$$X_x(t) = X_0 e^{\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)t + \beta w_1(t)},\ X_0 > 0, \tag{13}$$

is the solution of the first equation of the system (5).

We find the logarithm of (13):

$$\ln X_x(t) - \ln X_0 = \left(ur + (1-u)\mu - \frac{(1-u)^2}{2} V(t) \right) t + (1-u)\sqrt{V(t)} w_1(t). \tag{14}$$

Then we put in the equality (14) the expression (11) for $V(t)$, we find out the explicit solution for the movement in the capital:

$$
\begin{aligned}
X_x(t) = X_0 \exp\Big(& (ur + (1-u)\mu)t - \\
& - \frac{(1-u)^2}{2} t \cdot \left[\frac{e^{-\gamma t}}{4} \left[\sqrt{V(0)} + e^{\frac{\gamma}{2}t} \left(k\rho w_1(t) + k\sqrt{1-\rho^2} w_2(t) \right) - \right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{\gamma}{2} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}h} \left(k\rho w_1(h) + k\sqrt{1-\rho^2} w_2(h) \right) dh \right]^2 \right] + \\
& + (1-u) w_1(t) \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{2} \left[\sqrt{V(0)} + e^{\frac{\gamma}{2}t} \left(k\rho w_1(t) + k\sqrt{1-\rho^2} w_2(t) \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\gamma}{2} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}h} \left(k\rho w_1(h) + k\sqrt{1-\rho^2} w_2(h) \right) dh \right] \Big).
\end{aligned}
$$

Conclusion. In this article, the model that took into account the investment of the capital in the financial market while maintaining the constant nonnegative part of risk assets was considered. The risk asset is described by the geometric Brownian motion with the stochastic volatility (the Heston's model). The problem of company capital estimation was considered. The solution was founded in the explicit form by the group analysis methods of stochastic differential equations.

REFERENCES

1. Melnikov A.V. Mathematics of financial liabilities / A.V. Melnikov, S.N. Volkov, M. L. Nechaev. – M.: GU VSHE, 2001. – 368 p.
2. Kabanov Yu. In the insurance business risky investments are dangerous / Yu. Kabanov, S. Pergamenshikov, A. Frolova // Finance and Stochastics. – 2002. – Vol. 6. – P. 227–235.
3. Hohlov Yu. S. The dynamic of the insurance company`s capital in the collective risk model with investments / Yu.S. Hohlov, E.N. Gafurova, Yu.S. Dubinina // Vestnik Tver State University. Seria: Applied mathematics. – 2014. – Vol. 3. – P. 55–63.
4. Asmussen S. Ruin Probabilities / S. Asmussen. – Singapore: World Scientific, 2000. – 620 p.
5. Bondarev B.V. About the probability of ruin of insurance company if it is known the part of the investment in risk assets / B.V. Bondarev, T.V. Zhmykhova //Applied statistics. Actuarial and financial mathematics. – 2006. – N 1-2. – P. 227–235.
6. Boikov A.V. Cramer – Lundberg model with stochastic premiums / A.V. Boikov // Theory of probabilities and its applications. – 2003. – Vol. 47, B. 3. – P. 549-553.
7. Gilina L.S. The estimation of the probability of ruin of insurance company for some model of insurance/ L.S. Gilina // Applied statistics. Actuarial and financial mathematics. – 2000. – Vol. 1. – P. 67-78.
8. Androshuk M.O. The estimation of ruin in some model with investments in risk assets in the case of absence of rateless loan / M.O. Androshuk, Yu.S. Mishura // Applied statistics. Actuarial and financial mathematics. – 2006. – No 1-2. – P. 4-13.
9. Bondarev B.V. The asymptotic behavior of the ruin probability of insurance companies operating in the financial (B, S) - market. / B.V. Bondarev, T.V. Zhmykhova // Vestnik of Donetsk National University. Seria A. Natural sciences. – 2008. – No 2. – P. 573-581.
10. Aleksandrova O.V. Finding insurance companies capital operating in the financial market by the methods of the group analysis / O.V.Aleksandrova, T.V.Zhmykhova // Vestnik of Voroneg state university. Physics. Mathematics. – 2015. – No 3. – P. 65-72.
11. Heston S.L. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options / S.L. Heston // Review of Financial Studies. – 1993. – Vol. 6. – P. 327–343.
12. Robert J. Elliott A BSDE approach to a risk-based optimal investment of an insurer/ Robert J. Elliott, Tak Kuen Siu // Automatica. – 2011. – Vol. 47. – P. 253–261.
13. Alexandrova O. V. Group analysis of the Ito Stochastic system. / O. V. Alexandrova // Differential Equations and Dynamical Systems. – 2006. – Vol. 14, No 3-4. – P. 255–279.

14. Alexandrova O. V. Invariant sets of systems of nonlinear stochastic differential equations Ito/ O. V. Alexandrova // Differential Equations and Control Processes. – 2010. – No 2. – P. 23-38.
15. Alexandrova O. V. Group classification of the linear stochastic differential Ito equation / O. V. Alexandrova // Vestnik of Donetsk National University. Seria A. Natural sciences. – 2014. – Vol. 2. – P. 26-31.
16. Alexandrova, O. V. Symmetry and the first integrals of a system of Ito stochastic differential equations / O. V. Alexandrova // Vestnik of Novgorod State University of Yaroslav the Wise. – 2013. – Vol. 1, No 75. – P. 54 – 59.

Received December 22, 2018

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ КАПИТАЛА СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ НА ФИНАНСОВОМ (B,S)-РЫНКЕ С ОПИСЫВАЕМОЙ МОДЕЛЬЮ ХЕСТОНА ЦЕНОЙ РИСКОВОГО АКТИВА

О.В. Александрова, Т.В. Жмыхова

Изучается модель динамики капитала компании, работающей на финансовом (B,S)-рынке. Эволюция цены рискового актива описывается моделью Хестона. Компания работает только со своим собственным капиталом, привлечение средств извне не рассматривается. Получена система стохастических дифференциальных уравнений, описывающая динамику. Посредством методов группового анализа стохастических дифференциальных уравнений было найдено решение этой системы в явном виде.

Ключевые слова: модель Хестона, стохастическое дифференциальное уравнение, групповой анализ, финансовый (B,S)-рынок.

Александрова Ольга Валерьевна
кандидат физико-математических наук;
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», Макеевка.
E-mail: alexand_olga_la@mail.ru
Тел.: (071) 377-82-73

Aleksandrova Olha Valerievna
Candidate of Phisico-Mathematical Sciences;
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makiivka

Жмыхова Татьяна Владимировна
кандидат физико-математических наук; доцент;
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», Макеевка.
E-mail: zhmykhovatanya@mail.ru
Тел.: (071) 419-07-53

Zhmykhova Tetiana Vladimirovna
Candidate of Phisico-Mathematical Sciences, Docent;
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makiivka

УДК 519.21

ГАРАНТИРОВАННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА, ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩЕГО В СНОС СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ ВНУТРЕННЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ЗАШУМЛЕНИИ

© 2019. ***Б.В. Бондарев, Н.Ю. Мельничук***

В работе построен доверительный интервал для оценки неизвестного параметра в сносе стохастического дифференциала, в случае периодических коэффициентов при внутреннем периодическом зашумлении. В качестве оценки неизвестного параметра рассматривается оценка максимального правдоподобия. Построен интервал накрытия неизвестного параметра с гарантированной вероятностью накрытия.

Ключевые слова: оценка; неизвестный параметр; эргодическое распределение; периодические коэффициенты; стационарность.

Введение. Вопросом оценки неизвестных параметров в сносе стохастического дифференциального уравнения посвящено значительное число исследований. Случай оцениваемого неизвестного параметра в сносе дифференциала, возмущённого винеровским процессом, подробно исследован в монографии Ибрагимова И.А. и Хасьминского Р.З. [1]. Случай диффузионных уравнений исследован в книгах Липцера Р.Ш. и Ширяева А.Н. [2], Линькова Ю.Н. [3]. В работе [4] рассмотрена задача оценки неизвестного параметра в периодическом коэффициенте сноса в условиях «слабого сигнала», то есть, когда при коэффициенте сноса стоит малый параметр. Оценке неизвестного параметра в системах со слабым сигналом и, в частности, при внутреннем и внешнем диффузионном зашумлении посвящены работы Бондарева Б.В. и Курилиной Ю.О. [5, 6]. В данной работе рассматривается случай, когда неизвестный параметр линейно входит в снос стохастического дифференциала с периодическими коэффициентами при внутреннем периодическом зашумлении.

Постановка задачи. Рассматривается дифференциал:

$$d\xi_{\theta_0}(t) = \theta_0 a(\eta(t))dt + \sigma(\eta(t))dW_1(t), \tag{1}$$

где θ_0 - неизвестный параметр, $\theta_0 \in \Theta$, Θ – некоторое ограниченное параметрическое множество; $\eta(t)$ – стационарное решение уравнения:

$$d\eta(t) = \alpha(\eta(t))dt + \beta(\eta(t))dW_2(t)\,, \tag{2}$$

Коэффициенты $a(x), \sigma(x), \alpha(x), \beta(x)$ – ограниченные, 1-периодические функции, имеющие производные первого порядка, удовлетворяющие условию Гёльдера [4].

$$\alpha(x) = \alpha(x+1)\,,\ \beta(x) = \beta(x+1)\,,\ |\alpha(x)| \le K < +\infty\,,\ 0 < \lambda \le \beta^2(x) \le K < +\infty\,,$$

$$|a(x)| \le K < +\infty\,,\ 0 < \lambda \le \sigma^2(x) \le K < +\infty$$

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| + |\beta(x) - \beta(y)| + |a(x) - a(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \le L|x - y|\,,$$

$W_1(t)$ и $W_2(t)$ – независимые друг от друга винеровские процессы.

Из работы [7] следует, что у процесса $\eta(t)$ существует эргодическое распределение. Действительно, введем функцию:

$$G_0(x) = \frac{2}{\left(1+\vartheta(1)\right)\beta^2(x)\vartheta(x)}\left[\vartheta(1)\int_0^x \vartheta(y)dy + \int_x^1 \vartheta(y)dy\right], \tag{3}$$

где

$$\vartheta(x) = \exp\left\{-\int_0^x \frac{2\alpha(y)}{\beta^2(y)}dy\right\}.$$

Заметим, что введенная функция $G_0(x)$ – периодическая с периодом 1 функция.

Плотность эргодического распределения процесса $\eta(t)$:

$$\rho(x) = G_0(x)\left[\int_0^1 G_0(y)dy\right]^{-1}. \tag{4}$$

Поставим следующую задачу: наблюдается траектория $\xi_{\theta_0}^T = \left\{\xi_{\theta_0}(t) : 0 \le t \le T\right\}$, по наблюдению за которой требуется построить интервал накрытия неизвестного параметра θ_0 с гарантированной вероятностью накрытия. Ширина этого интервала и вероятность накрытия будут функциями параметра T. Интервал накрытия для неизвестного параметра $\theta_0 \in \Theta$ будет построен на основании соответствующих оценок экспоненциальных мартингалов и оценок сверху для вероятности малых уклонений интегральных средних от процессов со слабой зависимостью.

Оценка максимального правдоподобия [1] неизвестного параметра в нашем случае будет иметь вид:

$$\theta_T = \int_0^T \frac{a(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}d\xi_{\theta_0}(t) \times \left(\int_0^T \frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\right)^{-1}. \tag{5}$$

$$P\left\{\sqrt{T}\left|\theta_T - \theta_0\right| > R\right\} = P\left\{\left[\sqrt{T}\left(\theta_T - \theta_0\right) > R\right] \cup \left[-\sqrt{T}\left(\theta_T - \theta_0\right) > R\right]\right\} =$$
$$\le P\left\{\sqrt{T}\left(\theta_T - \theta_0\right) > R\right\} + P\left\{-\sqrt{T}\left(\theta_T - \theta_0\right) > R\right\}.$$

Оценим первое слагаемое из правой части (5) следующим образом (второе слагаемое оценивается аналогичным образом):

$$P\left\{\sqrt{T}\left(\theta_T - \theta_0\right) > R\right\} = P\left\{\sqrt{T}\,\frac{\int_0^T \frac{a(\eta(t))}{\sigma(\eta(t))}dW_1(t)}{\int_0^T \frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt} > R\right\} =$$
$$= P\left\{\sqrt{T}\int_0^T \frac{a(\eta(t))}{\sigma(\eta(t))}dW_1(t) > R\int_0^T \frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\right\} \tag{6}$$

Возьмем $z > 0$ и перепишем равенство (6) в виде:

$$P\left\{\sqrt{T}\left|\theta_T-\theta_0\right|>R\right\}=P\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\int_0^T\frac{a(\eta(t))}{\sigma(\eta(t))}dW_1(t)>Rz\frac{1}{T}\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\right\}=$$

$$=P\left\{\left[\frac{z}{\sqrt{T}}\int_0^T\frac{a(\eta(t))}{\sigma(\eta(t))}dW_1(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{T}}\right)^2\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt>\left(Rz-\frac{z^2}{2}\right)\frac{1}{T}\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\right]\cap\right.$$

$$\left.\cap\left[\frac{1}{T}\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\le\varepsilon^2\right]\right\}+$$

$$+P\left\{\left[\frac{z}{\sqrt{T}}\int_0^T\frac{a(\eta(t))}{\sigma(\eta(t))}dW_1(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{T}}\right)^2\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt>\left(Rz-\frac{z^2}{2}\right)\frac{1}{T}\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\right]\cap\right.$$

$$\left.\cap\left[\frac{1}{T}\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt>\varepsilon^2\right]\right\}\le$$

$$\le P\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\le\varepsilon^2\right\}+P\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\int_0^T\frac{a(\eta(t))}{\sigma(\eta(t))}dW_1(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{T}}\right)^2\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt>\left(Rz-\frac{z^2}{2}\right)\varepsilon^2\right\}.$$

Во второй вероятности перейдём к экспонентам, воспользуемся неравенством Чебышева и тем, что математическое ожидание от экспоненциального мартингала равно 1.

$$P\left\{\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\int_0^T\frac{a(\eta(t))}{\sigma(\eta(t))}dW_1(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{T}}\right)^2\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\right\}>\exp\left\{\left(Rz-\frac{z^2}{2}\right)\varepsilon^2\right\}\right\}\le$$

$$\le M\left\{\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\int_0^T\frac{a(\eta(t))}{\sigma(\eta(t))}dW_1(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{T}}\right)^2\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\right\}\cdot\left(\exp\left\{\left(Rz-\frac{z^2}{2}\right)\varepsilon^2\right\}\right)^{-1}\right\}\le$$

$$\le\exp\left\{\left(\frac{z^2}{2}-Rz\right)\varepsilon^2\right\}.$$

Минимизируя правую часть по $0<z<+\infty$, при $z^*=R$ получим оценку:

$$P\left\{\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\int_0^T\frac{a(\eta(t))}{\sigma(\eta(t))}dW_1(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{T}}\right)^2\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\right\}>\exp\left\{\left(Rz-\frac{z^2}{2}\right)\varepsilon^2\right\}\right\}\le$$

$$\le\exp\left\{\left(\frac{R^2}{2}-R^2\right)\varepsilon^2\right\}\le\exp\left\{-\frac{R^2}{2}\varepsilon^2\right\}.$$

Таким образом, при некотором $z^*=R$ и некотором малом $\varepsilon>0$ построен доверительный интервал для θ_0:

$$P\left\{\sqrt{T}\left|\theta_T-\theta_0\right|>R\right\}\le 2\exp\left\{-\frac{R^2\varepsilon^2}{2}\right\}+2P\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\le\varepsilon^2\right\}.$$

Оценка малых уклонений. Займёмся построением оценки сверху для вероятности

$$P\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt \le \varepsilon^2\right\}.$$

Введем $\bar{\delta}^2 = \int_0^1 \frac{a^2(y)}{\sigma^2(y)}\rho(y)dy,$ где $\rho(y)$ – плотность эргодического распределения, выраженная формулой (4).

Итак, перейдём к центрированным величинам:

$$P\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt \le \varepsilon^2\right\} = P\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))} - \bar{\delta}^2\right]dt \le \varepsilon^2 - \bar{\delta}^2\right\}.$$

Умножив обе части неравенства на -1, при $\varepsilon^2 < \bar{\delta}^2$ получим

$$P\left\{-\frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))} - \bar{\delta}^2\right]dt \ge \bar{\delta}^2 - \varepsilon^2\right\} = P\left\{-\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \left[\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))} - \bar{\delta}^2\right]dt \ge \sqrt{T}\left(\bar{\delta}^2 - \varepsilon^2\right)\right\} \le$$

$$\le P\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T X(t)dt \ge \sqrt{T}\left(\bar{\delta}^2 - \varepsilon^2\right)\right\}.$$

Здесь $\bar{\delta}^2 - \frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))} = X(t), \quad \mathrm{M}\,X(t) = 0$.

Как показано в [7], $X(t)$ является стационарным марковским процессом, удовлетворяющим условию равномерно сильного перемешивания [8] с коэффициентом перемешивания $\varphi(\tau) = 2Ce^{-\gamma\tau}$, где постоянные выписаны в явном виде.

Так как $a^2(x)/\sigma^2(x) \le L$, то имеем $|X(t)| \le L$.

Введем функцию $r(T)$ – длину отрезков, построенных на $[0,T]$. Всего таких отрезков будет $n = [T/r(T)]$, т.е. не больше, чем $(T/r(T)+1)$.

Будем разбивать $\int_0^T X(t)dt$ на две суммы интегралов: по четным и по нечетным отрезкам, при этом между ними будет фиксированное расстояние $r(T)$.

$$\begin{aligned}
&P\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T X(t)dt \ge \sqrt{T}\left(\bar{\delta}^2 - \varepsilon^2\right)\right\} = \\
&= P\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt + \int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt + \ldots + \int_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\int_{r(T)}^{2r(T)} X(t)dt + \int_{3r(T)}^{4r(T)} X(t)dt + \ldots + \int_{(2n-1)r(T)}^{2nr(T)} X(t)dt\right) \ge \sqrt{T}\left(\bar{\delta}^2 - \varepsilon^2\right)\right\} \le \\
&\le P\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt + \int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt + \ldots + \int_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right) > \frac{\sqrt{T}}{2}\left(\bar{\delta}^2 - \varepsilon^2\right)\right\} + \\
&+ P\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\int_{r(T)}^{2r(T)} X(t)dt + \int_{3r(T)}^{4r(T)} X(t)dt + \ldots + \int_{(2n-1)r(T)}^{2nr(T)} X(t)dt\right) > \frac{\sqrt{T}}{2}\left(\bar{\delta}^2 - \varepsilon^2\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для удобства будем рассматривать первую вероятность из суммы (6), предварительно умножив обе части неравенства на z и взяв экспоненту.

$$P\left\{\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right)\right\}\geq \exp\left\{\frac{z\sqrt{T}}{2}\left(\bar{\delta}^2-\varepsilon^2\right)\right\}\right\}. \quad (7)$$

Применяя неравенство Чебышева в (7), получим неравенство:

$$P\left\{\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right)\right\}\geq \exp\left\{\frac{z\sqrt{T}}{2}\left(\bar{\delta}^2-\varepsilon^2\right)\right\}\right\}\leq$$

$$\leq M\left(\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right)\right\}\right)\exp\left\{-\frac{z\sqrt{T}}{2}\left(\bar{\delta}^2-\varepsilon^2\right)\right\}.$$

Разобьём сумму интегралов на две части:

$$M\left(\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right)\right\}\right)=$$

$$=M\left(\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-4)r(T)}^{(2n-3)r(T)} X(t)dt\right)\right\}\cdot\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\int_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right\}\right)\leq$$

$$\leq M\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-4)r(T)}^{(2n-3)r(T)} X(t)dt\right)\right\}+$$

$$+2C\exp\{-\gamma r(T)\}M\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-4)r(T)}^{(2n-3)r(T)} X(t)dt\right)\right\}\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\}\leq$$

$$\leq M\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-4)r(T)}^{(2n-3)r(T)} X(t)dt\right)\right\}+$$

$$+2C\exp\left\{-r(T)(\gamma-\frac{z}{\sqrt{T}}L)\right\}M\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-4)r(T)}^{(2n-3)r(T)} X(t)dt\right)\right\},$$

Возьмём, аналогично работе [9],

$$\xi=\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)} X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)} X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-4)r(T)}^{(2n-3)r(T)} X(t)dt\right)\right\},$$

$$\psi=\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\int_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right\},\quad |\psi|<\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\}.$$

Тогда можно записать неравенство [9]:

$$M\xi\psi\leq M\xi\left(M\psi+2C\exp\left\{-r(T)(\gamma-\frac{z}{\sqrt{T}}L)\right\}\right).$$

Рассмотрим $M\psi$, раскладывая экспоненту в ряд Тейлора:

$$M\psi = M\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\int\limits_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right\} =$$

$$= 1 + M\frac{\frac{z}{\sqrt{T}}\int\limits_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt}{1!} + M\frac{\frac{z^2}{T}\left(\int\limits_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right)^2}{2!} + M\frac{\frac{z^3}{T\sqrt{T}}\left(\int\limits_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt\right)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{z^2 C_2 r(T)}{2T}\left(1 + \frac{z}{3\sqrt{T}}Lr(T) + \frac{z^2}{12T}L^2(r(T))^2 + \ldots\right) \le$$

$$= 1 + \frac{z^2 C_2 r(T)}{2T}\left(1 + \frac{z}{1!\sqrt{T}}Lr(T) + \frac{z^2}{2!T}L^2(r(T))^2 + \ldots\right) \le$$

$$\le 1 + \frac{z^2 C_2 r(T)}{2T}\cdot\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\} \le \exp\left\{\frac{z^2 C_2 r(T)}{2T}\cdot\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\}\right\}.$$

Аналогично [6] выпишем оценку:

$$D\int\limits_0^{r(T)} X(t)dt = M\left(\int\limits_0^{r(T)} X(t)dt\right)^2 = M\int\limits_0^{r(T)} X(t)dt\int\limits_{r(T)}^{r(T)} X(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{r(T)}^{r(T)}\int\limits_{r(T)}^{r(T)} MX(t)X(\tau)dtd\tau \le \frac{4L^2 Cr(T)}{\gamma}.$$

Таким образом, получили:

$$D\int\limits_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)} X(t)dt \le r(T)C_2,$$

где $C_2 = 4L^2 C/\gamma$.

Используя метод математической индукции и отделяя каждый раз последний интеграл от суммы остальных, приходим к следующему:

$$M\xi\varphi \le \left(M\varphi + 2C\exp\left\{-r(T)(\gamma - \frac{z}{\sqrt{T}}L)\right\}\right)^{\frac{T}{2r(T)}+1},$$

$$M\xi\varphi \le \left(\exp\left\{\frac{z^2 C_2 r(T)}{2T}\cdot\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\}\right\} + 2C\exp\left\{-r(T)(\gamma - \frac{z}{\sqrt{T}}L)\right\}\right)^{\frac{T}{2r(T)}+1} \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{z^2 C_2 r(T)}{2T}\cdot\frac{T}{2r(T)}\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\} + \frac{z^2 C_2 r(T)}{2T}\cdot\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\}\right\} +$$

$$+ 2C\left(\frac{T}{2r(T)} + 1\right)\exp\left\{-r(T)(\gamma - \frac{z}{\sqrt{T}}L)\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{z^2 C_2}{4}\cdot\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\} + \frac{z^2 C_2 r(T)}{2T}\cdot\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\}\right\} +$$

$$+2C\left(\frac{T}{2r(T)}+1\right)\exp\left\{-r(T)(\gamma-\frac{z}{\sqrt{T}}L)\right\}.$$

Т.к. рассматривали суммы по четным и нечетным отрезкам, возвращаясь к вероятности, умножим на 2 обе части неравенства:

$$P\left\{2\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\left(\int_0^{r(T)}X(t)dt+\int_{2r(T)}^{3r(T)}X(t)dt+\ldots+\int_{(2n-2)r(T)}^{(2n-1)r(T)}X(t)dt\right)\right\}\geq\exp\left\{z\sqrt{T}\left(\bar{\delta}^2-\varepsilon^2\right)\right\}\right\}\leq$$

$$\leq\exp\left\{\frac{z^2C_2}{4}\cdot\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\}+\frac{z^2C_2r(T)}{2T}\cdot\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}Lr(T)\right\}\right\}+$$

$$+2C\left(\frac{T}{2r(T)}+1\right)\exp\left\{-r(T)(\gamma-\frac{z}{\sqrt{T}}L)\right\}-\exp\left\{z\sqrt{T}\left(\bar{\delta}^2-\varepsilon^2\right)\right\}.$$

Выбирая $z=1/r(T)$, получим:

$$\exp\left\{\frac{C_2}{4(r(T))^2}\cdot\exp\left\{\frac{L}{\sqrt{T}}\right\}+\frac{C_2}{2Tr(T)}\cdot\exp\left\{\frac{L}{\sqrt{T}}\right\}\right\}+$$

$$+2C\left(\frac{T}{2r(T)}+1\right)\exp\left\{-\gamma r(T)+\frac{L}{\sqrt{T}}\right\}-\exp\left\{\frac{\sqrt{T}}{2r(T)}\left(\bar{\delta}^2-\varepsilon^2\right)\right\}.$$

Для погашения степени экспоненты убыванием, нужно подобрать длину отрезков $r(T)$ растущей. Например, если $r(T)=\sqrt[4]{T}$, то

$$\exp\left\{\frac{C_2}{4\sqrt{T}}\cdot\exp\left\{\frac{L}{\sqrt{T}}\right\}+\frac{C_2}{2T\sqrt[4]{T}}\cdot\exp\left\{\frac{L}{\sqrt{T}}\right\}\right\}+$$

$$+2C\left(\frac{T^{3/4}}{2}+1\right)\exp\left\{-\gamma\sqrt[4]{T}+\frac{L}{\sqrt{T}}\right\}-\exp\left\{\frac{\sqrt[4]{T}}{2}\left(\bar{\delta}^2-\varepsilon^2\right)\right\}.$$

Таким образом, при $r(T)=T^{\beta}$, где $0<\beta<1$, имеем экспоненциально быстрое убывание справа, что позволяет говорить о хорошей построенной оценке для исходной вероятности

$$P\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\frac{a^2(\eta(t))}{\sigma^2(\eta(t))}dt\leq\varepsilon^2\right\}.$$

Выводы. В работе рассмотрена задача оценки неизвестного параметра, линейно входящего в коэффициент сноса стохастического дифференциала с периодическими коэффициентами при внутреннем периодическом зашумлении. На основании метода оценки максимального правдоподобия был построен доверительный интервал для неизвестного параметра с гарантированным интервалом накрытия и заданной наперёд надежностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. А. Асимптотическая теория оценивания / И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский – М.: Наука, 1979. – 528 с.

2. Липцер Р.Ш. Статистика случайных процессов / Р.Ш. Липцер, А. Н. Ширяев – М.: Наука, 1974. – 696 с.
3. Линьков Ю. Н. Асимптотические методы статистики случайных процессов / Ю. Н. Линьков – Киев: Наукова Думка, 1993. – 254 с.
4. Бондарев Б. В. Оценка неизвестного параметра в системах со слабым сигналом/ Б. В. Бондарев, С. М. Козырь // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 3. – С. 109–117.
5. Бондарев Б.В. Об оценке неизвестного параметра в слабом сигнале/ Ю.О. Курилина, Б.В. Бондарев // Донецкие чтения 2017: Русский мир как цивилизационная основа научно-образовательного и культурного развития Донбасса: Материалы Международной научной конференции студентов и молодых ученых (Донецк, 17-20 октября 2017 г.). – Том 1: Физико- математические и технические науки / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2017. – С. 84-86.
6. Бондарев Б.В. Оценка неизвестного параметра в системах со слабым сигналом при внутреннем и внешнем зашумлениях / Ю.О. Курилина, Б.В. Бондарев // Вестник ДонНУ. – Сер.А: Естественные науки. – 2017. – №3. – С. 3-11.
7. Бондарев Б.В. Перемешивание «по Ибрагимову». Оценка скорости сближения семейства интегральных функционалов от решения дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами с семейством винеровских процессов. Некоторые приложения. I / Б.В. Бондарев, С.М. Козырь // Украинский математический журнал. – 2010. – Т. 62, № 6. – С. 733–753.
8. Ибрагимов И.А. Независимые и стационарно связанные величины / И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
9. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977. – 352 с.

Поступила в редакцию 22.04.2019 г.

GUARANTEED ESTIMATION OF THE UNKNOWN LINEAR INPUT PARAMETER IN THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL WITH PERIODIC COEFFICIENTS WITH INTERNAL PERIODIC NOISE

B.V. Bondarev, N.Y. Melnichuk

In the work, a confidence interval for estimate of the unknown parameter in the drift coefficient of the stochastic differential is constructed, in the case of periodic coefficients with an internal periodic noise. As an estimate of the unknown parameter, the maximum likelihood estimate is considered. The interval of the covering of the unknown parameter with the guaranteed probability of the covering is constructed.

Keywords: estimation; unknown parameter; ergodic distribution; periodic coefficients; stationarity.

Бондарев Борис Владимирович
Доктор физико-математических наук, профессор, ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" (г. Донецк), кафедра теории вероятностей и математической статистики
83001, пр. Гурова, 14
E-mail: bondarev.mart@gmail.com

Bondarev Boris Vladimirovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Donetsk National University, Donetsk

Мельничук Наталия Юрьевна
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, студент кафедры теории вероятностей и математической статистики
E-mail: nata-250396@yandex.ru

Melnichuk Nataliia Yuryevna
Student at the Department of Probability and Mathematical Statistics
Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.95

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДРОБНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ПРОСТРАНСТВО S' И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2019. *О.Н. Швидкий*

В данной статье доказывается теорема о распространении дробного оператора Лапласа с пространства S на пространство обобщенных функций S', имеющих полиномиальный рост на бесконечности. Также приводятся приложения данной теоремы к доказательству обобщения теоремы Лиувилля для дробного оператора Лапласа и к доказательству единственности начальной задачи для дробного уравнения теплопроводности

Ключевые слова: дробный оператор Лапласа, распространение оператора, теорема Лиувилля.

Введение. В последние годы дробный оператор Лапласа имеет все больше приложений в физике, химии, биологии, экономике, теории вероятностей. Этот оператор возникает в различных дифференциальных уравнениях в частных производных, которые описывают более сложные явления, чем классические. Например, если обычное уравнение Лапласа может моделировать броуновское движение, то дробное уравнение Лапласа служит моделью для более общих Леви процессов. В работах [4–8] исследуются уравнения, содержащие дробный оператор Лапласа. В статье [4] авторы исследуют симметрию и монотонность решений задачи:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha+1}u(x) = f\big(u(x)\big) + g(x) & x \in B_1, \\ (-\Delta)u(x) > 0 & x \in B_1, \\ u(x) = 0 & x \in R^n \backslash B_1, \end{cases}$$

где B_1 – открытый единичный шар с центром в начале координат.

В статье [5] рассматривается существование положительных решений для следующего класса дробных уравнений Шрёдингера

$$\epsilon^{2s}(-\Delta)^s u + V(x)u = f(u) \text{ в } R^N,$$

где $\epsilon > 0$ – параметр, $s \in (0,1)$, $N > 2s, V: R^N \to R$ – непрерывный положительный потенциал, и $f: R \to R$.

Авторы [6] имеют дело с задачей Лиувилля для стационарной дробной системы уравнений Навье-Стокса. В такую систему входит дробный оператор Лапласа.

В работе [7] изучается задача бифуркации для дробного уравнения Лапласа

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u + f(\lambda, x, u), & \text{в } \Omega, \\ u = 0, & \text{в } R^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

где $\Omega \in R^n$, $n > 2s, (0 < s < 1)$ – открытое ограниченное подмножество с гладкой границей.

В статье [8] рассматриваются уравнения вида:

$$\partial_t u + (-\Delta)^{\sigma/2} A(u) = f,$$

$$h(-\Delta)^{\sigma/2} v + B(v) = f,$$

где $h > 0$ – константа, $A(u), B(u)$ − нелинейные, в общем случае, функции.

Введем некоторые обозначения. Если функция $u(x)$ определена в $R^n, n \geqslant 1$, и принадлежит пространству $C^l(R^n), l > 2s$, $s \in (0,1)$, то $(-\Delta)^s$ –дробный оператор Лапласа, который определяется следующим образом (см., например, [2]):

$$(-\Delta)^s u \equiv C(n,s) P.V. \int_{R^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy, \tag{1}$$

Если $u(x)$ принадлежит основному пространству $S(R^n)$, то дробный оператор Лапласа можно определить так:

$$(-\Delta)^s u = F^{-1}\big(|\xi|^{2s} F u(\xi)\big), \tag{2}$$

где F и F^{-1} обозначают соответственно прямое и обратное преобразование Фурье, т.е

$$Fv(\xi) = \int\limits_{R^n} v(x) e^{-ix\cdot\xi} dx, \quad F^{-1}v(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} v(x) e^{ix\cdot\xi} dx.$$

Для функции $u \in S(R^n)$ определения (1) и (2) эквивалентны.

В данной статье мы распространяем дробный оператор Лапласа с пространства S на пространство обобщенных функций S', имеющих полиномиальный рост на бесконечности. Результат этого:

1) возможность применять к таким функциям формулу (2);
2) непрерывность дробного оператора Лапласа из S' в S' (точнее, из пространства функций $S' \bigcap C^{2s+\alpha}(R^n)$, имеющих полиномиальный рост на бесконечности).

В конце статьи приводятся приложения Теоремы 1, ниже, к доказательству обобщения теоремы Лиувилля для дробного оператора Лапласа и к доказательству единственности начальной задачи для дробного уравнения теплопроводности.

Постановка задачи и основной результат.

Теорема 1. Дробный оператор Лапласа $(-\Delta)^s, s \in (0,1)$, распространяется по непрерывности с пространства $S(R^n)$ на обобщенные функции $u(x) \in S' \cap C^{2s+\alpha}(R^n)$, $\alpha \in (0,1)$ со следующим ограничением на рост на бесконечности:

$$|u(x)| \leqslant C(1+|x|)^t, \ t < 2s \tag{3}$$

При этом

$$((-\Delta)^s u, \varphi) \equiv \int_{R^n} u(y) \cdot (-\Delta)^s \varphi(y) dy, \tag{4}$$

То есть, в смысле распределений S' сохраняется определение (2).

Доказательство Теоремы 1. Сначала сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\varphi \in S$, s – нецелое положительное число. Тогда

$$|(-\Delta)^s \varphi(x)| \leqslant C, \ |x| \leqslant 1, \tag{5}$$

$$|(-\Delta)^s \varphi(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{n+2s-\alpha}}, \ \forall \alpha \in (0,2s), \ |x| > 1. \tag{6}$$

Доказательство. Во-первых, докажем утверждение при $s \in (0,1)$. Рассмотрим отдельно два случая: $x \leqslant 1$ и $x > 1$.

1. $x \leqslant 1$

$$|(-\Delta)^s \varphi(x)| = |C \int\limits_{R^n} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy| = C| \int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy +$$

$$+\int\limits_{|x-y|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)-\nabla\varphi(x)(x-y)}{|x-y|^{n+2s}}dy\,|\leqslant C_1\sup_{x\in R^n}|\varphi(x)|\int\limits_{|x-y|\geqslant 1}\frac{dy}{|x-y|^{n+2s}}+$$

$$+C_2|\int\limits_{|x-y|\leqslant 1}\frac{[\nabla\varphi(\xi)-\nabla\varphi(x)](x-y)}{|x-y|^{n+2s}}dy\,|\leqslant C_1\sup_{x\in R^n}|\varphi(x)|+$$

$$+C_2|\int_{|x-y|\leqslant 1}\frac{\sum_{i=1}^n D_i\varphi(\xi)-D_i\varphi(x)](x_i-y_i)}{|x-y|^{n+2s}}dy\,|=C_1\sup_{x\in R^n}|\varphi(x)|+$$

$$+C_2|\int\limits_{|x-y|\leqslant 1}\frac{\sum_{i,j=1}^n D_{ij}\varphi(\eta)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^{n+2s}}dy\,|\leqslant C_1\sup_{x\in R^n}|\varphi(x)|+$$

$$+C_1\sup_{x\in R^n}|D^2\varphi(x)|\int\limits_{|x-y|\leqslant 1}\frac{dy}{|x-y|^{n+2s-\alpha}}$$

Получаем:

$$|(-\Delta)^s\varphi(x)|\leqslant \mathrm{C}(\sup_{x\in R^n}|\varphi(x)|+\sup_{x\in R^n}|D^2\varphi(x)|) \tag{7}$$

Так как $\varphi\in S$, то $|(-\Delta)^s\varphi(x)|\leqslant \mathrm{C}$, что доказывает первую часть Утверждения.

2. $x>1$

$$(-\Delta)^s\varphi(x)=C(\int\limits_{|x-y|\geqslant\frac{|x|}{2}}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy+\int\limits_{|x-y|\leqslant\frac{|x|}{2}}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)-\nabla\varphi(x)(x-y)}{|x-y|^{n+2s}}dy\,)=$$
$$=I_1+I_2.$$

Сначала оценим второй интеграл.

$$|I_2|\leqslant C\int\limits_{|x-y|\leqslant\frac{|x|}{2}}\frac{\sum_{i,j=1}^n|D_{ij}\varphi\big(x+\theta(\xi-x)\big)|\cdot|x-y|^2}{|x-y|^{n+2s}}dy$$

Здесь $\xi=x+\theta_1(y-x),\theta_1,\theta\in[0,1]$.

Воспользуемся тем, что $|\varphi(x)|=\sqrt{|\varphi(x)|^2}=\sqrt{|\varphi(x)|}\cdot\sqrt{|\varphi(x)|}$, а также тем, что $\varphi(x)\in S$, а потому убывает на бесконечности быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

$$|I_2|\leqslant C\int_{|x-y|\leqslant\frac{|x|}{2}}\frac{\sum_{i,j=1}^n\sqrt{D_{ij}\varphi\big(x+\theta(\xi-x)\big)}\cdot|x+\theta(\xi-x)|^{-(n+2-\alpha)}}{|x-y|^{n+2s}}dy,\ \text{где } \alpha<2s.$$

В области интегрирования величины $|x|$ и $|x+\theta(\xi-x)|$ эквивалентны, поэтому

$$|x+\theta(\xi-x)|^{-(n+2-\alpha)}\leqslant C|x|^{-(n+2-\alpha)}.$$

Отсюда следует, что

$$|I_2|\leqslant C\sup_{x\in R^n}\sqrt{|D^2\varphi(x)|}\cdot\frac{1}{|x|^{n+2-\alpha}}|x|^{2-2s}\leqslant C\sup_{x\in R^n}\sqrt{|D^2\varphi(x)|}\cdot\frac{1}{|x|^{n+2-\alpha}}.$$

Оценим теперь первый интеграл, используя тот же прием, что и при оценке I_2.

$$|I_1| = \int\limits_{|x-y|\geqslant\frac{|x|}{2}} \frac{|\varphi(x)|}{|x-y|^{n+2s}}dy + \int\limits_{|x-y|\geqslant\frac{|x|}{2}} \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^{n+2s}}dy = J_1 + J_2.$$

Оценим J_1 и J_2.

$$J_1 \leqslant C \sup_{x\in R^n} \sqrt{|\varphi(x)|}\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\cdot\frac{1}{|x|^{2s}} = C \sup_{x\in R^n} \sqrt{|\varphi(x)|}\frac{1}{|x|^{n+2s-\alpha}}$$

Для оценки J_2 рассмотрим два случая: $|y| \geqslant |x|$и $|y| < |x|$,

1) $|y| \geqslant |x|$

$$J_2 \leqslant C \sup_{x\in R^n} \sqrt{|\varphi(x)|} \int\limits_{|x-y|\geqslant\frac{|x|}{2}} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\cdot\frac{1}{|x-y|^{n+2s}}dy \leqslant C \sup_{x\in R^n} \sqrt{|\varphi(x)|}\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\frac{1}{|x|^{2s}} =$$

$$= C \sup_{x\in R^n} \sqrt{|\varphi(x)|}\frac{1}{|x|^{n+2s-\alpha}}$$

2) $|y| \geqslant |x|$

$$J_2 = C \int\limits_{B_{|x|}\setminus B_{\frac{|x|}{2}}(x)} \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^{n+2s}}dy \leqslant C \sup_{x\in R^n} \sqrt{|\varphi(x)|} \int\limits_{B_{|x|}\setminus B_{\frac{|x|}{2}}(x)} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}|x-y|^{n+2s}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{x\in R^n} \sqrt{|\varphi(x)|} \int\limits_{B_{|x|}\setminus B_{\frac{|x|}{2}}(x)} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(|x|/2)^{n+2s}} \leqslant C \sup_{x\in R^n} \sqrt{|\varphi(x)|}\frac{1}{|x|^{n+2s}} \int\limits_{B_{|x|}} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}} =$$

$$= C \sup_{x\in R^n} \sqrt{|\varphi(x)|}\frac{1}{|x|^{n+2s-\alpha}}.$$

Окончательно мы имеем:

$$|(-\Delta)^s\varphi(x)| \leqslant C\left(\sup_{x\in R^n} \sqrt{|\varphi(x)|} + \sup_{x\in R^n} \sqrt{|D^2\varphi(x)|}\right)\frac{1}{|x|^{n+2s-\alpha}}. \quad (8)$$

Так как $\varphi \in S$, то $|(-\Delta)^s\varphi(x)| \leqslant C\frac{1}{|x|^{n+2s-\alpha}}$, что доказывает вторую часть Утверждения.

В случае $s \in (k, k+1), k > 0$ дробный оператор Лапласа представляется следующим образом:

$$(-\Delta)^s = (-\Delta)^{[s]}\cdot(-\Delta)^{\{s\}}, \quad (9)$$

где $[s]$ и $\{s\}$ соответственно целая и дробная часть s. При этом доказательство Утверждения 1 фактически не меняется, только в знаменателе в показателе степени s меняется на $\{s\}$. Покажем это, например, в случае $|x| \leqslant 1$.

$$|(-\Delta)^s\varphi(x)| = \left|(-\Delta)^{[s]}\cdot(-\Delta)^{\{s\}}\varphi(x)\right| = C\Big|\int\limits_{|x-y|\geqslant 1}\frac{(-\Delta)^{[s]}\varphi(x)-(-\Delta)^{[s]}\varphi(y)}{|x-y|^{n+2\{s\}}}dy +$$

$$+\int\limits_{|x-y|\leqslant 1}\frac{(-\Delta)^{[s]}\varphi(x)-(-\Delta)^{[s]}\varphi(y)-\nabla(-\Delta)^{[s]}\varphi(x)(x-y)}{|x-y|^{n+2\{s\}}}dy\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sup_{x\in R^n}|D^{2[s]}\varphi(x)|\int\limits_{|x-y|\geqslant 1}\frac{1}{|x-y|^{n+2\{s\}}}dy +$$

$$+C_2\Big|\int_{|x-y|\leqslant 1}\frac{[\nabla(-\Delta)^{[s]}\varphi(\xi)-\nabla(-\Delta)^{[s]}\varphi(x)](x-y)}{|x-y|^{n+2\{s\}}}dy\Big|\leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sup_{x\in R^n}|D^{2[s]}\varphi(x)| + C_2\Big|\int\limits_{|x-y|\leqslant 1}\frac{\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(-\Delta)^{[s]}\varphi(\eta)(x_i-y_i)\cdot\left(x_j-y_j\right)}{|x-y|^{n+2\{s\}}}dy\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sup_{x\in R^n}|D^{2[s]}\varphi(x)| + C_2 \sup_{x\in R^n}|D^{2[s]+2}\varphi(x)|\int\limits_{|x-y|\leqslant 1}\frac{dy}{|x-y|^{n+2\{s\}-2}} \leqslant C$$

Итак, Утверждение 1 полностью доказано.

Теперь допустим, что u – функция из S', удовлетворяющая условию (3). Покажем, что $(-\Delta)^s u$, определяемый по формуле

$$((-\Delta)^s u,\varphi) \equiv \int_{R^n} u(y)\cdot(-\Delta)^s\varphi(y)dy \tag{10}$$

является линейным не прерывным функционалом на S, т.е принадлежит S'.

Покажем, во-первых, что $(-\Delta)^s u$ – функционал на S.

$$|((-\Delta)^s u,\varphi)| \leqslant \int\limits_{R^n}|u(y)|\cdot|(-\Delta)^s\varphi(y)|dy \leqslant \int\limits_{|y|\leqslant 1}C(1+|y|)^t\cdot|(-\Delta)^s\varphi(y)|dy +$$

$$+\int\limits_{|y|\geqslant 1}C(1+|y|)^t\cdot|(-\Delta)^s\varphi(y)|dy.$$

Оцениваем подынтегральное выражение при помощи Утверждения 1.

$|((-\Delta)^s u,\varphi)| \leqslant C_1 + C_2\int_{|y|\geqslant 1}\frac{(1+|y|)^t}{(1+|y|)^{n+2s-\alpha}}dy,$ здесь мы α выбираем таким образом:

$$0 < \alpha < 2s - t.$$

При этом интеграл сходится, то есть $|((-\Delta)^s u,\varphi)| \leqslant C$. Это означает, $(-\Delta)^s u$ – функционал на S.

Покажем линейность функционала $(-\Delta)^s u$.

$$((-\Delta)^s u,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2) = \int\limits_{R^n}u(y)\cdot(-\Delta)^s\left(\alpha_1\varphi_1(y)+\alpha_2\varphi_2(y)\right)dy.$$

Линейность $(-\Delta)^s$ на S легко показать, пользуясь его интегральным представлением.

$$((-\Delta)^s u, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \int\limits_{R^n} u(y)\cdot[\alpha_1(-\Delta)^s\,\varphi_1(y) + \alpha_2(-\Delta)^s\varphi_2(y)]dy =$$
$$= \alpha_1((-\Delta)^s u, \varphi_1) + \alpha_2((-\Delta)^s u, \varphi_2)),$$

то есть функционал $(-\Delta)^s u$ линеен на S.

Докажем непрерывность $(-\Delta)^s u$, что значит: из того, что $\varphi_k \to 0$ в S следует:

$$((-\Delta)^s u, \varphi_k) \to 0.$$

$$|((-\Delta)^s u, \varphi_k)| = |\int\limits_{R^n} u(x)\cdot(-\Delta)^s\varphi_k(x)dx| \leqslant \int\limits_{|x|\leqslant 1} |u(x)|\cdot|(-\Delta)^s\varphi_k(x)|dx +$$
$$+ \int\limits_{|x|\geqslant 1} |u(x)|\cdot|(-\Delta)^s\varphi_k(x)|dx.$$

Воспользуемся оценками (7) и (8) из Утверждения 1.

$$|((-\Delta)^s u, \varphi_k)| = C_1(\sup_{x\in R^n}|\varphi_k(x)| + \sup_{x\in R^n}|D^2\varphi_k(x)|) +$$
$$+C_2(\sup_{x\in R^n}\sqrt{|\varphi_k(x)|} + \sup_{x\in R^n}\sqrt{|D^2\varphi_k(x)|})\int\limits_{|x|\geqslant 1}(1+|x|)^t\frac{1}{(1+|x|)^{n+2s-\alpha}}dx.$$

При условии, что $\alpha < 2s - t$ интеграл во втором слагаемом сходится.

$$|((-\Delta)^s u, \varphi_k)| \leqslant C_1(\sup_{x\in R^n}|\varphi_k(x)| + \sup_{x\in R^n}|D^2\varphi_k(x)|) +$$
$$+C_2(\sup_{x\in R^n}\sqrt{|\varphi_k(x)|} + \sup_{x\in R^n}\sqrt{|D^2\varphi_k(x)|}).$$

$\varphi_k \to 0$ в S означает, что $\forall\, \alpha, \beta > 0$ $\left|x^\beta D^\alpha\varphi_k\right|_{R^n}^{(0)} \to 0$. Поэтому, $((-\Delta)^s u, \varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Итак, $(-\Delta)^s u \in S'$.

Оператор $(-\Delta)^s$ непрерывен из S в S', что следует из такой цепочки рассуждений: при $u_k, u_0 \in S$

$$|((-\Delta)^s u_k, \varphi) - ((-\Delta)^s u_0, \varphi)| = |(-\Delta)^s(u_k - u_0), \varphi| =$$
$$= |\int_{R^n}(u_k - u_0)(x)\cdot(-\Delta)^s\varphi(x)dx)| \leqslant C \sup_{x\in R^n}|u_k(x) - u_0(x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

когда $u_k \to u_0$ в S.

Обозначим: M – множество функций, удовлетворяющих условию (3). Покажем, что оператор $(-\Delta)^s$ непрерывен из $S' \cap C^{2s+\alpha}(R^n) \cap M$ в S'. Пусть функции $u_\varepsilon, u \in S'$ удовлетворяют условию (3) и таковы, что $u_\varepsilon \to u$ в $C^{2s+\alpha}(\bar{B}_R)$, $\forall B_R \subset R^n$.

Возьмем произвольную функцию $\varphi \in S$.

$$|((-\Delta)^s u_\varepsilon, \varphi) - ((-\Delta)^s u, \varphi)| = |((-\Delta)^s (u_\varepsilon - u), \varphi)| = |(u_\varepsilon - u, (-\Delta)^s \varphi)| =$$

$$|\int_{R^n} [u_\varepsilon(x) - u(x)] \cdot (-\Delta)^s \varphi(x) dx| \leqslant |\int_{B_R} [u_\varepsilon(x) - u(x)] \cdot (-\Delta)^s \varphi(x) dx| +$$

$$+ \int_{R^n \setminus B_R} [u_\varepsilon(x) - u(x)] \cdot (-\Delta)^s \varphi(x) dx| \leqslant I_1 + I_2.$$

На основании Утверждения 1 и того, что u_ε, u удовлетворяют условию (3), интеграл $\int_{R^n} [u_\varepsilon(x) - u(x)] \cdot (-\Delta)^s \varphi(x)\, dx$ сходится. Поэтому $\forall \eta > 0\ \exists R$, такое что $I_2 < \frac{\eta}{2}$.

$$I_1 \leqslant \int_{B_R} |u_\varepsilon(x) - u(x)| \cdot |(-\Delta)^s \varphi(x)| dx \leqslant C_\varphi \cdot |u_\varepsilon - u|_{B_R}^{(0)}$$

Так как $u_\varepsilon \to u$ в $C^{2s+\alpha}(\bar{B}_R)$, $\forall B_R \subset R^n$, то $\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ $I_1 < \frac{\eta}{2}$.

Итак, $\forall \eta > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ $|((-\Delta)^s u_\varepsilon, \varphi) - ((-\Delta)^s u, \varphi)| < \eta$,

т.е. оператор непрерывен $(-\Delta)^s$ непрерывен из $S' \cap C^{2s+\alpha}(R^n) \cap M$ в S'.
Теорема доказана.

Замечание. Условие $u \in C^{2s+\alpha}(R^n)$ не является необходимым для того, чтобы $(-\Delta)^s u \in S'$.

Приложения.

1. Обобщение теоремы Лиувилля для оператора дробного Лапласа.
Пусть $u \in C^{2s+\alpha}(R^n)$, $\alpha \in (0,1)$ и

$$(-\Delta)^s = 0 \text{ в } R^n \tag{11}$$

Тогда u – константа.

Доказательство. Из условия следует, что u ограничено в R^n. Поэтому на основании Теоремы 1 применяем преобразование Фурье к уравнению (11):

$$|\xi|^{2s} F[u] = 0.$$

$F[u]$ имеет точечный носитель в нуле. Поэтому $F[u] = \sum_{|\alpha|=0} C_\alpha D^\alpha \delta(\xi)$ (см., например, [1], с.152). Пользуясь линейностью преобразования Фурье и формулой (15) на с.162[1], получаем $u = \sum_{|\alpha|=0} C_\alpha x^\alpha$. Так как u – ограничена в R^n, то $u = C$.
Теорема доказана.

2. В статье [3] доказывается единственность решения начальной задачи

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}, \tag{12}$$

где $u_0 \in C(R^n)$, $|u_0(x)| \leqslant A_0 + B_0 |x|^{2s-\sigma}$ $\forall x \in R^n$, $A_0, B_0, \sigma > 0$, (13)

$u \in C\big(R^n \times (0, +\infty)\big)$, $u(x,\cdot) \in C^1(0, +\infty)$ и

$$|u(x,t)| \leqslant A(t) + B|x|^{2s-\alpha} \ \forall (x,t) \in R^n \times [0; +\infty), \tag{14}$$

A подчиняется условию:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = 0, \text{ а } B > 0. \tag{15}$$

Мы приведем другое доказательство единственности, основанное на использовании Теоремы 1 данной статьи.

Доказательство. Предположим дополнительно, что функция $u(\cdot,t) \in C^{2s+\alpha}(R^n)$. Теперь все условия Теоремы 1 выполнены, и мы можем применить преобразование Фурье к системе (12). Получим систему вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + |\xi|^{2s}\tilde{u} = 0, \\ \tilde{u}(\xi,0) = \tilde{u}_0(\xi), \end{cases}$$

где первое уравнение системы – обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\tilde{u}$. Решением этой системы является функция

$$\tilde{u}(\xi,t) = \tilde{u}_0(\xi) \cdot e^{-|\xi|^{2s}\,t}. \tag{16}$$

Применяя обратное преобразование Фурье к (16), получаем

$$u(x,t) = F^{-1}[\tilde{u}_0(\xi) \cdot e^{-|\xi|^{2s}\,t}], \tag{17}$$

то есть $u(x,t)$ определяется однозначно исходными данными задачи. Теорема доказана.

Заметим, что в приведенном доказательстве вид функции $A(t)$ роли не играет, так как при фиксированном t

$$|u(x,t)| \leqslant A(t) + B|x|^{2s-\sigma} \leqslant C(t)(1+|x|^{2s-\sigma}) \leqslant C(t)(1+|x|)^{2s-\sigma}$$

и условие (3) Теоремы 1 выполняется. Поэтому ограничение (15) можно снять.

Анализ результатов. На основании полученного результата мы можем применять формулу (2) при изучении свойств дробного оператора Лапласа, а также при исследовании дробного уравнения теплопроводности, что входит в сферу научных интересов автора. Также, самостоятельный интерес могут представлять оценки (5), (6) из Утверждения 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – 2-е изд., перераб. и дополн. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
2. Cabre, X. Nonlinear equations for fractional Laplacians I: Regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates / X. Cabre , Y. Sire // Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire. – 2014. – 367. – P. 911–941.
3. Greco, A. Existence and convexity of solutions of the fractional heat equation / A. Greco, A. Iannizzotto // Communications on pure and applied analysis. – 2017. – Vol. 16. – No 6. – P. 2201–2226.
4. Cui, X. Symmetry and monotonicity of solutions for equations involving the fractional laplacian of higher order / X. Cui, W. Song // Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 48, No 2. – P. 485-499.
5. Alves, C.O. A multiplicity result for a nonlinear fractional Schrodinger equation in R^n without the Ambrosetti-Rabinowitz condition / C.O. Alves and V. Ambrosio // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 466, No 1. – P. 498-522.
6. Wang, Y. A. Liouville Problem for the Stationary Fractional Navier–Stokes–Poisson System / Y. Wang and J. Xiao // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. – 2018. – Vol. 20. – P. 485-498.
7. Dwivedi, G. On the bifurcation results for fractional Laplace equations / G. Dwivedi, J. Tyagi, R. B. Verma // Math. Nachr. – 2017. – Vol. 290. – P. 2597-2611
8. Sire, Y. Symmetrization for Fractional Elliptic and Parabolic Equations and an Isoperimetric Application / Y. Sire, J. L. V´azquez, B. Volzone // Chin. Ann. Math. – 2017. – Vol. 38. – P. 661–686

Поступила в редакцию 27.11.2018 г.

EXTENSION OF A FRACTIONAL LAPLACE OPERATOR ON SPACE S' AND SOME APPLICATIONS

O.N. Shvydkyi

This article proves a theorem on the extension of the fractional Laplace operator from the space S to the space of the generalized functions S' that have a polynomial growth at infinity. Applications of this theorem are also given to the proof of the generalization of the Liouville theorem for the fractional Laplace operator and to the proof of the uniqueness of the initial problem for the fractional heat equation.

Keywords: fractional Laplace operator, operator extension, Liouville theorem.

Швидкий Олег Николаевич
ГУ «Институт прикладной математики и механики» (г. Донецк), отдел уравнений математической физики.
oshvid@ukr.net
0713968978

Shvydkyi Oleh Nikolaevich
The Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk

М Е Х А Н И К А

УДК 539:519.517.3

КОМПЛЕКСНЫЕ НУЛЕВЫЕ ОПЕРАТОРЫ В СВЯЗАННОЙ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ С ЭЛЕМЕНТАМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТИПА

© 2019. *О.П. Абрамова*

Методом численного моделирования исследовано поведение поля деформации связанной фрактальной структуры с элементами цилиндрического типа. Показано, что наличие переменных параметров (полуосей, модулей) приводит к стохастическому поведению комплексного поля деформации. Вводятся комплексные нулевые операторы полей смещений как отдельных, так и связанных элементов структуры. Показано, что перестановка отдельных операторов в нулевом операторе для связанной структуры приводит к появлению ненулевого комплексного поля деформации. При этом на фоне стохастических пиков появляются шумовые дорожки. Шумовая дорожка представляет собой стохастическое кольцо, внутренность которого является регулярной областью. На примере связанной фрактальной структуры из трех цилиндрических элементов исследованы эффекты сжатия и растяжения исходного состояния структуры.

Ключевые слова: связанные фрактальные структуры, комплексное поле деформации, комплексные нулевые операторы, упорядочение операторов, численное моделирование.

Введение. В настоящее время для создания квантового компьютера актуальными задачами являются квантовая обработка информации и квантовые вычисления [1 – 4]. Для решения этих задач необходимо использовать квантовую механику.

Классические компьютеры кодируют информацию в битах, которые могут находиться в одном из двух состояний, 0 или 1. Реализация состояния 0 достигается за счет сложения двух сигналов с одинаковыми амплитудами и формой, но с противоположными фазами.

Квантовые компьютеры кодируют информацию в кубитах [5, 6]. Физическими системами, реализующими кубиты, могут быть любые объекты, имеющие два квантовых состояния. В качестве активных объектов могут выступать различные наноструктуры и метаматериалы [7]. Эти активные объекты могут проявлять стохастические свойства, что усложняет практическую реализацию кубитов для квантовых компьютеров.

В последнее время дальнейшее развитие получили нанофизика, физика конденсированных сред [8, 9], нейронные сети [10], которые используют нанообъекты в качестве активных объектов. Важнейшей задачей является изучение взаимовлияния, коллективных взаимодействий, динамики таких нанообъектов. При этом возможны эффекты различных топологических фазовых переходов, связанных с формой и размерностью нанообъектов, образованием новых связанных структур (кластеров). Одним из примеров подобного рода могут быть модельные многослойные наносистемы и появляющиеся там объемные фрактальные структуры [11 – 14]. При этом возможно изменение формы, фрактальной размерности отдельных элементов в связанной фрактальной структуре.

Актуальность таких исследований подтверждается присуждением Нобелевской премии по физике за 2016 год М. Костерлицу, Д. Таулессу, Д. Холдейну за

теоретические открытия топологических фазовых переходов и топологических фаз материи.

С другой стороны, мозг живых организмов представляет собой определенную нейронную сеть [10]. При этом активные клетки реагируют на пересечение узлов воображаемой гексагональной пространственной решетки, то есть на прохождение определенных расстояний в определенном направлении. Нобелевская премия 2014 года по физиологии и медицине была присуждена Дж. О'Кифи, М.-Б. Мозер и Э. Мозеру за открытие системы клеток в мозге, которые определяют положение в пространстве [15 – 17]. Дж. О'Киф открыл активные нейроны или «клетки места». М.-Б. Мозер и Э. Мозер открыли координатные нейроны или «клетки решетки» (grid-cell). Эти открытия в медицине дают возможность использовать модельные представления о нанообъектах в связанных фрактальных структурах также для описания нейронных сетей.

В работах [11 – 14, 18, 19] изучены особенности стохастического состояния поля деформации связанных фрактальных многослойных наносистем, наноловушек, квантовых точек с учетом вариации переменных параметров. Исследованию взаимовлияния и упорядочения отдельных структур, аттракторов, стохастических процессов в связанной фрактальной структуре посвящены работы [13, 14, 19]. При этом эффекты, связанные с формой объектов, исследуются с помощью аттракторов как отдельных, так и связанных структур. Аттракторы могут представлять собой отдельные точки, линии, поверхности и их суперпозиции [13, 14]. Наличие стохастических аттракторов приводит к появлению стохастических свойств активных объектов. Особенностью поведения таких активных объектов (связанных фрактальных структур) является появление комплексных полей деформации, что связано с наличием переменных параметров и эффекта упорядочения отдельных операторов полей смещений в суммарном поле деформации. Возникает задача о реализации состояния 0 для таких активных объектов со стохастическими свойствами. Эта задача может быть реализована путем введения комплексных нулевых операторов [19].

Целью данной работы является исследование комплексного поля деформации, влияния упорядочения отдельных операторов полей смещений, введение комплексных нулевых операторов в связанных фрактальных структурах с элементами цилиндрического типа.

Фрактальная структура с двумя элементами цилиндрического типа. Рассматривается связанная фрактальная структура (**I**, **II**), состоящая из двух фрактальных эллиптических цилиндров (i=1, 2), находящаяся в объемной дискретной решетке $N_1 \times N_2 \times N_3$, узлы которой задаются целыми числами n, m, j. По аналогии с [18, 19] нелинейные уравнения для безразмерной функции смещения $u = u_2$ (вторая ветвь из восьми возможных [18]) узла решетки имеют вид

$$u = u_2 = \sum_{i=1}^{2} u_{Ri}\,; \quad u_{Ri} = R_i k_{ui}^2 (1 - 2\mathrm{sn}^2(u_2 - u_{0i}, k'_{ui}))\,; \tag{1}$$

$$k_{ui}^2 = (1-\alpha_i)/Q_i\,; \quad k'_{ui} = (1-k_{ui}^2)^{1/2}\,; \quad p_{0\mathrm{i}} = p'_{0\mathrm{i}} + p'_{1\mathrm{i}} n + p'_{2\mathrm{i}} m + p'_{3\mathrm{i}} j\,; \tag{2}$$

$$Q_i = p_{0i} - b_{1i}(n-n_{0i})^2 / n_{ci}^2 - b_{2i}(m-m_{0i})^2 / m_{ci}^2 - b_{3i}(j-j_{0i})^2 / j_{ci}^2\,. \tag{3}$$

Здесь u_0 – постоянное (критическое) смещение; α_i – фрактальная размерность поля деформации u вдоль оси Oz ($\alpha_i \in [0,1]$); переменные модули k_{ui} являются функциями от индексов n, m, j узлов объемной дискретной решетки. Выбор положительного

знака у модуля k'_{ui} связан с выбором второй ветви функции смещения $u = u_2$ [18]. Функции Q_i определяют вид фрактальной структуры, тип аттракторов и учитывают взаимодействие узлов, как в плоскости основной прямоугольной дискретной решетки $N_1 \times N_2$, так и межплоскостные взаимодействия. Параметры p_{0i}, p'_{3i}, b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, n_{0i}, n_{ci}, m_{0i}, m_{ci}, j_{0i}, j_{ci} характеризуют различные фрактальные структуры. Параметры R_i определяют ориентацию полей деформации отдельных структур в связанной системе. В общем случае, все параметры могут зависеть от индекса слоя j и безразмерного времени t. Учет межплоскостных взаимодействий (зависимостей от индекса j) приводит к изменению постоянных полуосей эллиптических цилиндров (n_{ci}, m_{ci}) в (3) на переменные (n'_{ci}, m'_{ci}) полуоси

$$(n'_{ci})^2 = a_{1i} n_{ci}^2; \quad (m'_{ci})^2 = a_{2i} m_{ci}^2. \tag{4}$$

При моделировании переменные параметры a_{1i}, a_{2i} из (4) задаются выражениями

$$a_{1i} = 1 + (p'_{1i} n + p'_{2i} m + p'_{3i} j) / p'_{0i} - b'_{3i} (j - j_{0i})^2 / (j_{ci}^2 p'_{0i});$$
$$a_{2i} = 1 + (p'_{1i} n + p'_{2i} m + p''_{3i} j) / p'_{0i} - b''_{3i} (j - j_{0i})^2 / (j_{ci}^2 p'_{0i}). \tag{5}$$

Тогда с учетом (5) функции Q_i из (3) принимают вид

$$Q_i = a_{0i} (p'_{0i} - b_{1i} (n - n_{0i})^2 / (n'_{ci})^2 - b_{2i} (m - m_{0i})^2 / (m'_{ci})^2); \quad a_{0i} = 1. \tag{6}$$

Отметим, что при решении реальных задач зависимости (5) должны определяться экспериментально.

При численном моделировании полагалось, что

$$N_1 = 240,\ N_2 = 240,\ \alpha_i = 0.5,\ u_{0i} = 29.537,\ p_{0i} = 1.0423,\ b_{1i} = b_{2i} = 1,$$
$$n_{0i} = 121.1471,\ m_{0i} = 120.3267,\ n_{c1} = m_{c1} = 57.4327,\ n_{c2} = m_{c2} = 28.7164,$$
$$j_{0i} = 31.5279,\ j_{ci} = 11.8247,\ p'_{1i} = p'_{2i} = 0,\ p'_{3i} = 0.1368,\ p''_{3i} = 0.1547,$$
$$b'_{31} = b''_{31} = 0,\ b'_{32} = 1,\ b''_{32} = -1. \tag{7}$$

В рассматриваемой связанной фрактальной структуре (**I**, **II**) эллиптический цилиндр (**I**) является внешним, а эллиптический цилиндр (**II**) – внутренним. Для приведенных параметров они оба являются круговыми, причем радиус сечения первого (**I**) в два раза больше радиуса сечения второго (**II**).

Наличие переменных полуосей приводит к существенным изменениям поведения поля деформации u связанной системы из (1) – (3): кроме реальной части смещений $\mathrm{Re}\,u$ появляется мнимая часть $\mathrm{Im}\,u$. Явный вид результирующей стохастической поверхности существенно зависит от порядка следования отдельных слагаемых в сумме (1), которые могут быть интерпретированы как отдельные операторы, описывающие суммарный стохастический процесс [19]. Появление стохастичности также связано с наличием переменных модулей k_{ui}, k'_{ui} из (2).

Для рассматриваемых эллиптических цилиндров с параметрами $b'_{31} = b''_{31} = 0$ из (7) функция смещения u не зависит от индекса j. Если указанные параметры не равны нулю, то эллиптические цилиндры превращаются либо в эллипсоиды, либо в гиперболоиды [11]. Поэтому в данной работе итерационная процедура по индексу n

моделирует стохастический процесс на прямоугольной решетке с размерами $N_1 \times N_2$.

В качестве примеров на рис. 1, рис. 2 приведено поведение $\mathrm{Re}\,u$ и $\mathrm{Im}\,u$ безразмерной функции смещения u связанных структур (**I(+), II(+)**) (Fig. 1), (**I(+), II(-)**) (рис. 2), состоящих из двух фрактальных круговых цилиндров с постоянными полуосями: структура (**I**) – внешний цилиндр с полуосями $n_{c1} = m_{c1}$; структура (**II**) – внутренний цилиндр с полуосями $n_{c2} = m_{c2}$.

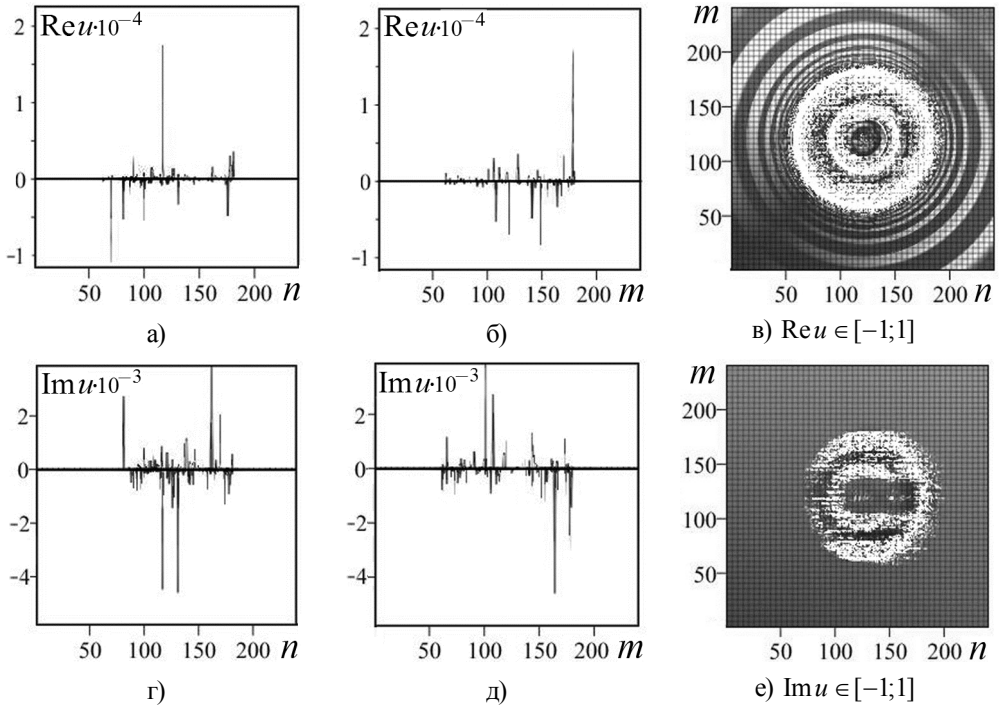


Рис. 1. Поведение поля деформации u связанной структуры (**I(+), II(+)**):
(а, б, г, д) – проекции на плоскости nOu, mOu; (в, е) – сечения (вид сверху).

В связанной системе (**I(+), II(+)**) поля деформации отдельных структур (**I**), (**II**) ориентированы одинаково, при этом $R_1 = 1$, $R_2 = 1$. В связанной системе (**I(+), II(-)**) поля деформации отдельных структур (**I**), (**II**) имеют противоположные направления, при этом $R_1 = 1$, $R_2 = -1$. Связанной фрактальной структуре (**I(+), II(+)**) в выражениях (1) соответствует упорядоченный оператор

$$u = u_{R1} + u_{R2}. \tag{8}$$

Связанной фрактальной структуре (**I(+), II(-)**) в выражениях (1) соответствует упорядоченный оператор

$$u = u_{R1} - u_{R2}. \tag{9}$$

Поля деформации таких структур являются существенно стохастическими вдоль границ круговых цилиндров и между ними. Причем амплитуды пиков на $\mathrm{Re}\,u$ для фрактальной структуры (**I(+), II(+)**) (рис. 1 а) на порядок больше (выше), чем амплитуды пиков на $\mathrm{Re}\,u$ для структуры (**I(+), II(–)**) (рис. 2 а). Волнообразный характер поведения $\mathrm{Re}\,u$ (рис. 1 в; рис. 2 в) вне границы внешнего цилиндра объясняется наличием переменных модулей k_{ui}, k'_{ui} в выражениях (1). Мнимая часть

функции смещения $\mathrm{Im}\,u$ (рис. 1 г, д, е; рис. 2 г, д, е) свидетельствует о наличии эффективного затухания. При этом характер затухания для структур (**I(+), II(+)**) (рис. 1 е) и (**I(+), II(–)**) (рис. 2 е) различен.

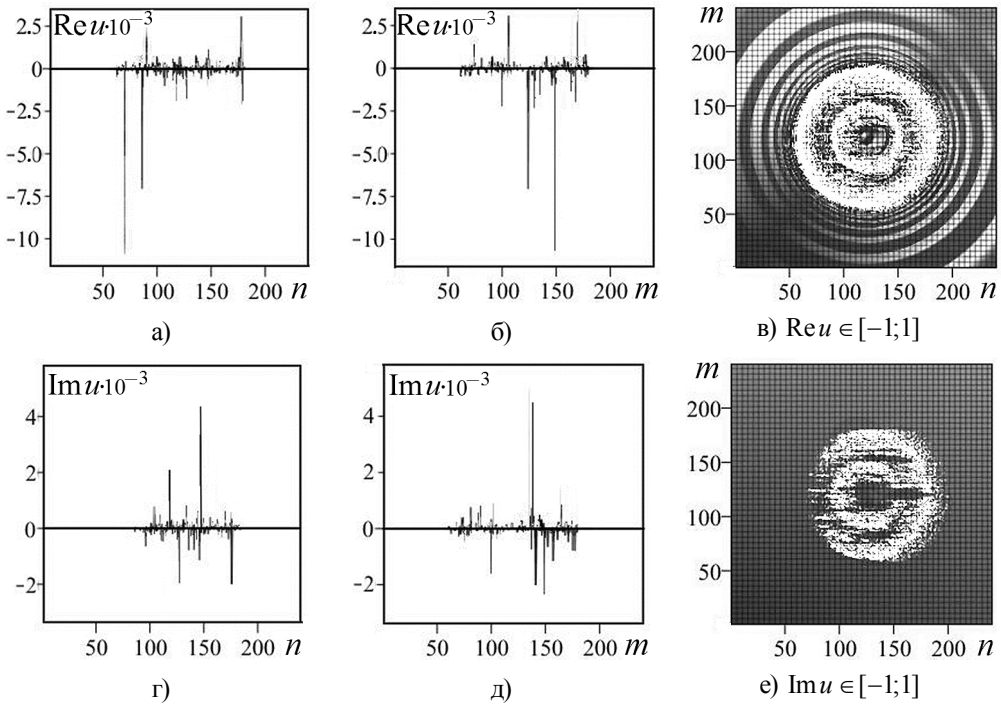


Рис. 2. Поведение поля деформации u связанной структуры (**I(+), II(-)**):
(а, б, г, д) – проекции на плоскости nOu, mOu; (в, е) – сечения (вид сверху).

Перестановка отдельных операторов полей смещений в связанной цилиндрической структуре (**I(+), II(+)**) приводит к структуре (**II(+), I(+)**), которой соответствует упорядоченный оператор

$$u = u_{R2} + u_{R1}\,. \tag{10}$$

При этом стохастический процесс изменяется, что приводит к ненулевому отклонению

$$\delta u = (u_{R1} + u_{R2}) - (u_{R2} + u_{R1}) \neq 0 \tag{11}$$

поля деформации, реализуемого в процессе итераций.

Наблюдаются комплексные отклонения $\mathrm{Re}\,\delta u \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\delta u \neq 0$ (рис. 3). На фоне стохастических пиков для $\mathrm{Im}\,\delta u$ характерно наличие шумовой дорожки (рис. 3 г, д). Причем, уровень шума (амплитуда шума для $\mathrm{Im}\,\delta u$) приблизительно равна $5\cdot 10^{-24}$, что находится вблизи теоретического значения $0.497889116\cdot 10^{-23} = 3/N_a$, где $N_a = 6.025438\cdot 10^{23}$ – число Авагадро. Эта шумовая дорожка представляет собой стохастическое кольцо, внутренность которого является регулярной областью (рис. 3 е).

Для $\mathrm{Re}\,\delta u$ на фоне стохастического поведения характерно наличие основного пика вниз с большой амплитудой порядка $4.5\cdot 10^{-6}$ (рис. 3 а, б). В сечении для $\mathrm{Re}\,\delta u$ наблюдаются особенности типа стохастических колец с регулярной внутренней областью (рис. 3 в).

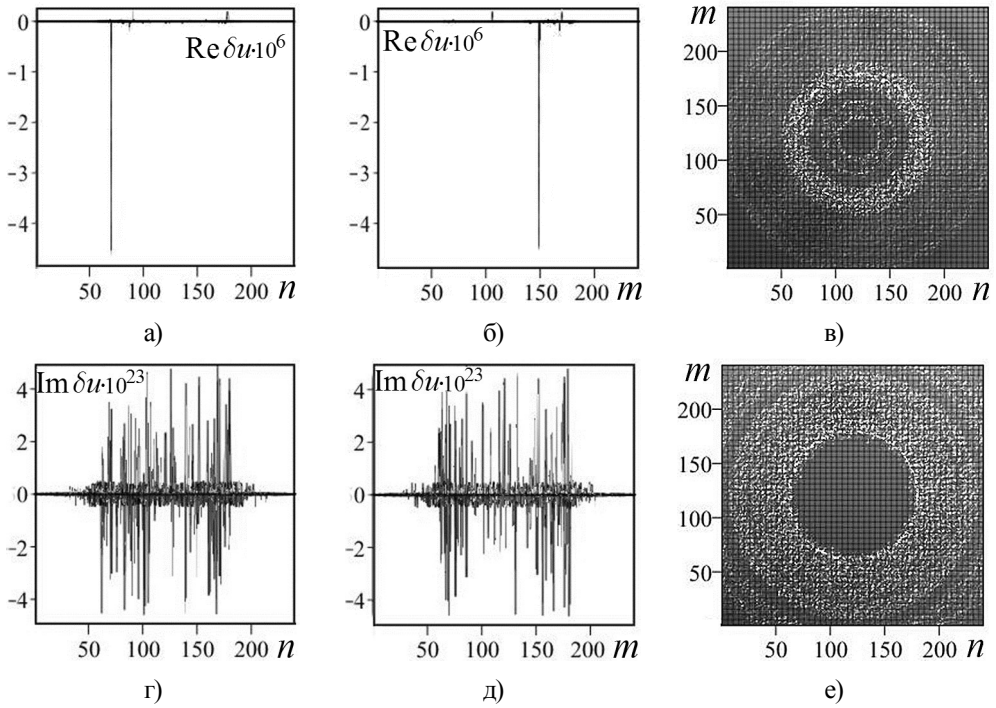


Рис. 3. Поведение отклонения δu из (11):(а, б, г, д) – проекции на плоскости nOu, mOu; сечения (вид сверху) (в) $\mathrm{Re}\,\delta u \in [-10^{-8}; 10^{-8}]$, (е) $\mathrm{Im}\,\delta u \in [-10^{-23}; 10^{-23}]$.

Аналогичные результаты имеют место и для других порядков следования отдельных операторов полей смещений в связанной цилиндрической структуре (**I(+), II(+)**) следующего вида

$$\delta u = (u_{R1} + u_{R2}) - (u_{R1} + u_{R2}) \neq 0; \quad \delta u = (u_{R1} + u_{R2}) + (-u_{R1} - u_{R2}) \neq 0;$$

$$\delta u = u_{R1} + (u_{R2} - u_{R2}) - u_{R1} \neq 0; \quad \delta u = u_{R1} + u_{R2} - u_{R1} - u_{R2} \neq 0. \qquad (12)$$

Нулевые операторы для связанных цилиндрических структур (**I, II**) и (**II, I**), соответственно, имеют вид

$$\delta u_{\mathrm{I,II}} = (u_{R1} - u_{R1}) + (u_{R2} - u_{R2}) = 0; \quad \delta u_{\mathrm{II,I}} = (u_{R2} - u_{R2}) + (u_{R1} - u_{R1}) = 0;$$

$$\Delta u_{\mathrm{I,II}} = u_{R1} - u_{R1} + u_{R2} - u_{R2} = 0; \quad \Delta u_{\mathrm{II,I}} = u_{R2} - u_{R2} + u_{R1} - u_{R1} = 0. \qquad (13)$$

Здесь нулевые операторы $\delta u_{\mathrm{I,II}}$, $\delta u_{\mathrm{II,I}}$ отличаются от нулевых операторов $\Delta u_{\mathrm{I,II}}$, $\Delta u_{\mathrm{II,I}}$ наличием круглых скобок, а, следовательно, и организацией стохастического процесса.

Связанным структурам (**I(+), I(-)**), (**II(+), II(-)**), состоящих из двух одинаковых фрактальных круговых цилиндров (с одинаковыми полуосями $n_{ci} = m_{ci}$), но с противоположным направлением полей деформации, соответствуют упорядоченные нулевые операторы типа

$$\Delta_1 u = u_{R1} - u_{R1} = 0; \quad \Delta_2 u = u_{R2} - u_{R2} = 0. \qquad (14)$$

Согласно выражениям (13) упорядоченный оператор

$$\Delta u = \Delta_1 u + \Delta_2 u = u_{R1} - u_{R1} + u_{R2} - u_{R2} = 0 \qquad (15)$$

является нулевым.

Однако, изменения порядка следования (перестановка) отдельных операторов в нулевом операторе (15) для связанной структуры приводит к операторам, которые уже не являются нулевыми

$$\delta u = u_{R1} + u_{R2} - u_{R1} - u_{R2} \neq 0\,; \tag{16}$$

$$\delta u = u_{R1} + u_{R2} - u_{R2} - u_{R1} \neq 0\,; \tag{17}$$

$$\delta u = u_{R1} - u_{R2} + u_{R2} - u_{R1} \neq 0\,; \tag{18}$$

$$\delta u = u_{R1} - u_{R2} - u_{R1} + u_{R2} \neq 0\,. \tag{19}$$

Эти операторы приводят к появлению комплексного поля деформации.

На рис. 4 в качестве примера приведены комплексные функции отклонений $\mathrm{Re}\,\delta u \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\delta u \neq 0$ для операторов из (16) и (17). Характер поведения отклонений комплексного поля деформации, которым соответствуют операторы из (16) и (17), существенно различен, что подтверждается как для $\mathrm{Re}\,\delta u$ (рис. 4 а, г), так и для $\mathrm{Im}\,\delta u$ (рис. 4 б, в, д, е). На фоне стохастических пиков для $\mathrm{Im}\,\delta u$ характерно появление двух шумовых дорожек (рис. 4 б, д). Уровень шума первой дорожки находится вблизи уровня шума дорожки из (рис. 3 г, д). Уровень шума второй дорожки (приблизительно равен $5\cdot 10^{-25}$) на порядок меньше уровня шума первой дорожки. Эти шумовые дорожки представляют собой стохастические кольца, внутренности которых являются регулярными областями (рис. 4 в, е).

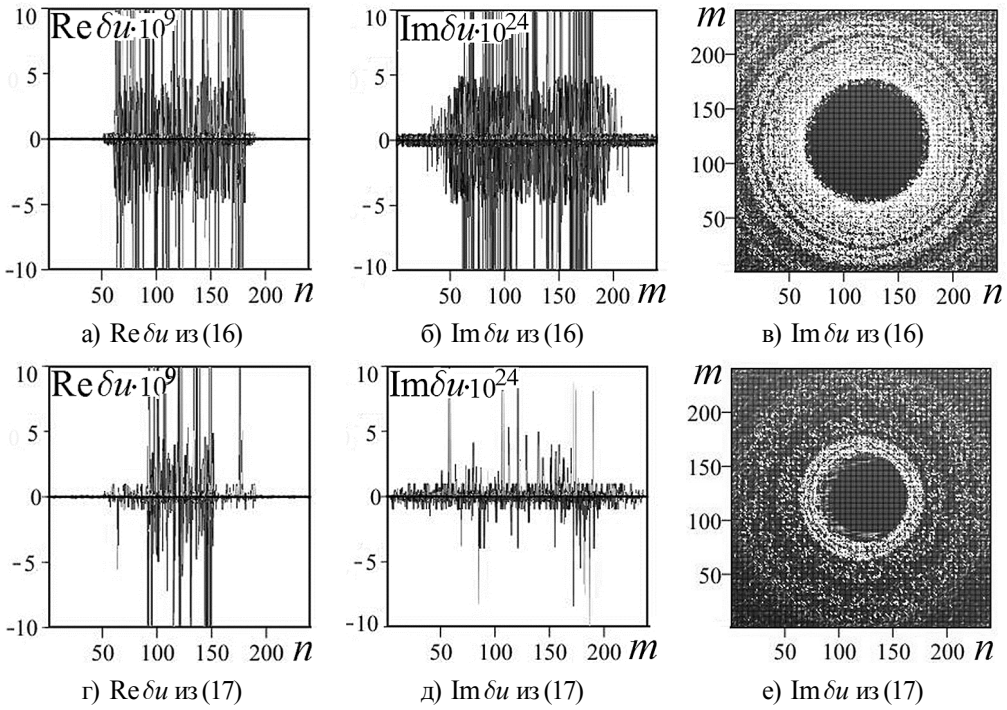


Рис. 4. Поведение отклонений δu, проекции на плоскость nOu : $\mathrm{Re}\,\delta u \in [-10^{-8}; 10^{-8}]$ (а, г) – mOu ; $\mathrm{Im}\,\delta u \in [-10^{-23}; 10^{-23}]$ (б, д); сечения $\mathrm{Im}\,\delta u \in [-10^{-25}; 10^{-25}]$ (в, е) (вид сверху).

Фрактальная структура с тремя элементами цилиндрического типа. Рассматривается связанная фрактальная структура (**I, III, II**), состоящая из трех фрактальных эллиптических цилиндров (i=1, 3, 2), находящаяся в объемной дискретной

решетке $N_1 \times N_2 \times N_3$. По аналогии с выражениями (1) – (3) нелинейные уравнения для безразмерной функции смещения u узла решетки имеют вид

$$u = \sum_{i=1}^{3} u_{Ri}\,; \quad u_{Ri} = R_i k_{ui}^2 (1 - 2\mathrm{sn}^2(u_2 - u_{0i}, k'_{ui}))\,. \tag{20}$$

Все остальные параметры описываются выражениями (2), (3).

Особые точки (аттракторы) поля деформации такой связанной фрактальной структуры располагаются на поверхности, ядро которой определяется из условия

$$Q_1 \cdot Q_3 \cdot Q_2 = 0\,. \tag{21}$$

Выражения для функций Q_i определены в (3). Если поверхность (21) пересечь плоскостью $j = j_k$, то получим уравнение изолиний.

В качестве модельных примеров рассматривались фрактальные структуры с параметрами из (7). Цилиндрические структуры (**I**) и (**II**) были выбраны такими же, как и в предыдущем разделе.

Для описания эффектов растяжения и сжатия цилиндрической структуры (**III**) рассмотрим три варианта выбора параметров для полуосей:

$$\text{вариант 1: } n_{31} = m_{c3} = 43.0746\,; \tag{22}$$

$$\text{вариант 2: } n_{31} = m_{c3} = 50.2537\,; \tag{23}$$

$$\text{вариант 3: } n_{31} = m_{c3} = 35.8955\,. \tag{24}$$

На рис. 5 приведены аттракторы (рис. 5 а, г, ж) для каждого из трех вариантов и сечения $\mathrm{Re}\,u$ (рис. 5 б, д, з), $\mathrm{Im}\,u$ (рис. 5 в, е, и).

В первом варианте (рис. 5 а, б, в) цилиндрическая структура (**III**) находится посередине между цилиндрическими структурами (**I**) и (**II**), что соответствует исходному состоянию структуры (**III**).

Во втором варианте (рис. 5 г, д, е) цилиндрическая структура (**III**) расположена ближе к цилиндрической структуре (**I**), что соответствует растянутому состоянию структуры (**III**).

В третьем варианте (рис. 5 ж, з, и) цилиндрическая структура (**III**) расположена ближе к цилиндрической структуре (**II**), что соответствует сжатому состоянию структуры (**III**).

Аттракторы фрактальной связанной структуры (**I, III**, **II**) представляют собой непрерывные кривые, близкие к концентрическим окружностям (вариант 1). Вблизи главной диагонали от точки (0, 240) до точки (240, 0) наблюдаются ярко выраженные угловые особенности (изломы), что связано с взаимовлиянием отдельных структур друг на друга (рис. 5 а).

При приближении аттрактора структуры (**III**) к аттрактору структуры (**I**) вблизи главной диагонали на изолиниях структур (**III**) и (**I**) наблюдаются разрывы, пересечения, образование особенностей типа “островков” (вариант 2). При этом, изолиния (аттрактор) структуры (**II**) остается непрерывной и становится более гладкой (рис. 5 г).

При приближении аттрактора структуры (**III**) к аттрактору структуры (**II**) на изолиниях структур (**III**) и (**II**) наблюдаются разрывы, пересечения, образование особенностей типа “островков” не только вблизи главной диагонали, но и по всей длине (вариант 3). При этом, изолиния (аттрактор) структуры (**I**) остается непрерывной с ярко выраженными угловыми особенностями (изломами) вблизи главной диагонали (рис. 5 ж). Волнообразный характер поведения $\mathrm{Re}\,u$ (рис. 5 б, д, з) вне границы внешнего цилиндра структуры (**I**) объясняется наличием переменных модулей k_{ui}, k'_{ui} в выражениях функций смещения u связанной структуры (**I, III**, **II**) и зависит от выбора вариантов (22)–(24).

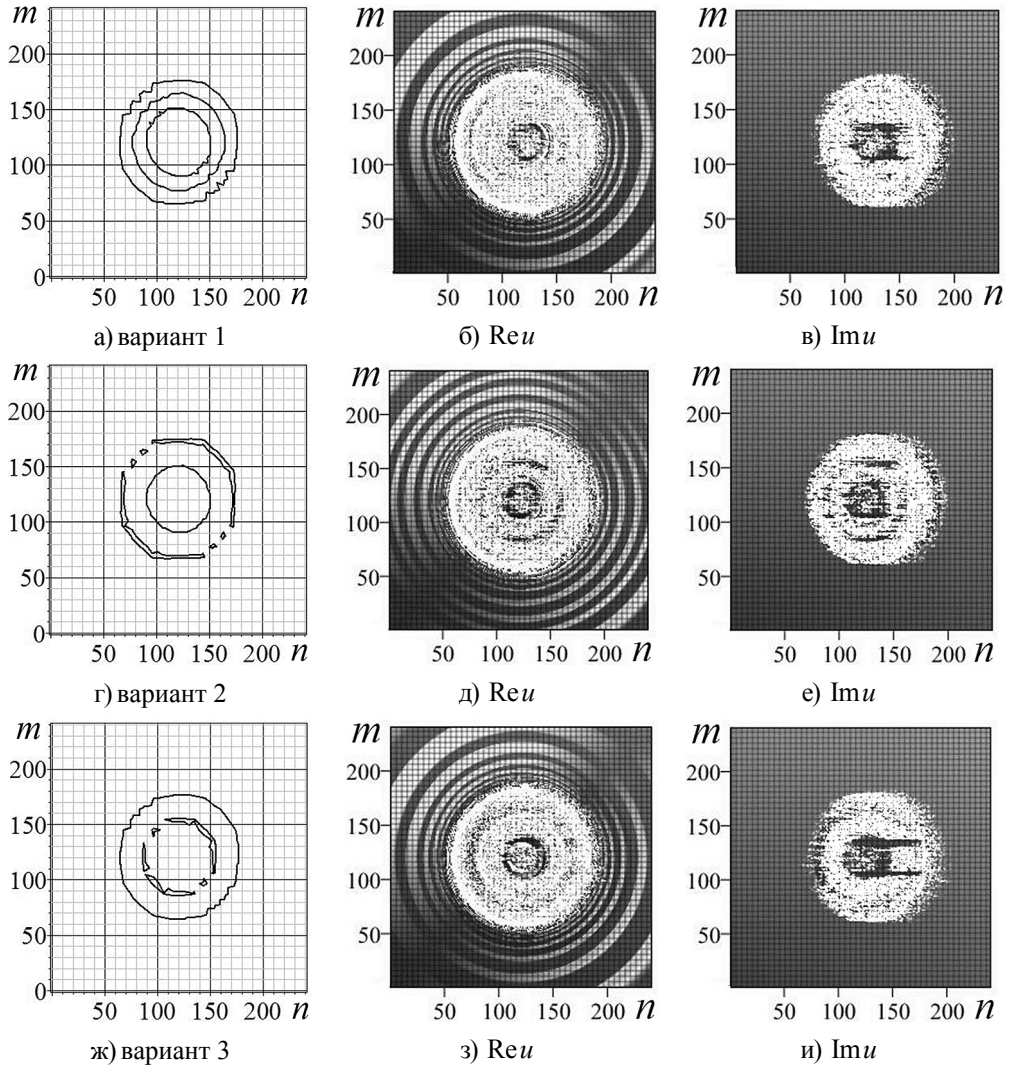


Рис. 5. Поведение аттракторов (а, г, ж) и функций смещения u : сечения $\mathrm{Re}\,u \in [-1; 1]$ (б, д, з); $\mathrm{Im}\,u \in [-1; 1]$ (в, е, и) (вид сверху).

При приближении структуры (**III**) к структуре (**I**) (вариант 2) количество волн увеличивается (рис. 5 д) по сравнению с вариантами 1 и 3 (рис. 5 б, з). Для внутренней области $\mathrm{Re}\,u$ характерно ярко выраженное стохастическое поведение, локализованное в областях кольцеобразного типа.

Мнимая часть функции смещения $\mathrm{Im}\,u$ связанной структуры (**I, III, II**) свидетельствует о наличии эффективного затухания (рис. 5 в, е, и). При этом характер затухания существенно различен и зависит от расположения структуры (**III**) относительно структур (**I**) и (**II**).

Выводы. Исследовано поведение аттракторов и поля деформации для связанной фрактальной структуры, состоящей из элементов цилиндрического типа. Различные формы аттракторов свидетельствуют о влиянии отдельных структур друг на друга.

На примере связанных фрактальных структур из двух и трех круговых цилиндров с различными полуосями показано, что поле деформации является комплексным, существенно стохастическим вдоль границ круговых цилиндров и между ними. Волнообразный характер поведения реальной части функции смещения $\mathrm{Re}\,u$ вне

границы внешнего цилиндра объясняется наличием переменных модулей k_u, k'_u. Мнимая часть функции смещения $\mathrm{Im}\,u$ свидетельствует о наличии эффективного затухания.

Явный вид результирующей стохастической поверхности существенно зависит от порядка следования отдельных слагаемых в выражениях (1) или (20) для функции смещения, которые могут быть интерпретированы как отдельные операторы, описывающие суммарный стохастический процесс.

Вводятся упорядоченные нулевые операторы. Показано, что изменения порядка следования отдельных операторов в нулевом операторе приводят к комплексным отклонениям $\mathrm{Re}\,\delta u \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\delta u \neq 0$. При этом на фоне стохастических пиков для $\mathrm{Im}\,\delta u$ характерно наличие шумовых дорожек. Эти шумовые дорожки представляет собой различные стохастические кольца, внутренность которых является регулярной областью.

На примере связанной фрактальной структуры (**I, III, II**) из трех цилиндрических элементов исследованы эффекты сжатия (вариант 3) и растяжения (вариант 2) исходного состояния (вариант 1) структуры (**III**). Показано, что эффекты сжатия и растяжения сопровождаются изменениями волнообразного поведения $\mathrm{Re}\,u$ и эффективного затухания $\mathrm{Im}\,u$.

Результаты могут быть использованы при описании нейронных сетей с переменными параметрами, в медицине при моделировании кровеносных сосудов, для квантовой обработки информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nielsen M. Quantum Computation and Quantum Information / M. Nielsen, I. Chuang. – Cambridge University Press, New York, 2010. – 698 p.
2. Boumeister D. Physics of Quantum Information / D. Boumeister, A. Eckert, A. Zeilinger. – Springer, New York, 2001. – 325 p.
3. Ozhigov Y. Quantum Computers Speed Up Classical with Probability Zero / Y. Ozhigov // Chaos Solitons and Fractals. – 1999. – No 10. – P. 1707-1714.
4. Castelvecchi D. Quantum computers ready to leap out of the lab / D. Castelvecchi // Nature. – 2017. – No 541. – P. 9-10.
5. Омельянчук А.Н. Квантовые когерентные явления в джозефсоновских кубитах / А.Н. Омельянчук, Е.В. Ильичев, С.Н. Шевченко. – К.: Наукова думка, 2013. – 168 с.
6. Федоров М.Н. Кутриты и кукварты в спонтанном параметрическом рассеянии света, корреляции и перепутывание состояний / М.Н. Федоров, И.А. Волков, Ю.М. Михайлова // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2012. – Т. 142, вып. 1(7). – С. 20–43.
7. Нелинейности в периодических структурах и метаматериалах / под ред. Ю.С. Кившаря и Н.Н. Розанова. – М.: Физматлит, 2014. – 384 с.
8. Tosi G. Sculpting oscillators with light within a nonlinear quantum fluid / G. Tosi, G. Christmann, N.G. Berloff et al. // Nature physics. – 2012. – V. 8. – N 3. – P. 190-194.
9. Fermionic transport and out-of-equilibrium dynamics in a homogeneous Hubbard model with ultracold atoms / U. Schneider, L. Hackermüller, J.Ph. Ronzheimer et al. // Nature physics. – 2012. – Vol. 8. – No 3. – P. 213-218.
10. Heyman K. The Map in the Brain: Grid Cells May Help Us Navigate / K. Heyman // Science. – 2006. – No 312. – P. 680-681.
11. Abramov V.S. Quantum Dots in a Fractal Multilayer System / V.S. Abramov // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2017. – No 81(5). – P. 625-632.
12. Abramov V.S. Active Nanoelements with Variable Parameters in Fractal Quantum Systems / V.S. Abramov // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2018. – No 82(8). – P. 1062-1067.
13. Abramova O.P. Attractors and Deformation Field in the Coupled Fractal Multilayer Nanosystem / O.P. Abramova, A.V. Abramov // CMSIM Journal. – 2017. – No 2. – P. 169-179.
14. Абрамова О.П. Взаимовлияние аттракторов и отдельных стохастических процессов в связанных фрактальных структурах / О.П. Абрамова // Вестник Донецк. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 1. – С. 50-60.

15. Spatial representation in the entorhinal cortex / M. Fyhn, S. Molden, M.P. Witter et al. // Science. – 2004. – Vol. 305. – P. 1258-1264.
16. Microstructure of spatial map in the entorhinal cortex / T. Hafting, M. Fyhn, S. Molden et al. // Nature. – 2005. – Vol. 436. – P. 801-806.
17. Conjunctive representation of position, direction, and velocity in the entorhinal cortex / F. Sargolini, M. Fyhn, T. Hafting et al. // Science. – 2006. – Vol. 312. – P. 758-762.
18. Абрамов В. С. Перестройка стохастического состояния поля деформации в модельной многослойной наносистеме / В.С. Абрамов // Вестник Донецк. ун-та. Сер. А. – 2014. – Вып. 2. – С. 81-89.
19. Абрамова О.П. Упорядочение операторов полей смещений отдельных квантовых точек, эллиптических цилиндров в связанных фрактальных структурах / О.П. Абрамова // Вестник Донецк. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 3-14.

Поступила в редакцию 13.03.2019 г.

COMPLEX ZERO OPERATORS IN COUPLED FRACTAL STRUCTURE WITH ELEMENTS OF CYLINDRICAL TYPE

O.P. Abramova

By the numerical modelling method the behavior of the deformation field of the coupled fractal structure with elements of cylindrical type was investigated. It is shown that the presence of variable parameters (semiaxes, modules) lead to the stochastic behavior of the complex deformation field. Complex zero displacement field operators for both separate and coupled elements of the structure are introduced. It is shown that the transposition of separate operators in the zero operator for a coupled structure leads to the appearance of a nonzero complex deformation field. At the same time, noise tracks appear on the background of stochastic peaks. The noise track is a stochastic ring, inside of which is a regular area. Using the example of a coupled fractal structure with three cylindrical elements, the effects of compression and stretching of the initial state of the structure are investigated.

Keywords: coupled fractal structures, complex deformation field, complex zero operators, ordering of operators, numerical modelling.

Абрамова Ольга Петровна
кандидат физико-математических наук, доцент;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
г. Донецк
ул. Университетская 24, Донецк, 83001
oabramova@ua.fm

Abramova Olga Petrovna
Candidate of Physics and Mathematical Sciences,
Docent;
Donetsk National University,
24 University st., Donetsk, 83001

УДК 531.38

НОВОЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА

© 2019. ***А.В. Зыза, Е.С. Платонова***

В работе исследуются условия существования частного решения полиномиального класса Стеклова-Ковалевского-Горячева дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Построено новое решение, которое описывается эллиптическими функциями времени.

***Ключевые слова*:** полиномиальное решение; первые интегралы; инвариантное соотношение; эффект Барнетта-Лондона; эллиптические функции времени.

Введение. Теоретическая механика в отличие от прикладной механики, которая создает методы расчетов движущихся конструкций, разрабатывает методы математического моделирования качественного поведения объектов современной техники. Для того, чтобы созданная математическая модель – система дифференциальных уравнений была доступна к анализу с помощью современных методов, в процессе постановки задачи принимают различные идеализации. Таким образом в теоретической механике были сформированы классические задачи и их обобщения: задачи о движении одного твердого тела и системы связанных твердых тел (типа гиростат) в различных силовых полях [1, 2]. Применение методов аналитической механики изучения динамики твердого тела позволило в практических задачах механики получить новые важные результаты и объяснить некоторые законы и эффекты (движение кельтского камня, гироскопический эффект, законов Кассини в небесной механике, эффект космонавта Джанибекова в движении тела на орбите и другие).

Одним из обобщений классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой [3, 4] является задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [5, 6]. Ее математической моделью является система шести дифференциальных уравнений, содержащая двадцать параметров, которая допускает только два первых интеграла [1, 7, 8]. Задача Коши для этих дифференциальных уравнений имеет решение, но получить конструктивное решение для всего множества параметров невозможно, так как при произвольных значениях параметров уравнения такого движения не интегрируемы в квадратурах [9]. Поэтому одним из направлений исследования интегрируемости уравнений движения задачи динамики твердого тела и гиростата с неподвижной точкой есть направление, связанное с построением отдельных случаев интегрируемости уравнений движения (В.А. Стеклов, Д.Н. Горячев, Н. Ковалевский, С.А. Чаплыгин, П.В. Харламов, А.И. Докшевич и др.) [1–4].

Среди частных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона отдельно выделяют решения различных полиномиальных классов, поскольку они являются обобщением полиномиальных решений классической задачи динамики твердого тела и задачи динамики тяжелого гиростата [10–14].

В данной статье продолжено исследование условий существования полиномиальных решений класса Стеклова – Ковалевского – Горячева задачи о

движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, начатое в работах [10–12]. Построено новое частное решение указанного полиномиального класса.

Постановка задачи. Рассмотрим движение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Эффект Барнетта-Лондона состоит в том, что первоначально не намагниченные и сверхпроводящие твердые тела при движении в магнитном поле намагничиваются вдоль оси вращения [5, 6]. Возникающая при вращении намагниченность линейно зависит от угловой скорости гиростата $\boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{\omega}\right)$, где B – симметричный тензор третьего порядка. Магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться по направлению вектора напряженности магнитного поля. При этом взаимодействие вызванной вращением тела намагниченности с внешним магнитным полем приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля [15].

Изучение движения тела под действием указанного магнитного момента имеет важное значение при определении предельной точности навигационных систем, использующих неконтактный подвес. Поэтому при математическом моделировании движения тела в магнитном поле следует учитывать магнитный момент, который возникает в результате эффекта Барнетта-Лондона. Это обстоятельство приводит к тому, что уравнения такого движения в отличии от уравнений Эйлера-Пуассона и Кирхгофа-Пуассона [1] не допускают интеграл энергии, так как имеет место диссипация энергии – переход энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращательного движения твердого тела. Поэтому для интегрирования уравнений движения недостаточно поглотить дополнительный первый интеграл.

Уравнение движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона и момента ньютоновских сил в векторной форме таковы:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}}=\left(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}\right)\times\boldsymbol{\omega}+B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\nu}\times\left(C\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{s}\right),\ \dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

Уравнения (1) допускают только два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1,\qquad \left(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}=k_0. \tag{2}$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$\left[\left(A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)-2\left(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)+\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\right]^{\bullet}=2\left(B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}\right)\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

В уравнениях (1)–(3) обозначено: $\boldsymbol{\omega}=\left(p,q,r\right)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu}=\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda}=\left(\lambda_1,0,0\right)$ – гиростатический момент; $s=\left(s_1,0,0\right)$ – вектор обобщённого центра масс; $A=\mathrm{diag}\left(A_1,A_2,A_3\right)$ – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; $B=\mathrm{diag}\left(B_1,B_2,B_3\right)$ – матрица характеризующая магнитный момент гиростата; $C=\mathrm{diag}\left(C_1,C_2,C_3\right)$ – приведённый тензор инерции, который характеризует ньютоновское притяжение гиростата неподвижным центром; k_0 – постоянная интеграла площадей.

Если для уравнения (1), (2) имеет место равенство $B=\hat{\alpha}E$ (E – единичная матрица, $\hat{\alpha}$ – параметр), то из формулы (3) вытекает интеграл энергии для уравнений

(1). Тогда рассматриваемая задача становится задачей о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, а её дифференциальные уравнения будут относиться к уравнениям класса Кирхгофа [16].

Следуя работам [10–12], поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (1) решений следующего вида:

$$q^2 = Q(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k, \quad r^2 = R(p) = \sum_{i=0}^{m} c_i p^i, \quad \nu_1 = \varphi(p) = \sum_{j=0}^{l} a_j p^j, \quad \nu_2 = q\psi(p),$$

$$\nu_3 = r æ(p), \quad \psi(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \quad \varphi(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad \psi(p) = g_1 p + g_0, \; æ(p) = f_0,$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_j, f_k – постоянные, подлежащие определению.

Подставим выражения (4) в скалярные уравнения, вытекающее из (1) и геометрический интеграл из (2):

$$\dot{p} = \Phi(p)\sqrt{Q(p)R(p)}, \Phi(p) = \left(\psi(p) - æ(p)\right)\left(\varphi'(p)\right)^{-1}; \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(p)\left(Q(p)\psi^2(p)\right)' = 2\psi(p)\left(pæ(p) - \varphi(p)\right), \\ &\Phi(p)\left(R(p)æ^2(p)\right)' = 2æ(p)\left(\varphi(p) - p\psi(p)\right); \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_1\Phi(p) = (C_3 - C_2)\psi(p)æ(p) + B_2 æ(p) - B_3\psi(p) + A_2 - A_3, \\ &A_2\Phi(p)Q'(p) = 2\left[(C_1 - C_3)æ(p)\varphi(p) - æ(p)(B_1 p + s_1) + B_3\varphi(p) - \lambda_1 + (A_3 - A_1)p\right], \\ &A_3\Phi(p)R'(p) = 2\left[(C_2 - C_1)\varphi(p)\psi(p) + \psi(p)(B_1 p + s_1) - B_2\varphi(p) + \lambda_1 + (A_1 - A_2)p\right]; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\varphi^2(p) - 1 + Q(p)\psi^2(p) + R(p)æ^2(p) = 0. \tag{8}$$

В уравнениях (5)–(7) штрихом обозначена производная по переменной p. После интегрирования уравнений (6), (7) зависимость $p = p(t)$ от времени устанавливается из кинематического уравнения (5).

В работах [10–12] при исследовании значений максимальных степеней полиномов из (4) не рассмотрены два варианта:

1. $n = m = l = 2, n_1 = 1, m_1 = 0$;
2. $n = 2, m = 1, l = 2, n_1 = 1, m_1 = 0$. (9)

Целью настоящей работы является изучение вариантов (9).

Новое частное решение. Рассмотрим первый вариант из (9). Для этого варианта полиномы исследуемого решения (4) таковы:

$$Q(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0, \quad R(p) = c_2 p^2 + c_1 p + c_0,$$
$$\varphi(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad \psi(p) = g_1 p + g_0, \quad æ(p) = f_0. \tag{10}$$

Подставим (10) в уравнения (6)–(8). Требование того, чтобы полученные соотношения были тождествами по p приводит к системе условий на параметры задачи и решения (4):

$$\alpha f_0 - B_3 = 0, \quad A_1 g_1 - 2a_2 d = 0, \quad A_1\left(g_0 - f_0\right) - a_1 d = 0, \quad 2b_1 g_1 d + A_1 a_2 = 0,$$
$$\left(3b_1 g_1 + 2b_2 g_0\right) d - 2A_1\left(f_0 - a_1\right) = 0, \quad (b_1 g_0 + 2g_1 b_0) d + 2A_1 a_0 = 0,$$
$$A_1\left(a_2 - g_1\right) = 0, \quad c_2 f_0 d - A_1\left(a_1 - g_0\right) = 0, \quad c_1 f_0 d - 2A_1 a_0 = 0,$$
$$\beta f_0 + B_3 = 0, \quad A_2 b_2 d - A_1\left(\left(B_3 + \beta f_0\right) a_1 - f_0 B_1 + A_3 - A_1\right) = 0,$$
$$A_2 b_1 d - 2A_1(\left(B_3 + \beta f_0\right) a_0 - f_0 s_1 - \lambda_1, \quad A_1\left(\alpha + \beta\right) g_1 a_2 = 0,$$
$$-\left(\alpha + \beta\right)(g_0 a_2 + g_1 a_1) - B_2 a_2 + g_1 B_1 = 0,$$
$$A_3 c_2 d - A_1\left(-\left(\alpha + \beta\right) g_0 a_1 + g_1 a_0\right) + B_1 g_0 + g_1 s_1 + A_1 - A_2 - B_2 a_1) = 0,$$
$$A_3 c_1 d - 2A_1\left(-\left(\alpha + \beta\right) g_0 a_0 + \lambda_1 + g_0 s_1 - B_2 a_0\right) = 0,$$
$$a_0^2 - 1 + b_0 g_0^2 + c_0 f_0^2 = 0. \tag{11}$$

Здесь

$$\alpha = C_3 - C_2, \quad \beta = C_1 - C_3, \quad d = \alpha g_0 f_0 + B_2 f_0 - B_3 g_0 + A_2 - A_3.$$

Последнее уравнение системы (11) получено из геометрического интеграла (8). Это соотношение при исследованиях необходимо учитывать в силу того, что постоянная интеграл (8) – фиксирована.

Система алгебраических уравнений (11) совместна относительно ненулевых параметров $A_2, A_3, B_2, B_3, s_1, g_1$. Запишем ее решения так:

$$A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2, \quad C_1 = C_2, \quad C_3 - C_2 = -\frac{2B_2 B_3}{A_2 - 2A_3}, \quad \lambda_1 = \frac{\left(A_2 - 2A_3\right)^2 s_1}{\left(A_2 - 4A_3\right) B_2}, \quad f_0 = \frac{2A_3 - A_2}{2B_2},$$
$$b_2 = -1, \quad b_1 = \frac{2\left(2A_3 - A_2\right) s_1}{\left(A_2 - 4A_3\right) B_2}, \quad b_0 = -\frac{\left(A_2 - 2A_3\right)^2 \left(A_2 + g_1 s_1\right) s_1}{\left(A_2 - 4A_3\right)^2 B_2^2 g_1}, \quad c_2 = \frac{4g_1 s_1}{4A_3 - A_2},$$
$$c_1 = \frac{8\left(2A_3 - A_2\right)\left(2A_3 + g_1 s_1\right) s_1}{\left(A_2 - 4A_3\right)^2 B_2}, \quad c_2 = \frac{4}{\left(A_2 - 2A_3\right)^2 (A_2 - 4A_3)^2 B_2^2 g_1} \times$$
$$\times\Big[\left(4A_3 - A_2\right)(A_2 - 2A_3)^4 s_1^3 g_1^2 + \left(\left(12A_3^2 - A_2^2\right)\left(A_2 - 2A_3\right)^4 s_1^2 + \left(A_2 - 4A_3\right)^4 B_2^4\right) g_1 +$$
$$+(A_2 - 2A_3)^4 \left(A_2 - 4A_3\right)^2 A_2 s_1\Big], \quad a_2 = g_1, \quad a_1 = \frac{\left(2A_3 - A_2\right)(A_2 - 4A_3 - 2g_1 s_1)}{\left(A_2 - 4A_3\right) B_2},$$
$$a_0 = \frac{\left(A_2 - 2A_3\right)^2 \left(2A_3 + g_1 s_1\right) s_1}{(A_2 - 4A_3)^2 B_2^2}, \quad g_0 = \frac{\left(2A_3 - A_2\right)(A_2 - 4A_3 - g_1 s_1)}{\left(A_2 - 4A_3\right) B_2}. \tag{12}$$

Зависимость p от времени находим из уравнения (5)

$$\dot{p} = \frac{1}{2}\sqrt{(b_2 p^2 + b_1 p + b_0)\left(c_2 p^2 c_1 p + c_0\right)}. \tag{13}$$

Приведем численный пример решения (4), (10), (12), (13) уравнений (1). Пусть

$$A_1 = A_2 = a, \quad A_3 = \frac{29}{20} a, \quad B_1 = B_2 = b, \quad B_3 = -2b, \quad C_1 = C_2, \quad C_3 - C_2 = -\frac{40b^2}{19a} \left(a > 0, b > 0\right),$$
$$s = \left(-\frac{5b^2}{a}, 0, 0\right), \quad \lambda = \left(\frac{361}{96} b, 0, 0\right), \quad q^2 = Q\left(p\right) = -p^2 + \frac{95b}{24a} p - \frac{1805b^2}{576a^2},$$

$$r^2 = R(p) = -\frac{25}{6}p^2 + \frac{665b}{96a}p - \frac{895521745b^2}{479084544a^2}\ , \quad \nu_1 = \varphi(p) = \frac{a^2}{b^2}p^2 - \frac{247a}{120b}p + \frac{2527}{1536}\ ,$$

$$\nu_2 = \left(\frac{a^2}{b^2}p - \frac{19a}{240b}\right)\sqrt{Q(p)}, \quad \nu_3 = \frac{19a}{20b}\sqrt{R(p)}. \qquad (14)$$

Зависимость $p = p(t)$ устанавливается из уравнения

$$\dot{p} = \frac{1}{2}\sqrt{Q(p)R(p)},$$

где

$$p \in \left(\frac{19\left(5-\sqrt{5}\right)b}{48a}; \frac{\left(90972+\sqrt{2902774314}\right)b}{109440a}\right). \qquad (15)$$

На указанно в (15) интервале по p функции $Q(p)$ и $R(p)$ принимают положительные значения.

Приведенный пример (14), (15) характеризуется двумя положительными свободными параметрами a и b. Зависимость всех переменных задачи от времени находим подстановкой $p = p(t)$ в равенства (14).

Случай $\boldsymbol{n} = 2, \boldsymbol{m} = 1, \boldsymbol{l} = 2, \boldsymbol{n}_1 = 1, \boldsymbol{m}_1 = 0.$. Перейдём к рассмотрению второго варианта из (9). Для его исследования воспользуемся полиномами из (10) и системой алгебраических уравнений (11), положив $c_2 = 0$. Предварительный анализ системы (11) приводит к соотношениям.

$$A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2, \quad C_1 = C_2, \quad s_1 = 0, \quad \lambda_1 = 0.$$

Это означает, что рассматриваемый вариант является частным случаем решения В.А. Самсонова [7].

Выводы. В работе изучены условия существования одного полиномиального класса частных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. В результате исследования построено новое решение, которое зависит от шести независимых параметров задачи и решения и описывается эллиптическими функциями времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющею неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
2. Горр Г.В. Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
3. Харламов П.В. Лекции по динамике твёрдого тела / П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
4. Гашененко И.Н. Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 402 с.
5. Barnett S.I. Gyromagnetic and Electron – Inertia Effects / S.I. Barnett // Rev. Modern. Phys. – 1935. – Vol. 7(2). – P. 129-166.
6. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. – М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.
7. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле / В.А. Самсонов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32-34.
8. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле / В.В. Козлов // Изв. РАН Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28-33.

9. Борисов А.В. Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
10. Миронова Е.М. О решении уравнений движения тела в магнитном поле на основе полиномиальных решений / Е.М. Миронова // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37, вып.2. – С. 105-113.
11. Зыза А.В. О полиномиальных решениях уравнений движения гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 61-70.
12. Зыза А.В. Один случай полиномиальных решений дифференциальных уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона / А.В. Зыза, К.С. Бородкина // Вісник Донецького націального університету. Сер.А.: Природничі науки. – 2012. – Вип.1. – С. 64-67.
13. Зыза А.В. Новые случаи интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А.: Естеств. науки. – 2017. – № 4. – С. 23-40.
14. Зыза А.В. Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата / А.В. Зыза // Компьютерное исследование и моделирование. – 2018. – Т. 10, № 1. – С. 7-25.
15. Урман Ю.Н. Динамические эффекты обусловленные вращательными движениями сверхпроводника в магнитном подвесе / Ю.Н. Урман // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 6. – С. 1402-1404.
16. Харламов П.В. О различных представлениях уравнений Кирхгофа / П.В. Харламов, Г.В. Мозалевская, М.Е. Лесина // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3-17.

Поступила в редакцию 02.04.2019 г.

NEW CASES OF INTEGRABILITY OF GYROSTAT MOTION EQUATIONS IN MAGNETIC FIELD

A.V. Zyza, E.S. Platonova

We study a class of polinomial solutions for gyroststt motion equations in magnetic fields, taking into account the Barnett-London effect. The existence of conditions for this class are obtained in the form of a system of algebraic equations involving problem and solution parameters. We constructed four new solutions of this problem that can be described by alliptic and hyper-elliptic functions of time.

Keywords*:* polynomial solutions, first integrals, gyrostat, invariant relation, Barnett-London effect, elleptic functions of time.

Зыза Александр Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент; ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики.
E-mail: z9125494@mail.ru

ZyzaAlexanderVasilievich
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent;
Donetsk National University (Donetsk), Associate Professor at the Department of higher mathematics andmathematics teaching techniques

Платонова Елена Сергеевна
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), старший преподаватель кафедры прикладной математики и теории систем управления.
E-mail: elenasergeevna9@mail.ru

PlatonovaElenaSergeevna
Donetsk National University (Donetsk); Senior Lecturer, Department of applied mathematics and control systems theory

УДК 539.3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОНКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ПЛИТ

© 2019. ***С. А. Калоеров***

Прикладная теория изгиба тонких плит Кирхгоффа распространена на случай плит из пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов. При этом к гипотезам Кирхгоффа добавлены условия на индукции электрического и магнитного полей, система дифференциальных уравнений равновесия дополнена уравнениями вынужденной электростатики, сформулированы граничные условия решения полной системы, вместо уравнений закона Гука приняты общие уравнения электромагнитоупругого состояния. Решение проблемы приведено сначала к системе трех дифференциальных уравнений в частных производных для определения функций прогиба, плотностей потенциалов, электрического и магнитного полей по толщине плиты. Получены граничные условия для определения функций.

Ключевые слова: прикладная теория изгиба тонких плит, пьезоматериал, краевые задачи, отверстия и трещины.

В различных областях современной науки и техники широкое распространение в качестве элементов конструкций получили тонкие пластинки с отверстиями и включениями, находящиеся в условиях поперечного изгиба. В процессе эксплуатации таких конструкций около отверстий и включений, которые в частном случае могут переходить в трещины и линейные включения, возникают большие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации таких конструкций. В связи с этим необходимо иметь методы решения таких задач и решения важных классов задач инженерной практики. Но, несмотря на большую практическую потребность изучения напряженно-деформированного состояния многосвязных пластин, находящихся в условиях изгиба, до сих пор исследований в этом направлении выполнено недостаточно.

Хотя проблемой определения напряженно-деформированного состояния тонких плит уже с середины XVIII века занимались многие известные ученые, но наиболее приемлемое решение было дано лишь в середине в 1850 г. Кирхгоффом [1, 2], предложившим свою прикладную теорию тонких плит. В то же время были разработаны методы решения задач в работах Геринга [3] и Буссенеска [4], а несколько позже Губером [5–7] предложены другие приближенные теории изгиба. Но фундаментальные результаты с привлечением функций комплексного переменного были получены лишь в 30-е годы XX века Лехницким С. Г. [8, 9]. Для многосвязных плит некоторые подходы решения задач получены в работах Космодамианского А. С., Иванова Г. М. [10], Меглинского В. В. [11]. Однако комплексные потенциалы даже для изотропных плит не были исследованы в полной мере, что не позволило построить решения многих классов задач. В наших работах [12–14] были получены общие представления комплексных потенциалов для произвольных однородных и кусочно-однородных многосвязных изотропных и анизотропных плит при их произвольном их нагружении, решен ряд важных задач упругого и вязкоупругого их состояния.

В то же время современные тонкие плиты порой изготавливаются из материалов, обладающих пьезоэффектом. Но теория тонких плит с учетом пьезоэффекта материалов до настоящего времени не построена. Широкие исследования проведены лишь для случая тонких пьезоэлектромагнитных пластин, находящихся в обобщенном плоском

напряженном состоянии [15, 16], что может быть использовано при построении прикладной теории изгиба плит.

В данной статье прикладная теория изгиба тонких плит Кирхгоффа распространена на случай плит из пьезоматериалов с дополнением гипотез Кирхгоффа условиями на индукции электрического и магнитного полей. Получена система трех дифференциальных уравнений в частных производных для определения функции прогиба плиты и плотностей потенциалов электрического и магнитного полей по толщине плиты, найдены граничные условия для определения функций, что позволит в дальнейшем вводить комплексные потенциалы электромагнитоупругого изгиба плит и решать различные классы задач.

1. Гипотезы прикладной теории изгиба тонких пьезоэлектрических плит. Под действием внешних сил и электромагнитных воздействий в пьезоэлектрических телах возникают напряжения, деформации и электромагнитные поля. Если тело обладает прямолинейной анизотропией и деформации в нем малы, то возникающие в теле напряжения и деформации удовлетворяют основной системе уравнений трехмерной теории упругости, состоящей из уравнений равновесия [17]

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0; \tag{1.1}$$

уравнений вынужденной электромагнитостатики [18–20]

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=0; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial x}=0; \tag{1.3}$$

уравнений электромагнитоупругого состояния [21, 22]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x+s_{12}\sigma_y+s_{13}\sigma_z+s_{14}\tau_{yz}+s_{15}\tau_{xz}+s_{16}\tau_{xy}+\\
&+g_{11}D_x+g_{21}D_y+g_{31}D_z+p_{11}B_x+p_{21}B_y+p_{31}B_z,\\
\varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x+s_{22}\sigma_y+s_{23}\sigma_z+s_{24}\tau_{yz}+s_{25}\tau_{xz}+s_{26}\tau_{xy}+\\
&+g_{12}D_x+g_{22}D_y+g_{32}D_z+p_{12}B_x+p_{22}B_y+p_{32}B_z,\\
\varepsilon_z &= s_{13}\sigma_x+s_{23}\sigma_y+s_{33}\sigma_z+s_{34}\tau_{yz}+s_{35}\tau_{xz}+s_{36}\tau_{xy}+\\
&+g_{13}D_x+g_{23}D_y+g_{33}D_z+p_{13}B_x+p_{23}B_y+p_{33}B_z,\\
\gamma_{yz} &= s_{14}\sigma_x+s_{24}\sigma_y+s_{34}\sigma_z+s_{44}\tau_{yz}+s_{45}\tau_{xz}+s_{46}\tau_{xy}+\\
&+g_{14}D_x+g_{24}D_y+g_{34}D_z+p_{14}B_x+p_{24}B_y+p_{34}B_z,\\
\gamma_{xz} &= s_{15}\sigma_x+s_{25}\sigma_y+s_{35}\sigma_z+s_{45}\tau_{yz}+s_{55}\tau_{xz}+s_{56}\tau_{xy}+\\
&+g_{15}D_x+g_{25}D_y+g_{35}D_z+p_{15}B_x+p_{25}B_y+p_{35}B_z,\\
\gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x+s_{26}\sigma_y+s_{36}\sigma_z+s_{46}\tau_{yz}+s_{56}\tau_{xz}+s_{66}\tau_{xy}+\\
&+g_{16}D_x+g_{26}D_y+g_{36}D_z+p_{16}B_x+p_{26}B_y+p_{36}B_z,\\
E_x &= -g_{11}\sigma_x-g_{12}\sigma_y-g_{13}\sigma_z-g_{14}\tau_{yz}-g_{15}\tau_{xz}-g_{16}\tau_{xy}+\\
&+\beta_{11}D_x+\beta_{12}D_y+\beta_{13}D_z+\nu_{11}B_x+\nu_{12}B_y+\nu_{13}B_z,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{23}\sigma_z - g_{24}\tau_{yz} - g_{25}\tau_{xz} - g_{26}\tau_{xy} + \\
&\quad +\beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y + \beta_{23}D_z + \nu_{12}B_x + \nu_{22}B_y + \nu_{23}B_z, \\
E_z &= -g_{31}\sigma_x - g_{32}\sigma_y - g_{33}\sigma_z - g_{34}\tau_{yz} - g_{35}\tau_{xz} - g_{36}\tau_{xy} + \\
&\quad +\beta_{13}D_x + \beta_{23}D_y + \beta_{33}D_z + \nu_{13}B_x + \nu_{23}B_y + \nu_{33}B_z \\
H_x &= -p_{11}\sigma_x - p_{12}\sigma_y - p_{13}\sigma_z - p_{14}\tau_{yz} - p_{15}\tau_{xz} - p_{16}\tau_{xy} + \\
&\quad +\nu_{11}D_x + \nu_{12}D_y + \nu_{13}D_z + \chi_{11}B_x + \chi_{12}B_y + \chi_{13}B_z, \\
H_y &= -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{23}\sigma_z - p_{24}\tau_{yz} - p_{25}\tau_{xz} - p_{26}\tau_{xy} + \\
&\quad +\nu_{12}D_x + \nu_{22}D_y + \nu_{23}D_z + \chi_{12}B_x + \chi_{22}B_y + \chi_{23}B_z, \\
H_z &= -p_{31}\sigma_x - p_{32}\sigma_y - p_{33}\sigma_z - p_{34}\tau_{yz} - p_{35}\tau_{xz} - p_{36}\tau_{xy} + \\
&\quad +\nu_{13}D_x + \nu_{23}D_y + \nu_{33}D_z + \chi_{13}B_x + \chi_{23}B_y + \chi_{33}B_z;
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

соотношений Коши для малых деформаций и потенциальности электрического и магнитного полей

$$
\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},
$$

$$
E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad H_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{1.5}
$$

Здесь s_{ij} – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей, g_{ij} и p_{ij},– пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях, β_{ij}, ν_{ij}, χ_{ij} – соответственно коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях φ, и ψ – потенциалы электрического и магнитного полей.

Систему уравнений (1.1)–(1.5) нужно интегрировать при заданных на границе условиях. В частности, если на границе заданы внешние усилия X_n, Y_n, Z_n и индукции D_n, B_n, то краевые условия имеют вид

$$
\begin{gathered}
\sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy}\cos(ny) + \tau_{xz}\cos(nz) = X_n, \quad \tau_{xy}\cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{yz}\cos(nz) = Y_n, \\
\tau_{xz}\cos(nx) + \tau_{yz}\cos(ny) + \sigma_z \cos(nz) = Z_n, \quad D_x \cos(nx) + D_y \cos(ny) + D_z \cos(nz) = D_n, \\
B_x \cos(nx) + B_y \cos(ny) + B_z \cos(nz) = B_n.
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

Аналогичные условия имеют место в других случаях.

Кроме соотношений (1.1)–(1.5), должны выполняться уравнения совместности Сен-Венана [17]

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x},
$$

$$
\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z},
$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right]=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}. \qquad (1.7)$$

Решив систему (1.1)–(1.5), найдём напряжения, деформации, перемещения, индукции и напряжённости электрического и магнитного полей в любой точке тела.

Рассмотрим тонкую пластинку постоянной толщины $2h$ из пьезоматериала, отнесенную к прямоугольной системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой совместим со срединной плоскостью (рис. 1.1). Обозначим занимаемую срединной плоскостью пластинки область через S. Пластинка под действием внешних сил и электромагнитных воздействий, приложенных к боковой поверхности, нормальных усилий $\sigma_z = q(x, y)$, распределенных по верхнему основанию, изгибается так, что срединная плоскость искривляется. Такую пластинку принято называть тонкой плитой. Будем предполагать, что имеют место условия Кирхгоффа [1, 2]:

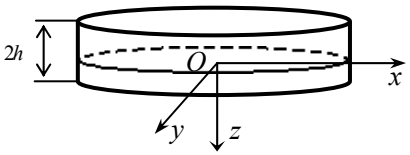


Рис. 1.1

1. В каждой точке плиты имеется плоскость материальной симметрии, параллельная срединной плоскости.

2. Прямолинейные отрезки, нормальные к срединной плоскости до деформации, при изгибе плиты остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой срединной поверхности и не меняют своей длины.

3. Срединная поверхность плиты является нерастяжимой, т. е. при $z = 0$ перемещения u и v равны нулю.

4. Влияние взаимодействия продольных слоев плиты на удлинения и сдвиги материальных волокон, лежащих в этих слоях, малы и ими можно пренебречь, в связи с чем напряжениями σ_z и компонентами индукций D_z, B_z по сравнению с другими величинами можно пренебречь.

Кроме того, имеют место гипотезы на электромагнитные действия, а именно: продольные слои не передают друг другу индукции, т. е. потоки индукции $D_z = B_z = 0$ и основания пластинки свободны от действий индукций.

В силу условий загружения оснований плиты имеем

$$\sigma_z = -q(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = D_z = B_z = 0 \text{ при } z = -h,$$
$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = D_z = B_z = 0 \text{ при } z = h. \qquad (1.8)$$

Для точек срединной плоскости $z = 0$, поэтому перемещения u, v, w этих точек не зависят от z, причем на основе третьей гипотезы для этих точек $u = v = 0$, а перемещение w (прогиб), хотя и не зависит от z, является функцией от x и y: $w = w(x, y)$. Что же касается перемещений u, v для точек, не лежащих на срединной плоскости, то их можно выразить через координату z и производные w по x и y.

Зафиксируем в плите до деформации нормальный к срединной плоскости произвольный отрезок AB и рассмотрим перемещение при изгибе произвольной точки $C(x, y, z)$ на этом отрезке (рис. 1.2). Используя принятые гипотезы 1 и 2 и учитывая малость прогиба w, перемещение отрезка AB можно представить в виде суммы следующих независимых перемещений: поступательного по вертикали на величину $w(x, y)$ (при этом точка $F(x, y, 0)$ срединной плоскости займет положение $F_1(x, y, w)$), жесткого по-

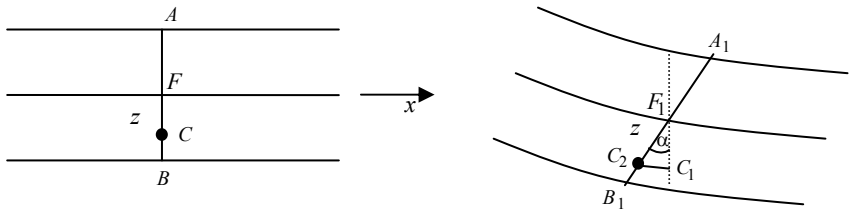


Рис. 1.2

ворота отрезка АВ как целого на угол α около оси Oy с центром поворота в точке F_1 и жесткого поворота отрезка АВ как целого на угол β около оси Ox с центром поворота в точке F_1. В результате первого перемещения точка C займет положение C_1. При этом $u_1 = v_1 = 0$, $w_1 = w$. При следующем перемещении точка C_1 перейдет в положение C_2. Из прямоугольного треугольника $F_1C_1C_2$ имеем $u_2 = -z\sin\alpha$. Так как угол поворота α мал, то $\sin\alpha \approx \alpha \approx tg\alpha$. Но из первой гипотезы Кирхгоффа следует, что угол α равен углу поворота около оси Oy плоскости, касательной к срединной поверхности, поэтому $\mathrm{tg}\,\alpha = \partial w / \partial x$. Следовательно, $u_2 = -z\,\partial w/\partial x$, $v_2 = w_2 = 0$. При третьем перемещении точки F будем иметь $v_3 = -z\,\partial w/\partial y$, $u_3 = 0$, $w_3 = 0$.

Следовательно, кроме перемещения w по оси Oz, точка плиты получает такие перемещения по осям Ox, Oy:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1.9}$$

Учитывая эти выражения и независимость прогиба w и его производных по x и y от координаты z, для точек срединной плоскости $(z = 0)$ имеем

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \tag{1.10}$$

а для остальных деформаций находим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{1.11}$$

Из равенств (1.10), (1.11) следует, что уравнения совместности Сен-Венана (1.7) удовлетворяются тождественно.

По аналогии с перемещениями u и v потенциалы электрического и магнитного полей выберем линейными функциями от z:

$$\varphi(x, y) = z\,\varphi_0(x, y), \quad \psi(x, y) = z\,\psi_0(x, y), \tag{1.12}$$

где $\varphi_0(x, y)$, $\psi_0(x, y)$ – функции, называемые в дальнейшем плотностями потенциалов электрического и магнитного полей по толщине плиты. Тогда для напряженностей будем иметь

$$E_x = -z\frac{\partial \varphi_0(x, y)}{\partial x}, \quad E_y = -z\frac{\partial \varphi_0(x, y)}{\partial y}, \quad E_z = -\varphi_0(x, y),$$

$$H_x = -z\frac{\partial \psi_0(x, y)}{\partial x}, \quad H_y = -z\frac{\partial \psi_0(x, y)}{\partial y}, \quad H_z = -\psi_0(x, y). \tag{1.13}$$

В силу наличия плоскости материальной симметрии плиты [16]

$$s_{14}=s_{15}=s_{24}=s_{25}=s_{34}=s_{35}=s_{46}=s_{56}=0,$$
$$g_{14}=g_{15}=g_{24}=g_{25}=g_{31}=g_{32}=g_{33}=g_{36}=0,$$
$$p_{14}=p_{15}=p_{24}=p_{25}=p_{31}=p_{32}=p_{33}=p_{36}=0,$$
$$\beta_{13}=\beta_{23}=\nu_{13}=\nu_{23}=\chi_{13}=\chi_{23}=0.$$

Поэтому оставляемые из системы (1.4) уравнений состояния 1, 2, 6, 7, 8, 10, 11 примут вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y + p_{11}B_x + p_{21}B_y,\\
\varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y + p_{12}B_x + p_{22}B_y,\\
\gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + p_{16}B_x + p_{26}B_y,\\
E_x &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y + \nu_{11}B_x + \nu_{12}B_y,\\
E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y + \nu_{12}B_x + \nu_{22}B_y,\\
H_x &= -p_{11}\sigma_x - p_{12}\sigma_y - p_{16}\tau_{xy} + \nu_{11}D_x + \nu_{12}D_y + \chi_{11}B_x + \chi_{12}B_y,\\
H_y &= -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{26}\tau_{xy} + \nu_{12}D_x + \nu_{22}D_y + \chi_{12}B_x + \chi_{22}B_y.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Разрешив систему (1.14) относительно напряжений и индукций, получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= b_{11}\varepsilon_x + b_{12}\varepsilon_y + b_{16}\gamma_{xy} + c_{g11}E_x + c_{g21}E_y + c_{p11}H_x + c_{p21}H_y,\\
\sigma_y &= b_{12}\varepsilon_x + b_{22}\varepsilon_y + b_{26}\gamma_{xy} + c_{g12}E_x + c_{g22}E_y + c_{p12}H_x + c_{p22}H_y,\\
\tau_{xy} &= b_{16}\varepsilon_x + b_{26}\varepsilon_y + b_{66}\gamma_{xy} + c_{g16}E_x + c_{g26}E_y + c_{p16}H_x + c_{p26}H_y,\\
D_x &= -c_{g11}\varepsilon_x - c_{g12}\varepsilon_y - c_{g16}\gamma_{xy} + d_{g11}E_x + d_{g12}E_y + d_{p11}H_x + d_{p12}H_y,\\
D_y &= -c_{g21}\varepsilon_x - c_{g22}\varepsilon_y - c_{g26}\gamma_{xy} + d_{g12}E_x + d_{g22}E_y + d_{p12}H_x + d_{p22}H_y,\\
B_x &= -c_{p11}\varepsilon_x - c_{p12}\varepsilon_y - c_{p16}\gamma_{xy} + d_{p11}E_x + d_{p12}E_y + e_{p11}H_x + e_{p12}H_y,\\
B_y &= -c_{p21}\varepsilon_x - c_{p22}\varepsilon_y - c_{p26}\gamma_{xy} + d_{p12}E_x + d_{p22}E_y + e_{p12}H_x + e_{p22}H_y,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где коэффициенты связи получаются как элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21}\\
b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22}\\
b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26}\\
-c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & d_{g11} & d_{g12} & d_{p11} & d_{p12}\\
-c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & d_{g12} & d_{g22} & d_{p12} & c_{p22}\\
-c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & d_{p11} & d_{p12} & e_{p11} & e_{p12}\\
-c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & d_{p12} & d_{p22} & e_{p12} & e_{p22}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21}\\
s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22}\\
s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26}\\
-g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12}\\
-g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22}\\
-p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12}\\
-p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22}
\end{pmatrix}^{-1} \tag{1.16}$$

Подставив выражения (1.11) и (1.13) в формулы (1.15), получим

$$\sigma_x = -z\tilde{\sigma}_x,\quad \sigma_y = -z\tilde{\sigma}_y,\quad \tau_{xy} = -z\tilde{\tau}_{xy},\quad D_x = -z\tilde{D}_x,$$
$$D_y = -z\tilde{D}_y,\quad B_x = -z\tilde{B}_x,\quad B_y = -z\tilde{B}_y, \tag{1.17}$$

где

$$\tilde{\sigma}_x = b_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{g11}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{g21}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - c_{p11}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{p21}\frac{\partial \psi_0}{\partial x},$$

$$\tilde{\sigma}_y = b_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{g12}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{g22}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - c_{p12}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{p22}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{\tau}_{xy} = b_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{g16}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{g26}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - c_{p16}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{p26}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{D}_x = -c_{g11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{g16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{g12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - d_{g11}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - d_{g12}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - d_{p11}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - d_{p12}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{D}_y = -c_{g21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{g26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{g22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - d_{g12}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - d_{g22}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - d_{p12}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - d_{p22}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{B}_x = -c_{p11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{p16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{p12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - d_{p11}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - d_{p12}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - e_{p11}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - e_{p12}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{B}_y = -c_{p21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{p26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{p22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - d_{p12}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - d_{p22}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - e_{p12}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - e_{p22}\frac{\partial \psi_0}{\partial y}. \quad (1.18)$$

Из формул (1.9), (1.11), (1.17) следует, что перемещения u, v, деформации ε_x, ε_y, γ_{xy} и индукции линейно зависят от координаты z. Они равны нулю в точках срединной поверхности и принимают максимальные (по модулю) значения на ее основаниях.

Учитывая выражения (1.17), из первых двух уравнений (1.1) найдем

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = z\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = z\left(\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y}\right).$$

Проинтегрировав эти равенства по z, получим

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2}z^2\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y}\right) + A_1(x,y), \quad \tau_{yz} = \frac{1}{2}z^2\left(\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y}\right) + A_2(x,y). \quad (1.19)$$

Учитывая, что напряжения (1.19) на основаниях плиты должны удовлетворять условиям (1.8), для функций $A_1(x,y)$ и $A_2(x,y)$ найдем выражения

$$A_1(x,y) = -\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y}\right), \quad A_2(x,y) = -\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y}\right).$$

Тогда из формул (1.19) с учетом (1.18) получим равенства

$$\tau_{xz} = \frac{z^2 - h^2}{2}\left[b_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3b_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \left(b_{12} + 2b_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + b_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - c_{g11}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \right.$$
$$\left. -\left(c_{g21} + c_{g16}\right)\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - c_{g26}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - c_{p11}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \left(c_{p21} + c_{p16}\right)\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - c_{p26}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2}\right],$$

$$\tau_{yz} = \frac{z^2 - h^2}{2}\left[b_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(b_{12} + 2b_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3b_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + b_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - c_{g16}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \right.$$

$$-\left(c_{g12}+c_{g26}\right)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y}-c_{g22}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}-c_{p16}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}-\left(c_{p12}+c_{p26}\right)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial y}-c_{p22}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\Bigg], \quad (1.20)$$

из которых видно, что напряжения τ_{xz}, τ_{yz} по толщине плиты изменяются по закону квадратичной параболы, принимая наибольшие значения в точках ее срединной поверхности и обращаясь в нуль на основаниях плиты.

Проинтегрировав по толщине плиты выражения (1.18) и (1.20), для силовых и индукционных моментов, создаваемых напряжениями σ_x, σ_y, τ_{xy} и индукциями D_x, D_y, B_x, B_y, поперечных сил, создаваемых касательными напряжениями τ_{xz}, τ_{yz}, а также получим

$$\mathrm{M}_x=\int_{-h}^{h} z\sigma_x dz,\ \mathrm{M}_y=\int_{-h}^{h} z\sigma_y dz,\ \mathrm{H}_{xy}=\int_{-h}^{h} z\tau_{xy} dz,\ \mathrm{N}_x=\int_{-h}^{h} \tau_{xz} dz,\ \mathrm{N}_y=\int_{-h}^{h} \tau_{yz} dz. \quad (1.21)$$

Аналогичным образом введем «моменты потенциалов и индукций»

$$\mathrm{M}_\varphi=\int_{-h}^{h} z\varphi dz,\quad \mathrm{M}_\psi=\int_{-h}^{h} z\psi dz,\quad \mathrm{M}_{dx}=\int_{-h}^{h} zD_x dz,$$

$$\mathrm{M}_{dy}=\int_{-h}^{h} zD_y dz,\quad M_{bx}=\int_{-h}^{h} zB_x dz,\quad M_{by}=\int_{-h}^{h} zB_y dz. \quad (1.22)$$

Подставив в равенства (1.12), (1.21) и (1.22) выражения (1.18) и проинтегрировав по толщине плиты, для моментов напряжений и индукций, а также перерезывающих сил найдем выражения

$$M_x=\int_{-h}^{h} z\sigma_x dz=\frac{2}{3}h^3\tilde{\sigma}_x=-\Bigg(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-$$
$$-C_{g11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-C_{g21}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-C_{p11}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}-C_{p21}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\Bigg),$$

$$M_y=-\Bigg(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-$$
$$-C_{g12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-C_{g22}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-C_{p12}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}-C_{p22}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\Bigg)$$

$$H_{xy}=-\Bigg(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-$$
$$-C_{g16}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-C_{g26}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-C_{p16}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}-C_{p26}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\Bigg); \quad (1.23)$$

$$N_x=-\Bigg[D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+3D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-$$

$$-C_{g11}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}-\left(C_{g21}+C_{g16}\right)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y}-C_{g26}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}-$$

$$-C_{p11}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}-\left(C_{p21}+C_{p16}\right)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial y}-C_{p26}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\Bigg],$$

$$N_y=-\Bigg[D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-$$

$$-C_{g16}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}-\left(C_{g12}+C_{g26}\right)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y}-C_{g22}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}-$$

$$-C_{p16}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}-\left(C_{p12}+C_{p26}\right)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial y}-C_{p22}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\Bigg]; \qquad (1.24)$$

$$\mathrm{M}_\varphi=D_0\varphi_0,\quad \mathrm{M}_\psi=D_0\psi_0,$$

$$M_{dx}=C_{g11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2C_{g16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+C_{g12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$

$$D_{g11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+D_{g12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}+D_{p11}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+D_{p`12}\frac{\partial\psi_0}{\partial y},$$

$$M_{dy}=C_{g21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2C_{g26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+C_{g22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$

$$+D_{g12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+D_{g22}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}+D_{p12}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+D_{p22}\frac{\partial\psi_0}{\partial y},$$

$$M_{bx}=C_{p11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2C_{p16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+C_{p12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+,$$

$$+D_{p11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+D_{p12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}+E_{p11}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+E_{p12}\frac{\partial\psi_0}{\partial y},$$

$$M_{by}=C_{p21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2C_{p26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+C_{p22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$

$$+D_{p12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+D_{p22}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}+E_{p12}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+E_{p22}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}, \qquad (1.25)$$

где $D_{ij}=b_{ij}D_0$ – упругие жесткости плиты; $C_{gij}=c_{gij}D_0$, $C_{pij}=c_{pij}D_0$, $D_{gij}=d_{gij}D_0$, $E_{pij}=e_{pij}D_0$ – электромагнитные жесткости плиты; $D_0=\frac{2}{3}h^3$ – постоянная, зависящая от толщины плиты.

Сравнивая соотношения (1.17), (1.23), (1.24) и (1.25), найдем выражения напряжений и индукций через моменты и перерезывающие силы:

$$\sigma_x=\frac{3\mathrm{M}_x}{2h^3}z,\quad \sigma_y=\frac{3\mathrm{M}_y}{2h^3}z,\quad \tau_{xy}=\frac{3\mathrm{H}_{xy}}{2h^3}z,$$

$$\tau_{xz} = \frac{3\mathrm{N}_x}{4h^3}\left(h^2 - z^2\right), \quad \tau_{yz} = \frac{3\mathrm{N}_y}{4h^3}\left(h^2 - z^2\right),$$

$$D_x = \frac{3\mathrm{M}_{dx}}{2h^3}z, \quad D_y = \frac{3M_{dy}}{2h^3}z, \quad B_x = \frac{3\mathrm{M}_{bx}}{2h^3}z, \quad B_y = \frac{3\mathrm{M}_{by}}{2h^3}z. \tag{1.26}$$

Для напряжений и индукций на произвольных площадках с нормалью n и касательной s имеют место формулы [16, 17]

$$\begin{aligned}
&\sigma_n = \sigma_x \cos^2 nx + \sigma_y \cos^2 ny + 2\tau_{xy} \cos nx \cos ny,\\
&\tau_{ns} = \left(\sigma_y - \sigma_x\right)\cos nx \cos ny + \tau_{xy}\left(\cos^2 nx - \cos^2 ny\right),\\
&\tau_{nz} = \tau_{xz} \cos nx + \tau_{yz} \cos ny,\\
&D_n = D_x \cos nx + D_y \cos ny,\\
&B_n = B_x \cos nx + B_y \cos ny,
\end{aligned} \tag{1.27}$$

на основании которых введем изгибающие силовые и индукционные моменты, крутящий силовой момент и перерезывающую силу на площадке с нормалью n

$$\mathrm{M}_n = \int_{-h}^{h} z\sigma_n dz, \quad \mathrm{H}_{ns} = \int_{-h}^{h} z\tau_{ns} dz, \quad \mathrm{N}_n = \int_{-h}^{h} \tau_{nz} dz,$$

$$\mathrm{M}_{dn} = \int_{-h}^{h} zD_n dz, \quad \mathrm{M}_{bn} = \int_{-h}^{h} zB_n dz, \tag{1.28}$$

и для них на основании выражений (1.27), (1.28) найдем

$$\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_x \cos^2 nx + \mathrm{M}_y \cos^2 ny + 2\mathrm{H}_{xy} \cos nx \cos ny,$$

$$H_{ns} = \left(M_y - M_x\right)\cos nx \cos ny + H_{xy}\left(\cos^2 nx - \cos^2 ny\right); \tag{1.29}$$

$$\mathrm{N}_n = \mathrm{N}_x \cos nx + \mathrm{N}_y \cos ny; \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{dn} = \mathrm{M}_{dx} \cos nx + \mathrm{M}_{dy} \cos ny,\\
&\mathrm{M}_{bn} = \mathrm{M}_{bx} \cos nx + \mathrm{M}_{by} \cos ny.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Таким образом, если известны функции прогиба w, плотности потенциалов электрического поля φ_0 и магнитного поля ψ_0 по толщине плиты, то можно в любой точке плиты потенциалы (1.12), моменты напряжений (1.23), перерезывающие силы (1.24), моменты индукций (1.25) на основных площадках, а по ним и моменты (1.29), (1.31) и перерезывающие силы (1.30) на любых площадках с нормалью n. По известным моментам и перерезывающим силам можно по формулам (1.26) найти напряжения и индукции в любой точке плиты.

2. Краевая задача для определения функций прогиба и плотностей потенциалов электрического и магнитного полей по толщине плиты. В процессе преобразований в предыдущем пункте были использованы первые два уравнения системы уравнений равновесия (1.1). Оставшееся третье уравнение этой системы, а также уравнения (1.2) запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right], \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = -\left[\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y}\right], \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\left[\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right]. \tag{2.1}$$

Используя зависимости (1.26), эти равенства запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=\frac{3}{4h^3}\left(z^2-h^2\right)\Phi(x,y),\quad \frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{3}{2h^3}z\mathrm{X}(x,y),\quad \frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{3}{2h^3}zQ(x,y),\qquad (2.2)$$

где

$$\Phi(x,y)=\frac{\partial \mathrm{N}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{N}_y}{\partial y},\quad \mathrm{X}(x,y)=\frac{\partial M_{dx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{dy}}{\partial y}.\quad Q(x,y)=\frac{\partial M_{bx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{by}}{\partial y}.\qquad (2.3)$$

Проинтегрировав соотношения (2.2) по переменной z, получим

$$\sigma_z=\frac{3}{4h^3}\left[\frac{z^3}{3}-h^2z\right]\Phi(x,y)+\mathrm{A}_1(x,y),\quad D_z=\frac{3}{4h^3}\left[\frac{z^3}{3}-h^2z\right]X(x,y)+\mathrm{A}_2(x,y),$$

$$B_z=\frac{3}{4h^3}\left[\frac{z^3}{3}-h^2z\right]Q(x,y)+\mathrm{A}_3(x,y),\qquad (2.4)$$

где $\mathrm{A}_i(x,y)$ – неизвестные функции.

Из краевых условий на нижнем основании нижнем основании плиты ($z=h$), где $\sigma_z=D_z=B_z=0$, найдем

$$\mathrm{A}_1(x,y)=\frac{1}{2}\Phi(x,y),\quad \mathrm{A}_2(x,y)=\frac{1}{2}X(x,y),\quad \mathrm{A}_3(x,y)=\frac{1}{2}Q(x,y)$$

Тогда

$$\sigma_z=\frac{z^3-3h^2z+2h^3}{4h^3}\Phi(x,y),\quad D_z=\frac{z^3-3h^2z+2h^3}{4h^3}X(x,y),$$

$$B_z=\frac{z^3-3h^2z+2h^3}{4h^3}Q(x,y).\qquad (2.5)$$

Удовлетворив краевым условиям на верхнем основании плиты, где $z=-h$, $\sigma_z=-q(x,y)$, $D_z=B_z=0$, из (2.1) получим уравнения

$$\frac{\partial \mathrm{N}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{N}_y}{\partial y}=-q(x,y),\quad \frac{\partial M_{dx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{dy}}{\partial y}=0.\quad \frac{\partial M_{bx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{by}}{\partial y}=0.\qquad (2.6)$$

Подставив в эти уравнения выражения (1.24) и (1.25), найдем

$$L_{4s}w+L_{3g}\varphi_0+L_{3p}\psi_0=-q(x,y),\quad L_{3g}w+L_{2gg}\varphi_0+L_{2pp}\psi_0=0,$$

$$L_{3p}w+L_{2pp}\varphi_0+E_{2pp}\psi_0=0,\qquad (2.7)$$

где

$$L_{4s}=-\left(D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right),$$

$$L_{3g}=C_{g11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\left(C_{g21}+2C_{g16}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\left(C_{g12}+2C_{g26}\right)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+C_{g22}\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{3p}=C_{p11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\left(C_{p21}+2C_{p16}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\left(C_{p12}+2C_{p26}\right)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+C_{p22}\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{2gg} = D_{g11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{g12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{g22}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$
$$L_{2pp} = D_{p11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{p12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{p22}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$
$$E_{2pp} = E_{p11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2E_{p12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + E_{p22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \qquad (2.8)$$

Систему дифференциальных уравнений (2.7) нужно решать при определенных краевых условиях на боковой поверхности плиты. Рассмотрим основные виды краевых условий.

Край, загруженный усилиями, силовыми и индукционными моментами. В этом случае на краю плиты заданные воздействия представим как действие поперечных усилий $p(s)$, изгибающих и скручивающих моментов $m(s), h(s)$ и моментов индукций $m_d(s)$, $m_b(s)$

$$\mathrm{M}_n = m(s), \quad \mathrm{H}_{ns} = h(s), \quad \mathrm{N}_n = p(s), \quad M_{dn} = m_d(s), \quad M_{bn} = m_b(s). \qquad (2.9)$$

Заметим, что здесь и в других случаях, кроме случая контакта двух тел, вместо моментов индукций могут задаваться моменты плотностей потенциалов M_φ, M_ψ. Но здесь и далее электромагнитные граничные условия будем принимать в виде последних уравнений (2.9). В случая контакта двух плит (например, плиты с электромагнитоупругим включением) в граничные условия будут входить и те и другие.

Как и в случае классической теории изгиба плит сведем второе и третье уравнения (2.9) к одному. Для этого крутящий момент $H_{ns}ds$, действующий на элемент боковой поверхности с длиной образующей ds, заменим двумя вертикальными, противоположно направленными силами величиной H_{ns} с плечом ds (рис. 2.1). Такая статически эквивалентная замена повлияет лишь на значения напряжений около края плиты в полосе, ширина которой, согласно принципу Сен-Венана, соизмерима с толщиной плиты, является малой величиной. В основной же части плиты заметного искажения значений напряжений и прогибов из-за указанной замены не произойдет. Рассматривая два последовательных элемента боковой поверхности, можно заметить, что распределение скручивающих моментов H_{ns} эквивалентно распределению поперечных сил интенсивности $\partial H_{ns}/\partial s$. Суммируя эти усилия с перерезывающими силами N_n, получим так

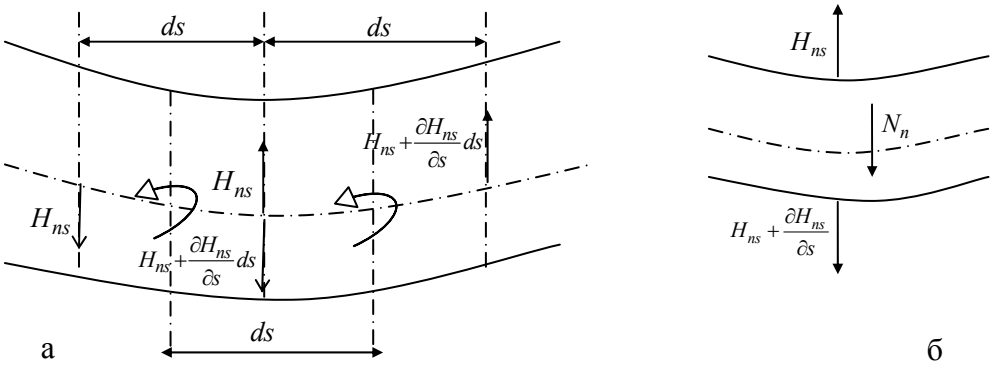


Рис. 2.1

называемую обобщённую перерезывающую силу $N_n + \partial H_{ns}/\partial s$. Тогда второе и трете условия (2.9) можно записать в виде одного условия

$$N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = p(s) \tag{2.10}$$

или, после интегрирования по дуге контура, в виде

$$H_{ns} + I(s) = r(s) + c\,, \tag{2.11}$$

где

$$I(s) = \int_0^s N_n ds\,, \quad r(s) = \int_0^s p(s)\,ds\,, \tag{2.12}$$

c – вещественная постоянная. Тогда граничные условия (2.9) запишутся в виде

$$\begin{gathered} M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny = m(s), \\ \left(M_y - M_x\right)\cos nx \cos ny + H_{xy}\left(\cos^2 nx - \cos^2 ny\right) + I(s) = r(s) + c \\ M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny = m_d(s), \;\; M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny = m_b(s). \end{gathered} \tag{2.13}$$

Исключая из первых двух уравнений (2.13) последовательно M_y и M_x, для загруженного края плиты окончательно получим следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} M_x \cos nx + \left(H_{xy} - I\right)\cos ny = m(s)\cos nx - \left(r(s) + c\right)\cos ny\,, \\ \left(H_{xy} + I\right)\cos nx + M_y \cos ny = m(s)\cos ny + \left(r(s) + c\right)\cos nx\,, \\ M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny = m_d(s), \;\; M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny = m_b(s). \end{gathered} \tag{2.14}$$

Если край плиты свободен от внешних воздействий, то в этих равенствах нужно принять $m(s) = p(s) = r(s) = m_d(s) = m_b(s) = 0$.

Подставив выражения (1.23)–(1.25) в равенства (2.14), окончательно получим граничные условия для определения функций $w(x,y)$, $\varphi_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$.

Деформированный край. Пусть на краю плиты заданы прогиб, производная по нормали (угол наклона изогнутой срединной поверхности к плоскости Oxy) и индукции. В этом случае граничные условия примут вид

$$\begin{gathered} w = w^*(s), \quad \frac{dw}{dn} = \left(\frac{dw}{dn}\right)^*, \\ M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny = m_d(s), \;\; M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny = m_b(s). \end{gathered} \tag{2.15}$$

где $w^*(s)$, $(dw/dn)^*$ – заданные на границе значения прогиба и его производной по нормали; $m_d(s)$, $m_b(s)$ – заданные значения нормальных индукционных моментов M_{dn} и M_{bn}.

Если первое условие (2.15) дифференцировать по дуге контура, а затем в нем и во втором условии записать полные производные $\frac{dw}{ds}$, $\frac{dw}{dn}$ через частные производные по x и y, то получим

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dn}=\left(\frac{dw}{dn}\right)^*,\quad \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\frac{\partial w^*}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial w^*}{\partial y}\frac{dy}{ds}. \tag{2.16}$$

При положительном обходе искомой области (в случае внешнего контура – против часовой стрелки (рис. 2.2)) имеем

$$\frac{dx}{dn}=\cos nx,\quad \frac{dy}{dn}=\cos ny,\quad \frac{dx}{ds}=-\cos ny,\quad \frac{dy}{ds}=\cos nx.$$

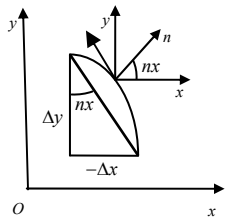


Рис. 2.2

Тогда первые два условия (2.15) можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cos nx+\frac{\partial w}{\partial y}\cos ny=\left(\frac{dw}{dn}\right)^*,$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}\cos ny+\frac{\partial w}{\partial y}\cos nx=-\frac{\partial w^*}{\partial x}\cos ny+\frac{\partial w^*}{\partial y}\cos nx. \tag{2.17}$$

Решая систему уравнений (2.17) с отличным от нуля определителем и добавляя индукционные краевые условия (2.15), для деформированного края окончательно найдем

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\left(\frac{dw}{dn}\right)^*\cos nx+\frac{\partial w^*}{\partial x}\cos^2 ny-\frac{\partial w^*}{\partial y}\cos nx\cos ny,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{dw}{dn}\right)^*\cos ny-\frac{\partial w^*}{\partial x}\cos nx\cos ny+\frac{\partial w^*}{\partial y}\cos^2 nx,$$

$$M_{dx}\cos nx+M_{dy}\cos ny=m_d(s),\quad M_{bx}\cos nx+M_{by}\cos ny=m_b(s). \tag{2.18}$$

Подставив в последние два уравнения (2.18) выражения (1.25), получим окончательный вид граничных условий для определения функций $w(x,y)$, $\varphi_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$.

Если край плиты жестко подкреплен, то при деформации он может поворачиваться как жесткое целое. Поэтому точки контура будут находиться в одной плоскости – плоскости жесткого края, т.е. функция прогиба на краю должна удовлетворять условию $w=c_1x+c_2y+c_0$, откуда следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial x}=c_1,\ \frac{\partial w}{\partial y}=c_2,\ M_{dx}\cos nx+M_{dy}\cos ny=m_d(s),\ M_{bx}\cos nx+M_{by}\cos ny=m_b(s). \tag{2.19}$$

Здесь c_1, c_2 – вещественные постоянные, характеризующие углы поворота жесткого края относительно осей x и y соответственно.

Если край плиты жёстко защемлен (прогиб его точек и угол наклона изогнутой срединной поверхности к плоскости Oxy равен нулю), то $w^*=0$, $(dw/dn)^*=0$, и из (2.19) следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}=0,\ M_{dx}\cos nx+M_{dy}\cos ny=d(s),\ M_{bx}\cos nx+M_{by}\cos ny=b(s). \tag{2.20}$$

Опертый край, загруженный изгибающими моментами. В этом случае на границе заданы изгибающие и индукционные моменты, а прогиб равен нулю

$$w=0,\ M_n=m(s),\ M_{dx}\cos nx+M_{dy}\cos ny=m_d(s),\ M_{bx}\cos nx+M_{by}\cos ny=m_b(s). \tag{2.21}$$

где $m(s)$, $d(s)$, $b(s)$ – интенсивности силовых и индукционных изгибающих моментов. Эти условия с учётом первого равенства (1.29) перепишем в виде:

$$w=0\,,\quad M_x\cos^2 nx+M_y\cos^2 ny+2H_{xy}\cos nx\cos ny=m(s),$$
$$M_{dx}\cos nx+M_{dy}\cos ny=d(s)\,,\quad M_{bx}\cos nx+M_{by}\cos ny=b(s)\,. \qquad (2.22)$$

Если опертый край плиты не загружен моментами (свободно оперт), то в этих условиях нужно принять $m(s)=m_d(s)=m_b(s)=0$.

Подставив в эти равенства выражения (1.23), (1.25), получим окончательный вид граничных условий для определения функций $w(x,y)$, $\varphi_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$.

Идеальный контакт плиты с упругим включением. Пусть плита с областью S (в срединной плоскости) идеально контактирует с упругим включением с областью S^l так, что точки контакта перемещаются совместно. В этом случае в точках контакта равны друг другу прогибы w, w^l, а углы поворотов по нормали, перерезывающие силы и все моменты равны по значению и противоположны по знаку:

$$w=w^l,\quad \frac{dw}{dn}=-\frac{dw^l}{dn^l},\quad N_n+\frac{\partial H_{ns}}{\partial s}=-N_n^l-\frac{\partial H_{ns}^l}{\partial s^l},\quad M_n=-M_n^l,$$
$$M_\varphi=-M_\varphi^{(l)},\quad M_\psi=-M_\psi^{(l)},\quad M_{dn}=-M_{dn}^l,\quad M_{bn}=-M_{bn}^l, \qquad (2.23)$$

где величины с индексом l вверху относятся к включению S^l. Преобразуя первые два уравнения системы (2.23) таким же образом, как это сделано для заданных на краю плиты прогибе и углов поворота по нормали (см. формулы (2.13)–(2.18)), а последние 5 и 6 уравнения системы (2.23) таким же образом, как это сделано при выводе формул (2.14), получаем

$$\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w^l}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w^l}{\partial y}=0,$$
$$M_x\cos nx+\left(H_{xy}-I\right)\cos ny+M_x^l\cos nx+\left(H_{xy}^l-I^l\right)\cos ny=-c\cos ny\,,$$
$$\left(H_{xy}+I\right)\cos nx+M_y\cos ny+\left(H_{xy}^l+I^l\right)\cos nx+M_y^l\cos ny=c\cos nx\,,$$
$$M_\varphi+M_\varphi^{(l)}=0\,,\quad M_\psi+M_\psi^{(l)}=0\,,$$
$$M_{dx}\cos nx+M_{dy}\cos ny+M_{dx}^{(l)}\cos nx+M_{dy}^{(l)}\cos ny=0\,,$$
$$M_{bx}\cos nx+M_{by}\cos ny+M_{bx}^{(l)}\cos nx+M_{by}^{(l)}\cos ny=0\,. \qquad (2.24)$$

Подставив в эти равенства выражения (1.23), (1.25), получим окончательный вид граничных условий для определения функций $w(x,y)$, $\varphi_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$.

Таким образом, решение задачи об изгибе плиты под действием механических сил и электромагнитных полей сводится к решению системы дифференциальных уравнений (2.7) при соответствующих граничных условиях (2.14), (2.18), (2.22), (2.24). После решения этой краевой задачи значения основных характеристик находятся по формулам (1.23)–(1.25).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kirchhoff G. R. Note relative à la théorie de l'équilibreet du mouvement d'une plaque élastique / G. R. Kirchhoff // Comptes Rendus Mathematique (Paris). – 1848. – Vol. XXVII. – P. 394–397.
2. Kirchhoff G. R. Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastishem scheibe / G. R. Kirchhoff // J. Fuer die Reine und Angewandte Mathematik. – 1850. – Vol. 40. – P. 51–88.
3. Gehring F. De Aequationibus Differentialibus, quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definiuntur. Ph.D. dissertation, Berlin, 1860.
4. Boussinesque M. J. Compliments a une etude sur la theorie de lequilibre et du mouvement des solides elastiques / M. J. Boussinesque // J. Math, pures et appl., ser. 3. – 1879. – Vol. 5. – P. 163-194 and 329-344.
5. Huber M. T. Teoria plyt prostokatnie-róznokierunkowych / M. T. Huber. – Lwow, 1921.
6. Huber M. T. Einige Anwendungen der Biegung Theorie orthotroper Platten / M. T. Huber // Zeitschr. f. Angew. Math. und Mech. –1926, b. 6, h. 3.
7. Huber M. T. Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten / M. T. Huber. – Warszawa, 1929.
8. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
9. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит / С. Г. Лехницкий // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 2, вып. 2. – С. 181–209.
10. Космодамианский А. С. Изгиб тонких многосвязных плит / А. С. Космодамианский, Г. М. Иванов. – Донецк, 1973. – 256 с.
11. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – Вып. 3. – С. 97–127.
12. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теоретическая и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.
13. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 83–100.
14. Калоеров С. А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С. А. Калоеров, А.И. Занько, А.А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – № 9(55). – С. 99–138.
15. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
16. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
17. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
18. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
19. Тамм И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
20. Maxwell J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism: in 2 vol. Vol. II / J.C.Maxwel. – Oxford: Clarendon Press, 1873. – XXIV, 445 p.
21. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204-326.
22. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц / Дж. Най. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 388 с.

Поступила в редакцию 06.05.2019 г.

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF APPLIED BENDING THEORY OF THIN ELECTROMAGNETOELASTICITY PLATES

S.A. Kaloerov

The applied theory of bending of Kirchhoff thin plates is extended to the case of plates made of piezoelectric and piezomagnetic materials. At the same time, the conditions for the induction of electric and magnetic fields were added to the Kirchhoff hypotheses, the system of differential equilibrium equations was supplemented with the equations of forced electrostatics, boundary conditions for the solution of the complete system were formulated, instead of the equations of Hooke's law, the general equations of the electromagnetoelastic state

were adopted. The solution of the problem is first given to the system of 3 partial differential equations for determining the functions of the deflection, potential densities, electric and magnetic field thickness. Boundary conditions for defining functions are obtained.

Keywords: applied theory of bending of thin plates, piezomaterial, boundary value problems, holes and cracks.

Калоеров Стефан Алексеевич
Доктор физико-математических наук, профессор;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики.
E-mail: kaloerov@mail.ru

Kaloerov Stefan Alekseevich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor,
Donetsk National University, Donetsk,
Professor at the Department of Elasticity Theory and Computational Mathematics.
E-mail: kaloerov@mail.ru

Ф И З И К А

УДК 539.213; 530.1; 524.3; 524.8

АКТИВНЫЕ НАНООБЪЕКТЫ, НЕЙТРИНО И БОЗОН ХИГГСА ВО ФРАКТАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

© 2019. ***В.С. Абрамов***

Теоретически исследуются взаимосвязи основных параметров активных нанообъектов с бозоном Хиггса и полем Хиггса во фрактальных квантовых системах. В качестве активных нанообъектов могут выступать наночастицы, атомные дефекты, квантовые точки, нейтрино. На примере кварцевой наночастицы, захваченной в оптическую ловушку и помещенной в вакуум, получены оценки предельной частоты вращения частицы в лазерном поле с круговой поляризацией, размера наночастицы. На примере атомных дефектов в нанотрубках нитрида бора получены оценки длин волн квантовой эмиссии отдельных фотонов. Показано, что для нейтрино характерно явление гистерезиса. Получена оценка массы покоя нейтрино. Исследуются сверхбезизлучательные состояния физических полей. Свойства наночастиц зависят от давления, состояния физического вакуума и космологических параметров.

Ключевые слова: активные нанообъекты, нейтрино, бозон Хиггса, поле Хиггса, фрактальные квантовые системы, оптические ловушки, наночастицы, частота вращения, физический вакуум, сверхбезизлучательные состояния, фрактальная космология.

Введение. Лауреатами Нобелевской премии по физике 2018 года стали А. Ашкин, Ж. Муру и Д. Стрикленд за открытия в области лазерных технологий. А. Ашкин предложил использовать оптические ловушки, разработал технологию "оптического пинцета", которая позволяет манипулировать нанообъектами с помощью лазера [1]. Ж. Мору и Д. Стрикленд изучали сжатие усиленных чирпированных оптических импульсов [2]. Для сжатия импульсов используется отражение от дифракционных решеток. При этом использование периодических структур и метаматериалов [3] приводит к различным нелинейным эффектам. Фемтосекундная лазерная когерентная спектроскопия позволяет выявить особенности поведения активных объектов в таких нелинейных системах [4]. В [5] в качестве активного объекта исследуется кварцевая наночастица в вакууме, захваченная в оптическую ловушку. При этом спиновый момент импульса лазерного света передается механическому угловому моменту частицы. Возникает вращение одиночных 100 нм частиц на частотах порядка 1 ГГц. Атомноподобные дефекты в двумерном гексагональном нитриде бора (hBN) в последнее время стали перспективными для квантовой информатики. В [6] исследуется однофотонная квантовая эмиссия из атомных дефектов в нанотрубках нитрида бора (BNNT). Эта система проявляет высокую стабильность при комнатной температуре, что является привлекательным для создания различных оптико-механических приборов.

С другой стороны, такие наночастицы [5, 6] являются модельными нанообъектами [7] для изучения физических свойств вакуума, фрактальных квантовых систем. Привлечение гипотезы иерархического строения Вселенной [8, 9] дает возможность использовать эти экспериментальные результаты в космологии: при исследовании анизотропных моделей [10] фрактальных космологических объектов; сверхизлучения [10–12] гравитационных волн, реликтовых фотонов от бинарных черных дыр, нейтронных звезд; природы частиц темной материи и темной энергии [13, 14], хиральных фрактальных структур Вселенной. Также возникает задача

описания сверхбезизлучательных состояний различных полей: гравитационных, реликтовых фотонов, поля Хиггса, нейтринного поля, физического вакуума. При описании таких различных нелинейных физических моделей возникают особые точки (аттракторы), линии, поверхности, особые объемные структуры (странные аттракторы). Многие физические свойства вблизи указанных особенностей носят стохастический характер, возникает необходимость моделирования стохастических процессов. Аттракторы и поле деформации, взаимовлияние аттракторов и стохастических процессов в связанных фрактальных многослойных наносистемах исследовались в работах [15–17].

Целью данной работы является описание: модельного нанообъекта и поля Хиггса; связей параметров нейтрино с бозоном Хиггса и полем Хиггса; сверхбезизлучательных состояний фрактальных объектов.

Описание модельного нанообъекта. Для описания основных характеристик модельной наночастицы используем связи энергий покоя бозона Хиггса E_{H0}=125.03238 ГэВ и гравитационного поля E_G=12.11753067 мкэВ из работ [10–12]

$$E_{H0} / E_G = \nu^*_{H0} / \nu_{G0} = N_{HG}; \quad E_G / \nu_{G0} = E_{H0} / \nu^*_{H0} = 2\pi\hbar. \qquad (1)$$

Здесь $\hbar$ – постоянная Планка. С учетом выражений (1) находим параметр $N_{HG} = 1.031830522 \cdot 10^{16}$. Численные значения характерных частот равны ν_{G0}=2.9304515 ГГц, ν^*_{H0}=$3.0237293 \cdot 10^{25}$Гц. На основе этих характерных частот находим частоты гравитона $\nu_G = \nu_{G0} / N_a$ и эффективного бозона Хиггса $\nu_{H0} = \nu^*_{H0} / N_a$. Здесь число Авагадро $N_a = 6.025438 \cdot 10^{23}$. Численные значения $\nu_G = 4.8634664 \cdot 10^{-15}$ Гц, $\nu_{H0} = 50.182731$ Гц. Для ускоренно расширяющейся Вселенной в [9] получены основные соотношения связей параметра $|\xi_{0H}|^2$ с массами покоя эффективного атома m_H и бозона Хиггса M_{H0} в виде

$$|\xi_{0H}|^2 = m_H / M_{H0} = M_H / m_{H0} = E_H / E_{H0} = R_H / R_{H0}; \quad M_{Ha} = N_a M_H;$$
$$M'_{H0} = N_a m_{H0}; \quad R_H = 2GM_{Ha} / c_0^2; \quad R_{H0} = 2GM'_{H0} / c_0^2. \qquad (2)$$

Здесь M_H=$N_a m_H$=24.41158758 г и m_{H0}=$N_a M_{H0}$=134.2770693 г – молярные массы эффективного атома и бозона Хиггса; $E_H = 22.73090194$ ГэВ – энергия покоя эффективного атома; $R_H = 21.84067257$ мкм, $R_{H0} = 120.1356321$ мкм допускают интерпретацию радиусов Шварцшильда черных дыр с массами M_{Ha}, M'_{H0}; $G = 6.672 \cdot 10^{-8}$ см^{3}г$^{-1}$с$^{-2}$ – гравитационная постоянная Ньютона; c_0 – скорость света в вакууме. С учетом численного значения $|\xi_{0H}|^2$=0.181800122 из (2) в [9] были получены основные спектральные параметры теории

$$|S'_{01}| = 0.039541282, \quad S'_{02} = 0.03409, \quad S'_{03} = 0.460458718, \quad S'_{04} = 0.53409. \qquad (3)$$

Радиусы R_H, R_{H0} являются характерными параметрами, которые необходимо учитывать при моделировании активных микрообъектов и их использовании в лазерных нанотехнологиях. Возникает необходимость захвата, движения, перемещения, вращения наночастиц лазерным полем. В [5] вращение наночастицы в

форме гантели достигалось лазером с круговой поляризацией. Лазер с линейной поляризацией заставляет вибрировать наночастицу. В нашей модели для оценки предельной частоты вращения наночастицы используем выражение $\nu_{rot} = 2Q_{H3} \mid \chi_{ef} \mid \nu_{G0}$. Здесь параметр $Q_{H3} = 0.700790572$ определяет положения точки перегиба для функции Q_G, локального минимума для функции V_Q, нуля функции A_Q из работы [9] для модели ускоренно расширяющейся Вселенной. Параметр $\mid \chi_{ef} \mid = 0.250425279$ описывает эффективную восприимчивость в анизотропной модели фрактальных космологических объектов [10, 11].

На основе ν_{rot} находим оценку $\nu_{rot} = 1.0285631\,\text{ГГц}$, которая находится вблизи экспериментально [5] полученной частоты 1.029 ГГц при давлении $7.2 \cdot 10^{-6}\,\text{мбар}$. Частота вращения зависит от давления. Экспериментально [5] при давлении $1.1 \cdot 10^{-5}\,\text{мбар}$ фиксируется сигнал при 1.31 ГГц, что соответствует частоте вращения 655 МГц. В нашей модели частота вращения ν'_{c2} и плотность холодной темной материи Ω'_{c2} определяются из выражений [10]

$$\nu'_{c2} = \Omega'_{c2}\nu_{G0}; \quad \Omega'_{c2} = \nu^2_{\gamma b} / 4 \mid \lambda \mid^2 N; \quad \upsilon^2_{\gamma b} = \upsilon^2_0 / \Omega'_{c2}. \tag{4}$$

Здесь частота $\nu_{\gamma b} = 3.974973236\,\text{ГГц}$, $\Omega'_{c2} = 0.224091707$, эффективная скорость Ферми $\upsilon_{\gamma b} = 14.34353643 \cdot 10^6\,\text{см} \cdot \text{с}^{-1}$, связанные с нейтронными звездами; скорость $\upsilon_0 = 6.783540245 \cdot 10^6\,\text{см} \cdot \text{с}^{-1}$ в модели плоской космологии. С учетом ν_{rot} находим численные значения $\nu'_{c2} = 656.6899\,\text{МГц}$, $2\nu'_{c2} = 1.3133798\,\text{ГГц}$, которые близки к указанным выше значениям частот из эксперимента [5]. Это указывает на существенную роль давления при изменении частоты вращения наночастицы, зависимости ее свойств от состояния физического вакуума и космологических параметров.

Для описания других характеристик модельного нанообъекта запишем выражения для основных энергий

$$\varepsilon_{G00} = N'_0 E_G \left|\xi_{0H}\right|^2; \quad \varepsilon_{G01} = N'_{01} E_G \left|\xi_{0H}\right|^2; \quad \varepsilon_{G02} = N'_{02} E_G \left|\xi_{0H}\right|^2; \tag{5}$$
$$E_{g00} = z'_\mu \varepsilon_{G00} = z'_\mu n_G \varepsilon_{\mu 00}; \quad E_{g01} = z'_\mu \varepsilon_{G01} = z'_\mu n_G \varepsilon_{\mu 01};$$
$$E_{g02} = z'_\mu \varepsilon_{G02} = z'_\mu n_G \varepsilon_{\mu 02}.$$

Параметры $N'_0 = 3.73846796 \cdot 10^5$ и $N'_{01} = 3.795550194 \cdot 10^5$, $N'_{02} = 3.680500523 \cdot 10^5$ учитывают наличие Бозе конденсата и поля Хиггса [9]. На основе (6) находим численные значения $\varepsilon_{G00} = 823.5727356\,\text{мэВ}$, $\varepsilon_{G01} = 836.1477723\,\text{мэВ}$, $\varepsilon_{G02} = 820.8026915\,\text{мэВ}$. Далее с учетом космологического красного смещения $z'_\mu = 7.18418108$ [9] и числа квантов $n_G = 3$, которые переносятся гравитационными волнами [10–12], на основе (6) находим остальные энергии $E_{g00} = 5.916695599\,\text{эВ}$, $E_{g01} = 6.007036939\,\text{эВ}$, $E_{g02} = 5.824953291\,\text{эВ}$; $\varepsilon_{\mu 00} = 274.5242452\,\text{мэВ}$, $\varepsilon_{\mu 01} = 278.7159241\,\text{мэВ}$, $\varepsilon_{\mu 02} = 270.2675638\,\text{мэВ}$. Отметим, что энергия E_{g00} близка к энергетической щели 5.95 эВ для атомных дефектов в нанотрубках нитрида бора (BNNT) [6], из которых

экспериментально наблюдали эмиссию отдельных фотонов. На основе энергий из (5) и спектральных параметров (3) находим энергетические спектры

$$\varepsilon_{g0x} = E_{g00}S'_{0x}; \quad \varepsilon_{g1x} = E_{g01}S'_{0x}; \quad \varepsilon_{g2x} = E_{g02}S'_{0x}; \tag{6}$$

$$\varepsilon^*_{G0x} = \varepsilon_{G00}S'_{0x}; \quad \varepsilon^*_{G1x} = \varepsilon_{G01}S'_{0x}; \quad \varepsilon^*_{G2x} = \varepsilon_{G02}S'_{0x}; \tag{7}$$

$$\varepsilon_{\nu 0x} = \varepsilon_{\mu 00}S'_{0x}; \quad \varepsilon_{\nu 1x} = \varepsilon_{\mu 01}S'_{0x}; \quad \varepsilon_{\nu 2x} = \varepsilon_{\mu 02}S'_{0x}. \tag{8}$$

Спектр (6) дает возможность выполнить оценки для среднего диаметра точечного дефекта d_a, рамановского сдвига $1/\lambda_{RS}$ в спектре BNNT по формулам

$$2d_a = \lambda_{g24}\,|\chi_{ef}|; \quad \lambda_{RS} = 2\pi n_G(1+\Omega_{0\nu})\lambda_{g14}; \quad \lambda_{g24} = a_\lambda/\varepsilon_{g24}; \quad \lambda_{g14} = a_\lambda/\varepsilon_{g14}. \tag{9}$$

Здесь постоянный параметр $a_\lambda = 1239644.01\,\text{мэВ}\cdot\text{нм}$, плотность нейтрино $\Omega_{0\nu} = 0.002939801$ [10–12]. Численные значения $d_a = 49.892844\,\text{нм}$ и $2d_a = 99.785688\,\text{нм}$ близки к средним оценкам размеров наночастиц 50 нм и 100 нм из работ [6] и [5], соответственно. Рамановский сдвиг $\lambda_{RS} = 7304.6019\,\text{нм}$ практически совпадает со значением $1/\lambda_{RS} = 1369\,\text{см}^{-1}$ из эксперимента [6]. Далее находим разность энергий между ветвями спектра (6) $\delta\varepsilon_{g1} = \varepsilon_{g13} - \varepsilon_{g12} - \varepsilon_{g21} = 2330.886518\,\text{мэВ}$ и соответствующую длину волны $\lambda_{\delta 1} = a_\lambda/\delta\varepsilon_{g1} = 531.8337\,\text{нм}$. Указанный переход между ветвями спектра с длиной волны $\lambda_{\delta 1}$ близок к длине волны 532 нм возбуждающего зеленого лазера из [6]. Переход с разностью энергий $\delta\varepsilon_{g1}/2 = 1165.443259\,\text{мэВ}$ и длиной волны $2\lambda_{\delta 1} = 1063.6674\,\text{нм}$ близок к длине волны 1064 нм лазера, используемого в [6] для оптической модуляции. В работе [6] были получены два различных дефекта в BNNT (два эмиттера) для наблюдения фотолюминесценции. Максимальное излучение отдельных фотонов из этих эмиттеров было получено на длинах волн 571 нм и 569 нм. В нашей модели разности энергий между ветвями спектра (6) и соответствующие длины волн равны:

$$\delta\varepsilon_{g2} = \varepsilon_{g13} - 3\varepsilon_{g22} = 2170.274555\,\text{мэВ}, \quad \lambda_{\delta 2} = a_\lambda/\delta\varepsilon_{g2} = 571.19225\,\text{нм}; \tag{10}$$

$$\delta\varepsilon_{g3} = \varepsilon_{g13} - 3\varepsilon_{g22} + \varepsilon_{g11} - \varepsilon_{g21} = 2177.474377\,\text{мэВ}, \quad \lambda_{\delta 3} = a_\lambda/\delta\varepsilon_{g3} = 569.3036\,\text{нм}.$$

Эти значения близки к экспериментальным данным для эмиттеров [6].

Ветви спектра (8) находяться внутри запрещенной зоны спектра (6) и зависят от температуры. Стабильная квантовая эмиссия фотонов наблюдается в широкой области температур, включая комнатную. Оценка верхней границы для температуры порядка 800 К [6]. С учетом энергетического спектра (8) находим оценку верхней границы температуры по формуле

$$T_{\nu s} = a_T(\varepsilon_{\nu 13} + \varepsilon_{\nu 12}) = 799.84687\,\text{К}; \quad a_T = 5.802778417\,\text{К}\cdot(\text{мэВ})^{-1}. \tag{11}$$

С другой стороны, в работах [9–12] в рамках анизотропной модели были получены оценки температуры реликтового излучения $T_r = 2.72548\,\text{К}$, дипольной анизотропии реликтового излучения δT_r, средней величины колебаний температуры реликтового фона δT_A. Это реликтовое излучение может влиять на основные параметры активных нанообъектов. В рамках теории сверхизлучения Дикке [18–20] нами было определено максимальное число

активных эффективных частиц $N = 17.0073101$ [10–12]. Выражения, связывающие указанные температуры и характерные энергии ε_r, ε_{rA}, ε'_{rA} имеют вид

$$T_r = T_{rA} + T'_{rA}\,;\quad T_{rA} = u_{rA}^2 T_r\,;\quad T'_{rA} = \mathrm{v}_{rA}^2 T_r\,;\quad T_r = a_T \varepsilon_r\,;\quad u_{rA}^2 + \mathrm{v}_{rA}^2 = 1\,;$$
$$1 - 2u_{rA}^2 = (N+1)/\mathrm{z}'_{A2}\,;\quad T_{rA} = a_T \varepsilon_{rA}\,;\quad T'_{rA} = a_T \varepsilon'_{rA}\,;\quad N_{rA} = z'_{A2} + N + 1\,. \qquad (12)$$

Численные значения указанных параметров равны: $T_{rA} = 1.339010127\,\mathrm{K}$, $T'_{rA} = 1.386469873\,\mathrm{K}$, $\varepsilon_r = 469.685348\,$мкэВ, $\varepsilon_{rA} = 230.7532756\,$мкэВ, $\varepsilon'_{rA} = 238.9320724\,$мкэВ, обычное красное смещение $z'_{A2} = 1034.109294$, $N_{rA} = 1052.116604$.

Температуры фазовых переходов T'_A, T_A [10–12] определяются через числа квантов n_{zA} (для обычного красного смещения) и $n_{z\mu}$ (для космологического красного смещения z'_μ), общего числа квантов реликтового излучения N_{ra} по формулам

$$T'_A = T_A + \delta T_A\,;\quad T_A = n_{zA} T'_A\,;\quad \delta T_A = n_{z\mu} T'_A\,;\quad n_{z\mu} = z'_\mu / N_{ra}\,;\quad n_{zA} + n_{z\mu} = 1\,;$$
$$N_{ra} = z'_{A2} + z'_\mu\,;\quad \delta T_r = Q_{H3}\, T'_{rA}\, \delta T_A / T'_A\,;\quad 2T'_{rA} = N_{rA} T'_A\,. \qquad (13)$$

Численные значения указанных параметров равны: $T'_A = 2.635582153\,\text{мК}$, $T_A = 2.61739852\,\text{мК}$, $\delta T_A = 18.183633\,\text{мкК}$, $\delta T_r = 6.703518107\,\text{мК}$.

На основе соотношений из [10–12] для космологических фрактальных объектов, учитывающих модель сверхизлучения Дикке [18–20], запишем выражения для отношения ускорений

$$g_0 / g_{SE} = n_G (z'_{A2} - z'_\mu + I_m I_0^{-1}) / 2\,. \qquad (14)$$

Здесь ускорение свободного падения на поверхности Земли $g_0 = 980.665\,\text{см}\cdot\text{с}^{-2}$; g_{SE} – ускорение Земли к Солнцу; отношение максимальной I_m к начальной I_0 интенсивностей излучения $I_m I_0^{-1} = 81.06580421$. С учетом выражения (14) находим численное значение $g_{SE} = 0.590056\,\text{см}\cdot\text{с}^{-2}$. С учетом основного параметра $n_{A0} = 58.04663887$ для черных дыр из [10–12], параметра N_{HG} из (1) на основе условия

$$g_{SE} N_{HG} = g_{nS} n_{A0} \qquad (15)$$

находим оценку гравитационного ускорения $g_{nS} = 1.0488769 \cdot 10^{12}\,\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ на поверхности нейтронной звезды, которая согласуется с оценкой $10^{12}\,\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ из [5].

Поле Хиггса. В рамках нашей анизотропной модели [10–12] основными параметрами являются $|\xi_{0H}|^2 = \chi_{11}$ и $(\xi'_0)^2 = N'_{01} / N'_{02}$. Для компонент тензора $\hat{\chi}_{ef}$ эффективной восприимчивости используем обозначения из работ [10–12]. Операторы $\hat{n}_{\xi 0}$ и $\hat{n}^+_{\xi 0}$ описывают основное и возбужденное состояния бозонного поля Хиггса. Усредненные значения $n_{\xi 0} = <\hat{n}_{\xi 0}>$ и $n'_{\xi 0} = <\hat{n}^+_{\xi 0}>$ определяются выражениями вида

$$n'_{\xi 0} - n_{\xi 0} = 1\,;\quad n_{\xi 0} = k_\mu \,|\, \chi_{ef} \,|\cdot|\, \xi_{0H} \,|^2 \,\mathrm{cn}(u_\mu; k_\mu)\,;\quad n'_{\xi 0} = (\xi'_0)^2\,. \qquad (16)$$

Если использовать из [10–12] численные значения компонентов восприимчивости χ_{21}, χ_{11}, то получим численное значение $n_{\xi 0} = \chi_{21}\chi_{11} = 0.031259246$. В общем случае,

$|\chi_{ef}| = n_{0u} / \chi_{11}$ является нелинейной функцией от $n_{\xi 0}$ и допустимо представление

$$n_{0u} = \sqrt{2}\,\{\chi_{11}^4 - n_{\xi 0}(\chi_{11}^2 - n_{\xi 0})\}^{1/2}; \quad n_{\xi 0} = k_\mu n_{0u}\mathrm{cn}(u_\mu; k_\mu). \tag{17}$$

Из (17) следует: число квантов $n_{\xi 0} = n_{0u}\mathrm{sech}(u_\mu)$ при $k_\mu = 1$; $n_{\xi 0} = 0$ при $k_\mu = 0$ или при $\mathrm{cn}(u_\mu;k_\mu)=0$. Если ввести параметры S_{2u}, S_{1u} соотношениями

$$S_{2u} = \chi_{11}^2; \quad |S_{1u}| = \sqrt{2}\,S_{2u}; \quad S_{4u} = 0.5 + S_{2u}; \quad S_{3u} = 0.5 - |\mathrm{S}_{1u}|, \tag{18}$$

то находим основное нелинейное уравнение для функции n_{0u} от $n_{\xi 0}$, которое дает возможность выбора знака у различных ветвей

$$n_{0u}^2\,|S_{1u}|^{-2} + n_{\xi 0}(\mathrm{S}_{2u} - n_{\xi 0})\mathrm{S}_{2u}^{-2} = 1. \tag{19}$$

На основе численного значения χ_{11} из [10–12], выражений (18) получим численные значения параметров $S_{2u} = 0.033051284$, $|S_{1u}| = 0.046741575$, $S_{3u} = 0.453258425$, $S_{4u} = 0.533051284$.

По аналогии с [9] введем постоянную Хаббла $H_{0\nu}$, основной параметр теории $Q_{0\nu}$ соотношениями

$$Q_{0\nu} = H_{0\nu}/H_{02} = \mathrm{v}_{0\nu}/\mathrm{v}_{02} = 1 + S_{2u}; \quad \mathrm{v}_{0\nu} = H_{0\nu}L_0 = n_{A0}\,\mathrm{v}_{h2}/2;$$
$$\Omega_{tH0} = Q_{0\nu} + |S_{1u}|; \quad \mathrm{v}_q = \mathrm{v}_{01} - \mathrm{v}_{02}; \quad \mathrm{v}_{2\nu} = \mathrm{v}_{0\nu} - \mathrm{v}_{02}; \quad \mathrm{v}_{1\nu} = \mathrm{v}_{01} - \mathrm{v}_{0\nu}. \tag{20}$$

На основе численных значений H_{02}, v_{02}, H_{01}, v_{01}, L_0, n_{A0} из [9], параметров S_{2u}, $|S_{1u}|$ и выражений (20) находим численные значения: $Q_{0\nu} = 1.033051284$; скорости $\mathrm{v}_{0\nu} = 7.274300244 \cdot 10^6$ см·с$^{-1}$, $\mathrm{v}_{h2} = 2.506363981 \cdot 10^5$ см·с$^{-1}$; полную плотность Вселенной (нормированную на критическую плотность) $\Omega_{tH0} = 1.079792859$; разности скоростей $\mathrm{v}_q = 2.784326 \cdot 10^5$ см·с$^{-1}$; $\mathrm{v}_{2\nu} = 2.327328439 \cdot 10^5$ см·с$^{-1}$; $\mathrm{v}_{1\nu} = 4.56997561 \cdot 10^4$ см·с$^{-1}$. Отметим, что скорость $\mathrm{v}_{0\nu}$ связана с характерной скоростью v_{h2} через основной параметр n_{A0} (который определяет спектр чисел заполнения) для черных дыр.

Числа квантов n'_F, n_F для частиц Ферми типа из [10 - 12] также являются нелинейными функциями от числа квантов поля Хиггса $n'_{\xi 0}$, $n_{\xi 0}$

$$n'_F = (S_{2u} - n_{\xi 0})/S_{2u}; \quad n_F = n_{\xi 0}/S_{2u}; \quad n'_F + n_F = 1. \tag{21}$$

Из (21) следует, что плотность нейтрино $\Omega_{0\nu}$, определенная в [10 - 12], также является нелинейной функцией от числа квантов поля Хиггса

$$\Omega_{0\nu} = (n'_F)^2 = (Q_{0\nu} - n'_{\xi 0})^2 / S_{2u}^2 = (\mathrm{v}_{2\nu} - n_{\xi 0}\mathrm{v}_{02})^2 / \mathrm{v}_{2\nu}^2. \tag{22}$$

Учет зависимости $\mathrm{v}_{0\nu}$ от n_{A0} из (20) дает возможность записать (22) в виде

$$\Omega_{0\nu} = (n_{A0} - n'_{\xi 0}N_{h2})^2 / (n_{A0} - N_{h2})^2 = (n_{0\nu} - n_{\xi 0}N_{h2})^2 / n_{0\nu}^2;$$
$$N_{h2} = 2\mathrm{v}_{02}/\mathrm{v}_{h2} = 56.18950363; \quad n_{0\nu} = n_{A0} - N_{h2} = 1.857135243. \tag{23}$$

Выражения (23) определяют плотность нейтрино $\Omega_{0\nu}$ как функцию от числа квантов черной дыры n_{A0}, числа квантов поля Хиггса $n'_{\xi 0}$, $n_{\xi 0}$ и параметров N_{h2}, $n_{0\nu}$. Из (22),

(23) можно получить предельные значения для плотности нейтрино: $\Omega_{0\nu} = 0.002939801$ при $n'_{\xi 0} = 1 + \chi_{21}\chi_{11} = 1.031259246$; $\Omega_{0\nu} = 0$ либо при $n'_{\xi 0} = Q_{0\nu} = 1.033051284$, либо при $\mathrm{v}_{2\nu} = n_{\xi 0}\mathrm{v}_{02}$, либо при $n_{A0} = n'_{\xi 0}N_{h2}$, либо при $n_{0\nu} = n_{\xi 0}N_{h2}$; $\Omega_{0\nu} = 1$ либо при $Q_{0\nu} - n'_{\xi 0} = S_{2u}$, либо при $n_{\xi 0} = 0$, либо при $n'_{\xi 0} = 1$. Это указывает на возможное гистерезисное поведение плотности нейтрино как функции от указанных аргументов. В работах [10–12] была получена связь n_{A0} с космологическим красным смещением z'_μ в виде $n_{A0} + 3/4 = z'_\mu(z'_\mu + 1)$. Это позволяет записать зависимость (19) в общем виде

$$n_{0u}^2 n_{0u0}^{-2} - (n_{\xi 0} - n_{2u})^2 (2n_{2u})^{-2} = z'_\mu(z'_\mu + 1) - n_{A0} = n_Q / n_g;$$
$$n_{2u} = S_{2u}/2; \quad n_{0u0} = |S_{1u}|; \quad n_g = n_{0u0}^2 / n_{2u}^2; \quad n_Q = 2n_G = 2 < \hat{c}_G \hat{c}_G^+ >. \qquad (24)$$

Здесь $n_g = 8$, $n_Q = 6$, $n_G = < \hat{c}_G \hat{c}_G^+ > = 3$ и $n'_G = < \hat{c}_G^+ \hat{c}_G > = 2$ допускают интерпретацию как числа квантов глюонного, кваркового, возбужденного и основного состояний гравитационного полей, соответственно. При этом выражения (24) строго переходят в выражения (19), (22), (23). В общем случае, из (24) следуют другие возможные зависимости числа квантов n_{0u}, n_g как от числа квантов поля Хиггса $n_{\xi 0}$, так и от числа квантов для черных дыр n_{A0}, космологического красного смещения z'_μ. Возникают функции, зависящие от трех аргументов, что характерно для объемных фрактальных структур Вселенной. Так, например, из (24) можно получить зависимость для числа квантов глюонного поля $n_g = 2n_G / [z'_\mu(z'_\mu + 1) - n_{A0}]$ при заданном $n_G = 3$ как функцию от двух аргументов z'_μ, n_{A0}.

Связи параметров нейтрино с бозоном Хиггса. Для описания параметров нейтрино (числа солнечных $N_{0\nu}$ и электронных $N_{e\nu}$ нейтрино; массы m_{HG} и энергии ε_{HG} покоя нейтрино) и их связей с параметрами бозона Хиггса будем использовать анизотропную модель [10–12] и выражения (1), (2), (24). В рамках этой модели находим уравнение для характерной энергии $E_{H\nu}$

$$2E_{H0} / E_{e\nu} = 2E_H / \varepsilon_{e\nu} = z'_\mu + 0.5; \quad E_{e\nu} = N_{e\nu}E_{H\nu}; \quad N_{e\nu} = N_{0\nu} / n_G. \qquad (25)$$

Здесь численные значения $n_G = 3$, $N_{e\nu} = 1.999705439 \cdot 10^{10}$, $N_{0\nu} = 5.999116316 \cdot 10^{10}$; энергии $E_{H\nu} = 1627.379629$ мэВ, $E_{e\nu} = 32.54279895$ ГэВ, $\varepsilon_{e\nu} = 5.916284819$ ГэВ. Отметим, что ранее (в 60-е годы XX века) регистрировали только электронные нейтрино. В то время датчики не могли зафиксировать нейтрино других типов. Создание детекторов следующего поколения позволило обнаружить вклады от μ и τ-нейтрино в суммарное число солнечных нейтрино $N_{0\nu}$.

Действие тензора $\hat{\chi}_{ef}$ на энергию $E_{H\nu}$ приводит к тензору энергий $\hat{\varepsilon}_{H\nu} = \hat{\chi}_{ef}E_{H\nu}$ с компонентами $\varepsilon_{ij} = \chi_{ij}E_{H\nu}$ ($i, j = 1,2,3$). С учетом χ_{ij} из [10–12] находим численные значения

$$\varepsilon_{11} = 295.8578151 \text{ мэВ}; \quad \varepsilon_{12} = -280.2758586 \text{ мэВ}; \quad \varepsilon_{13} = 0;$$
$$\varepsilon_{21} = 279.8164249 \text{ мэВ}; \quad \varepsilon_{22} = 295.3728381 \text{ мэВ}; \quad \varepsilon_{23} = -23.32509064 \text{ мэВ};$$
$$\varepsilon_{31} = 16.04139021 \text{ мэВ}; \quad \varepsilon_{32} = 16.93321214 \text{ мэВ}; \quad \varepsilon_{33} = 406.8689518 \text{ мэВ}. \qquad (26)$$

Решение задачи о поиске собственных значений энергий ε_R тензора энергии $\hat{\varepsilon}_{H\nu}$ приводит к нелинейному уравнению

$$\varepsilon_{33}-\varepsilon_R=\varepsilon_{23}\varepsilon_{32}(\varepsilon_{R3}-\varepsilon_R)/\{[\varepsilon_R-0.5(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})]^2+\varepsilon_{R\gamma}^2\};\quad \varepsilon_{HG}=|\varepsilon_{21}\varepsilon_{12}|^{1/2};$$

$$\varepsilon_{R3}=|\chi_{ef}|^2 E_{H\nu}/|\xi_{0H}|^2;\quad 2\varepsilon_{R\gamma}=[4|\varepsilon_{21}\varepsilon_{12}|-(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2]^{1/2}. \qquad (27)$$

На основе (27) находим численные значения: энергии покоя нейтрино ε_{HG}=280.0460475 мэВ; энергий $\varepsilon_{R\gamma}$=280.0459426 мэВ, ε_{R3}=561.3723777 мэВ. Знак у энергий ε_{21}, ε_{12} (или ε_{23}, ε_{32}) определяется выбором знака у модулей k_μ, k'_μ и значением угла φ_μ. Если $\varepsilon_{21}\varepsilon_{12}<0$, то $\varepsilon_{HG}^2=-\varepsilon_{21}\varepsilon_{12}$, при этом энергия $2\varepsilon_{R\gamma}$ из (27) заменяется на энергию $2\varepsilon_{R\gamma}^*=[(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+4\varepsilon_{HG}^2]^{1/2}$. Численное значение $\varepsilon_{R\gamma}^*=280.0461525$ мэВ.

На основе энергии покоя нейтрино ε_{HG} и космологического красного смещения z'_μ можно определить характерную энергию $\varepsilon_{z\mu}=z'_\mu(z'_\mu+2)\varepsilon_{HG}/4=4.61941696$ эВ, которая допускает интерпретацию как энергии коррелированного (когерентного) состояния поля, связанного с космологическим красным смещением z'_μ для реликтового излучения.

С другой стороны, на основе спектров $\varepsilon_{iHG}=2\varepsilon_{HG}S'_{0i}$, $\varepsilon'_{iHG}=2|\chi_{ef}|\varepsilon_{HG}S'_{0i}$ $(i=1,2,3,4)$ можно получить энергии ε_{HG}^*, ε'_{2HG} из выражений

$$\varepsilon_{HG}^*=\varepsilon_{HG}+\varepsilon'_{2HG};\ (\varepsilon_{HG}^*)^2-\varepsilon_{HG}^2=z'_{HG}(z'_{HG}+2)\varepsilon_{HG}^2;\ z'_{HG}=\varepsilon'_{2HG}/\varepsilon_{HG}. \qquad (28)$$

Численные значения равны ε_{HG}^*=284.8275525 мэВ, ε'_{2HG}=4.781504961 мэВ. Параметр $z'_{HG}=0.017073996$ $(z'_{HG}<z'_\mu)$ допускает интерпретацию как космологического красного смещения для нейтринного поля.

Разность квадратов энергий $(\varepsilon_{HG}^*)^2-\varepsilon_{HG}^2$=2700.94592(мэВ)^2 практически совпадает с экспериментальными данными $2.7\cdot10^{-3}$(эВ)^2 по нейтринным осцилляциям [21, 22]. Эти эксперименты доказали существование массы покоя у нейтрино и возможность смены типа нейтрино. В нашей модели нейтрино с энергией покоя ε_{HG} сменяется на нейтрино с энергией покоя ε_{HG}^* из-за наличия космологического красного смещения z'_{HG} для нейтринного поля.

Сверхбезизлучательные состояния фрактальных объектов. Свойства наночастиц во фрактальных квантовых системах зависят от давления, состояния физического вакуума и космологических параметров. Динамические модели дают возможность описать не только сверхизлучение гравитационных волн, реликтовых фотонов от космологических объектов (типа бинарных нейтронных звезд и черных дыр) [10–12], но и сверхбезизлучательные состояния активных объектов. В [10–12] для интенсивности излучения $J(t)$ (в рамках модели сверхизлучения Дикке [18–20]) было записано выражение

$$J(t)=J_0(a_0+a_m)[(a_0-a_m)+1]. \qquad (29)$$

Здесь J_0 – начальная интенсивность излучения; параметры $a_0(t)$, $a_m(t)$ в общем случае зависят от времени t и других параметров. Сверхбезизлучательными состояниями мы

называем состояния с $J(t)=0$. Эти состояния могут быть реализованы в процессе развития различных переходных эффектов (индукции, лавины, эхо, самоиндуцированной прозрачности). Из (29) следует, что эти состояния могут быть реализованы в рамках двух моделей.

Модель $\mathbf{A_0}$. В рамках этой модели полагаем $a_0=-a_m$, где

$$a_m=(z'_{A2})^{1/2}; \quad a_0^2=a_m^2+z'_\mu(z'_\mu+2)/4; \quad a_m^2=z'_{A2}; \quad N_{ra}=z'_{A2}+z'_\mu. \tag{30}$$

Из (29) следует, что возможны два варианта: вариант 1 (B1), когда $z'_\mu=0$, тогда $N_{ra}=z'_{A2}$; вариант 2 (B2), когда $z'_\mu=-2$, тогда $N_{ra}=z'_{A2}-2$.

Для описания сверхбезизлучательных состояний вводим вектор-строки $\hat{N}_{d1}$, $\hat{N}_{d2}$ и вектор-столбцы $\hat{N}^+_{d1}$, $\hat{N}^+_{d2}$, соответственно, для вариантов B1 и B2

$$\hat{N}_{d1}=(N_{ra},z'_{A2},z'_\mu)=(z'_{A2},\, z'_{A2},\, 0); \quad \hat{N}_{d2}=(z'_{A2}-2,\, z'_{A2},\, -2). \tag{31}$$

Далее находим нормы $|N_{d1}|$, $|N_{d2}|$ и угол θ_{d12}

$$\hat{N}_{d1}\hat{N}^+_{d1}=2(z'_{A2})^2=|N_{d1}|^2; \quad \hat{N}_{d2}\hat{N}^+_{d2}=8+2z'_{A2}(z'_{A2}-2)=|N_{d2}|^2;$$
$$\hat{N}_{d1}\hat{N}^+_{d2}=\hat{N}_{d2}\hat{N}^+_{d1}=2z'_{A2}(z'_{A2}-1);$$
$$\cos\theta_{d12}=\hat{N}_{d1}\hat{N}^+_{d2}\,|N_{d1}|^{-1}|N_{d2}|^{-1}=\sqrt{2}\,(z'_{A2}-1)[8+2z'_{A2}(z'_{A2}-2)]^{-1/2}. \tag{32}$$

При изменении обычного красного смещения z'_{A2} из (32) следует возможность изменения знака $\cos\theta_{d12}$. Так при значениях $z'_{A2}=0,1,2$ получим $\cos\theta_{d12}=-0.5,0,0.5$, соответственно. На основе (32) можно ввести функции для плотности распределения Ферми типа n_{d12} и n'_{d12}

$$n'_{d12}+n_{d12}=1; \quad n'_{d12}=\cos^2\theta_{d12}=2(z'_{A2}-1)^2[6+2(z'_{A2}-1)^2]^{-1};$$
$$n_{d12}=\sin^2\theta_{d12}=6[6+2(z'_{A2}-1)^2]^{-1};$$
$$B_{d12}=n'_{d12}-n_{d12}=[(z'_{A2}-1)^2-3]/[(z'_{A2}-1)^2+3]. \tag{33}$$

Для параметра B_{d12} из (33) допустима интерпретация как разности населенности между состояниями (31), (32). Состояние с $B_{d12}=0$ реализуется либо при $z'_{A2}=1+\sqrt{3}$, либо при $z'_{A2}=1-\sqrt{3}$. При этом $\cos^2\theta_{d12}=\sin^2\theta_{d12}=1/2$, что указывает на наличие поперечной компоненты эффективных векторов из (31), (32). Это позволяет нам выполнить интерпретацию в терминах сверхбезизлучательного состояния с возможной киральностью (поляризованностью) структур из (31), образованного обычным красным смещением z'_{A2}. С другой стороны, значения $n_Q=6$, $n_G=3$ из (24) могут определять вклады кваркового и гравитационного полей в поведение параметров n_{d12}, n'_{d12}, B_{d12}, что следует из (33). На основе (33) можно также ввести функции для плотности распределения Бозе типа N_{zA}, N'_{zA} и n_{zA}, n'_{zA}

$$N'_{zA}-N_{zA}=1; \quad N_{zA}=(z'_{A2}-1)^2/3; \quad n'_{zA}-n_{zA}=1; \quad n_{zA}=N_{zA}^{-1}. \tag{34}$$

На основе (34) и $z'_{A2} = 1034.109294$ находим характерное значение числа бозонов в равновесном состоянии $N_{0A} = N_{zA}(z'_{A2}) = 3.557716045 \cdot 10^5$. Это позволяет ввести характерную энергию гравитационного поля $E_{0A} = N_{0A} E_G = 4.311073329$ эВ и записать спектр энергий $E_{0Ai} = 2E_{0A} S_{iu}$ ($i = 1,2,3,4$). Численные значения энергий ветвей спектра равны: акустические ветви $E_{0A1} = 403.0127147$ мэВ, $E_{0A2} = 284.9730179$ мэВ (близка к энергии ε^*_{HG}); оптические ветви $E_{0A3} = 3.908060614$ эВ, $E_{0A4} = 4.596046347$ эВ. Отметим, что энергии $\varepsilon_{z\mu}$, E_{0A} близки к граничной энергии 4.3 эВ, которая наблюдается при безнейтринном двойном β-распаде в экспериментах с изотопом ^{136}Xe [23]. Это дает возможность интерпретировать эти энергии как энергии покоя нейтрино Майорана.

С другой стороны, на основе энергий E_{0A}, E_{H0} и условия $E_{d\nu} = N_{0H\nu} E_{0A} / 2 = \mathrm{E}_{H0}(S'_{04} + 0.5) = 129.2947339$ ГэВ можно получить оценку полного числа нейтрино $N_{0H\nu} = 5.99826187 \cdot 10^{10}$, которая близка к $N_{0\nu}$ из (25). Энергия $E_{d\nu}$ близка к локальному минимуму между локальными максимумами на зависимостях числа фотонов от их энергии, которые фиксируются детекторами в экспериментах на большом адронном коллайдере (LHC) [24].

Далее находим оценку энергии акустической ветви темных реликтовых фотонов (виртуальные реликтовые фотоны в конденсате) $\varepsilon'_{dm2} = N_{0A}\varepsilon_r = 2\varepsilon'_{dm} S_{2u} = 167.074614$ эВ. Отсюда находим оценку энергии темной материи $\varepsilon'_{dm} = 2.527505655$ кэВ. Между энергиями ветвей спектров $\varepsilon'_{dmi} = 2\varepsilon'_{dm} S_{iu}$ и $\varepsilon_{dmi} = 2\varepsilon_{dm} S_{iu}$ для темной материи с ε'_{dm} и $\varepsilon_{dm} = 1.787216353$ кэВ выполняются условия

$$\varepsilon'_{dm} = \varepsilon'_{dm4} - \varepsilon'_{dm2} = \varepsilon'_{dm3} + \varepsilon'_{dm1}; \quad \varepsilon_{dm} = \varepsilon_{dm4} - \varepsilon_{dm2} = \varepsilon_{dm3} + \varepsilon_{dm1}. \tag{35}$$

Численные значения энергий ветвей спектров равны: акустические ветви $\varepsilon'_{dm1} = 236.27919$ эВ, $\varepsilon_{dm1} = 167.074614$ эВ, $\varepsilon_{dm2} = 118.139591$ эВ; оптические ветви $\varepsilon'_{dm3} = 2.291226464$ кэВ, $\varepsilon'_{dm4} = 2.694580269$ кэВ, $\varepsilon_{dm3} = 1.620141739$ кэВ, $\varepsilon_{dm4} = 1.905355943$ кэВ. Прямые эксперименты (DAMA/LIBRA, CoGeNT, CRESST-II collaborations) [13] по наблюдению спектра и углового распределения γ-излучения, спектра модуляции из галактического центра выявляют следующие особенности: на фоне стохастического поведения наблюдаются основной локальный максимум вблизи 2.4 кэВ и два локальных основных минимума вблизи 1.9 кэВ, 2.7 кэВ.

В нашей модели расчётные значения энергий ε_{dm4}, ε'_{dm4}, которые соответствуют локальным минимумам (потенциальным ямам) оптических ветвей энергий для темной материи с энергиями покоя ε_{dm}, ε'_{dm}, практически совпадают с положением указанных локальных минимумов в экспериментальном спектре модуляции. Значение энергии $\varepsilon'_{dm3} + \varepsilon_{dm2} = 2.409366055$ кэВ практически совпадает с положением основного локального максимума. При этом энергия ε_{dm2}, которая лежит на акустической ветви спектра энергий, несет информацию о передаваемом импульсе γ- излучения (о полуширине линии излучения). Таким образом, информацию о наличии сверхбезизлучательных состояний, темной материи, темных реликтовых фотонов можно

извлекать из экспериментальных спектров γ-излучения по наличию локальных минимумов на фоне стохастического поведения сигналов.

Аналогично можно извлекать информацию о сверхбезизлучательных состояниях гравитационного поля по наличию локальных минимумов с энергиями на оптических ветвях E_{0A3}, E_{0A4} (поля деформации), о передаваемых импульсах гравитационного поля (поля напряжений) с энергиями на акустических ветвях E_{0A1}, E_{0A2} и энергии покоя E_{0A}.

Модель $\mathbf{A_1}$. В рамках этой модели полагаем $a_0 = a_m - 1$. Это условие дает возможность ввести функции плотности распределения a_m, a'_m для частиц Ферми типа и функции плотностей распределения N_{zg}, N'_{zg}, n_{zg}, n'_{zg}, для частиц Бозе типа

$$a_m + a'_m = 1;\ \ 2a_m = 1 - b_m;\ \ 2a'_m = 1 + b_m;\ \ 4b_m = z'_\mu(z'_\mu + 2);\ \ z'_{A2} = N_{ra} - z'_\mu; \tag{36}$$

$$N'_{zg} - N_{zg} = 1;\ \ N_{zg} = (1 + b_m)/(1 - b_m);\ \ N'_{zg} = 8/[4 - z'_\mu(z'_\mu + 2)]; \tag{37}$$

$$n'_{zg} - n_{zg} = 1;\ \ n_{zg} = (1 - b_m)/(1 + b_m);\ \ n'_{zg} = 8/[4 + z'_\mu(z'_\mu + 2)]. \tag{38}$$

Параметр $b_m = a'_m - a_m$ (который допускает интерпретацию как разности заселенностей для частиц Ферми типа) из (36) подтверждает наличие сверхсостояния, связанного с космологическим красным смещением z'_μ. С другой стороны, числа заполнения N'_{zg}, n'_{zg} из (37), (38) подтверждают возможность описания сверхбезизлучательных состояний (темной материи) с помощью глюонного поля ($n_g = 8$), перенормированного вкладами за счет космологического красного смещения z'_μ.

Выражения (36)–(38) записаны при выполнении условия $-1 \le b_m \le 1$. При увеличении z'_μ параметр b_m становится больше 1. При этом функции плотности распределения для частиц Ферми типа (36) переходят в функции плотности распределения для частиц Бозе типа $a'_m - |a_m| = 1$; функции плотности распределения для частиц Бозе типа (37) переходят в другие функции плотности распределения для частиц Бозе типа $|N_{zg}| - |N'_{zg}| = 1$; функции плотности распределения для частиц Бозе типа (38) переходят в функции плотности распределения для частиц Ферми типа $n'_{zg} + |n_{zg}| = 1$. При $z'_\mu = 7.18418108$ получим численные значения: $|a_m| = 7.747602495$, $|N'_{zg}| = 0.129072187$, $|n_{zg}| = 0.885682963$, $n'_{zg} = 0.114317037$. Это дает возможность определить частоту $\nu'_{zg} = n'_{zg}\nu_{G0} = 335.0005326\,\text{МГц}$, близкую к частоте $330\,\text{МГц}$, на которой доминирует темная материя из наблюдений радиофиламентов [13]. Таким образом, в рамках этой модели A_1 возможны описания процессов взаимных превращений частиц Бозе и Ферми типов. Это может найти применение в физике нейтрино, нейромедицине (для описания нейромедиаторов). Детальный анализ модели $\mathbf{A_1}$ требует отдельного исследования.

Выводы. На основе гипотезы иерархического строения Вселенной установлены связи параметров фрактальных космологических объектов типа черных дыр, нейтронных звезд и модельного нанообъекта. В качестве активного нанообъекта рассмотрена кварцевая наночастица, захваченная в оптическую ловушку и помещенная в вакуум. Получены оценки размера этой наночастицы и предельной частоты вращения в лазерном поле с круговой поляризацией. Показано, что частота вращения зависит от

свойств физического вакуума. В качестве других активных нанообъектов рассмотрены атомные дефекты в нанотрубках нитрида бора. Получены оценки длин волн квантовой эмиссии отдельных фотонов от таких эмиттеров.

В рамках анизотропной модели получены зависимости компонент эффективной восприимчивости для активных объектов как нелинейных функций от числа квантов поля Хиггса, черных дыр. Показано, что возможно гистерезисное поведение плотности нейтрино как функции от двух указанных аргументов. Дополнительная зависимость от космологического красного смещения приводит к нелинейным функциям от трех аргументов, что характерно для объемных фрактальных структур Вселенной.

Установлена связь параметров нейтрино с бозоном и полем Хиггса, что дает возможность оценить число, массу и энергию покоя нейтрино.

Исследованы сверхбезизлучательные состояния активных фрактальных объектов в рамках модели $\mathbf{A_0}$ (с учетом обычного красного смещения z'_{2A}). Показано, что информацию о наличии сверхбезизлучательных состояний, темной материи, темных реликтовых фотонов можно извлекать из экспериментальных спектров γ - излучения по наличию локальных минимумов на фоне стохастического поведения сигналов. В рамках модели $\mathbf{A_1}$ (с учетом космологического красного смещения z'_{μ}) введены функции плотности распределения для частиц Ферми и Бозе типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ashkin A. Optical Trapping and Manipulation of Neutral Particles Using Lasers / A. Ashkin. – World Scientific Publishing Company, 2006. – 940 p.
2. Strickland D. Compression of amplified chirped optical pulses / D. Strickland, G. Mourou // Optics Communications. –1985. – V. 56, No 3. – P. 219-221.
3. Нелинейности в периодических структурах и метаматериалах / под ред. Ю.С. Кившаря и Н.Н. Розанова. – М.: Физматлит, 2014. – 384 с.
4. Самарцев В.В. Фемтосекундная лазерная спектроскопия / В.В. Самарцев, В.Г. Никифоров. – М.: Тровант, 2017. – 401 с.
5. GHz Rotation of an Optically Trapped Nanoparticle in Vacuum / R. Reimann, M. Doderer, E. Hebestreit et al. // arXiv:1803.11160v2 [physics.optics] 5 p. 21 Jul 2018.
6. Stable emission and fast optical modulation of quantum emitteers in boron nitride nanotubes / J. Ahn, Z. Xu, J. Bang et al. // arXiv:1806.06146v1 [quant-ph] 4 p. 15 Jun 2018.
7. Abramov V.S. Active Nanoelements with Variable Parameters in Fractal Quantum Systems / V.S. Abramov // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2018. – No 82(8). – P. 1062-1067.
8. Abramov V. Higgs Field and Cosmological Parameters in the Fractal Quantum System / V. Abramov // XI International Symposium on Photon Echo and Coherent Spectroscopy (PECS-2017). EPJ Web Conf. 161, 02001. 2 p. 2017.
9. Abramov V.S. Cosmological Parameters and Higgs Boson in a Fractal Quantum System / V.S. Abramov // CMSIM Journal. – 2017. – No 4. – P. 441-455.
10. Абрамов В.С. Анизотропная модель и переходные сигналы от бинарных космологических объектов: черных дыр, нейтронных звезд / В.С. Абрамов // Вестник Донецк. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 55-68.
11. Abramov V.S. Superradiance of gravitational waves, relic photons from binary black holes, neutron stars / V.S. Abramov // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2019. – No 83(3). – P. 364-369.
12. Abramov V.S. Gravitational Waves, Relic Photons and Higgs Boson in a Fractal Models of the Universe / V.S. Abramov // In the book “11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference”. Springer Proceedings in Complexity. Editors Christos H. Skiadas and Ihor Lubashevsky. – Springer, 2019. – P. 14-28.
13. Hooper D. The empirical case for 10-GeV dark matter / D. Hooper // Dark Universe. – 2012. – No 1. – P. 1-23.
14. Suh P.K. Dark Matter and Energy in the Universe of Symmetric Physics / P.K. Suh // IJARPS. – 2018. – No 5. – P. 19-34.
15. Abramova O.P. Attractors and Deformation Field in the Coupled Fractal Multilayer Nanosystem / O.P. Abramova, A.V. Abramov // CMSIM Journal. – 2017. – No 2. – P. 169-179.

16. Абрамова О.П. Взаимовлияние аттракторов и отдельных стохастических процессов в связанных фрактальных структурах / О.П. Абрамова // Вестник Донецк. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 1. – С. 50-60.
17. Абрамова О.П. Упорядочение операторов полей смещений отдельных квантовых точек, эллиптических цилиндров в связанных фрактальных структурах / О.П. Абрамова // Вестник Донецк. ун-та. Сер. А. – 2018. – № 1. – С. 3-14.
18. Dicke R.H. Coherent in spontaneous radiation processes / R.H. Dicke // Phys. Rev. – 1954. – V. 93. No 1. – P. 99-110.
19. Bonifacio R. Quantum statistical theory of superradiance. I. / R. Bonifacio, P. Schwendimann, F. Haake // Phys. Rev. – 1971. – V. A4. No 1. – P. 302-313.
20. Bonifacio R. Quantum statistical theory of superradiance. II. . / R. Bonifacio, P. Schwendimann, F. Haake // Phys. Rev. – 1971. – V. A4. No 3. – P. 854-864.
21. Fukuda Y. Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos / Y. Fukuda et al. // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81, No 8. – P. 1562-1567.
22. Ahmad Q. R. Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory / Q. R. Ahmad et al. // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 89, No 1(011301). – P. 1-6.
23. Barnett R. M. Review of Particle Physics / R. M. Barnett et al. // Phys. Rev. D54 – 1996. – No 1. – P. 1-7.
24. Кэрролл Ш. Частица на краю вселенной. Как охота на бозон Хиггса ведет нас к границам нового мира / Ш. Кэрролл. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 352 с.

Поступила в редакцию 13.03.2019 г.

ACTIVE NANOOBJECTS, NEUTRINO AND HIGGS BOSON IN FRACTAL QUANTUM SYSTEMS

V.S. Abramov

Theoretically the relationships of the main parameters of active nanoobjects with the Higgs boson and the Higgs field in a fractal quantum systems are investigated. Nanoparticles, atomic defects, quantum dots, neutrino can be as active nanoobjects. Using the example of a silica nanoparticle, trapped in an optical trap and placed in a vacuum, estimates of the limiting frequency of rotation of a particle in a laser field with circular polarization and the size of the nanoparticle are obtained. Using the example of atomic defects in boron nitride nanotubes, we obtained estimates of the wavelengths of quantum emission of separate photons. The neutrino is characterized by the phenomenon of hysteresis. The estimation of the neutrino rest mass is obtained. Super-nonradiative states of physical fields are investigated. The properties of nanoparticles depend on pressure, state of physical vacuum and cosmological parameters.

Keywords: active nanoobjects, neutrino, Higgs boson, Higgs field, fractal quantum systems, optical traps, nanoparticles, frequency of rotation, physical vacuum, super-nonradiative states, fractal cosmology.

Абрамов Валерий Сергеевич
Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник;
ГУ «Донецкий физико-технический институт имени А.А. Галкина» (г. Донецк);
e-mail: vsabramov@mail.ru

Abramov Valeriy Sergeevich
Candidate of Physics and Mathematical Sciences, Senior Research Officer
Donetsk Institute for Physics and Engineering named after A.A. Galkin,

УДК 004.67

ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ: ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

© 2019. *В.В. Данилов, В.И. Тимченко*

Носителем информации в оптических информационных технологиях является электромагнитное поле оптического диапазона (10^{14}–10^{16}Гц). Информация переносится многомерными сигналами (изображениями), описываемых функциями четырех переменных, трех пространственных координат и времени. Эта особенность оптического диапазона привела к возможности значительного увеличения объема обрабатываемой информации. Переход от носителя информации в радиоэлектронике (ток, напряжение), в общем случае одномерного (функции координат или времени), к многомерному носителю – электромагнитному полю (функция пространственных координат и времени) требует соответствующих радиофизических разъяснений.

Ключевые слова: оптические информационные технологии, преобразования Фурье, аналитические функции, колебательный процесс, функция смещения, спектральная плотность сигнала, сверка функций, энергетический спектр.

Введение. Процесс передачи, приема и хранения информации (обработки) в оптическом диапазоне непрерывно сопровождается преобразованием пространственно - распределенных колебаний электромагнитного поля. Взаимодействуя с соответствующей элементной базой оптической системы определенного функционального назначения, основу которой составляют линзы, зеркала, дифракционные решетки и т. д., существует реальность выполнения сложных математические операции, например, преобразований Фурье и Френеля, преобразования свертки и автокорреляции и т. п. Время обработки информации таких оптических систем определяется скоростью распространения электромагнитных волн. Поэтому оптические системы обработки, по сути, являются вычислительными машинами реального времени, в которых циркулируют и одномерные (сигналы) и многомерные (изображения) представления информации [1–6].

В исследованиях, проведенных над оптическими системами обработки в [1–6] показана потребность обоснования физических основ их функционирования, в частности, выяснения математических моделей сигналов, наиболее приемлемых для описания процессов обработки.

Основная часть. Как уже отмечалось [1–6], сигналы оптической системы обработки, описываются функциями координат или времени. Сигнал, распространяясь по оптической системе обработки, взаимодействует с ее элементной базой. Результатом такого взаимодействия является изменение спектрального состава сигнала, а соответственно и информации. Преобразование Фурье (ПФ) является отличным «инструментом» позволяющим исследовать такие изменения. Сигналы, представляющие колебательный процесс описываются различного рода (по степени сложности) функциями. ПФ над широко используемыми функциями для описания сигналов будет показана в настоящей работе.

Математическую операцию, ПФ, можно реализовать в виде ряда Фурье. Если функция удовлетворяет условиям Дирихле [7–12] а период ее можно представить в виде $f(t) = f(t - nT)$, где T – период, n – целое число, и устремить ее к бесконечности, тогда ее можно разложить в ряд Фурье:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=\infty}^{\infty}A_k\exp(ik\Omega t).$$

Комплексные амплитуды гармонических составляющих пропорциональны A_k и равны:

$$A_k=\Omega\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\exp(-ik\Omega t)dt,\quad \Omega=2\pi/T.$$

Переписав предыдущее выражение в форме: $A_k(2\pi)^{-1}=T^{-1}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\exp(-ik\Omega t)dt$, видно, что k-я комплексная амплитуда есть среднее значение функции $f(t)$ за период T с весом $\exp(-ik\Omega t)$. Совокупность гармонических составляющих, возникающих при математическом разложении функции $f(t)$, называют её спектром. Каждая гармоническая составляющая полностью определяется комплексной амплитудой $A_k/(2\pi)$ и частотой $k\Omega$. Совокупность частот гармонических составляющих представляет частотный спектр функции $f(t)$. Так как амплитуды, величины комплексные: $A_k/(2\pi)=(0,5/\pi)|A_k|\exp(i\varphi_k)$, то для полной характеристики сигнала (изображения) нужно знать еще амплитудный и фазовый спектры. Таким образом, информация переносимая колебательным (волновым) процессом полностью описывается его частотным, фазовым и амплитудным спектром.

Когда период колебаний T стремится к бесконечности, частота Ω уменьшается до нуля, спектральные линии сближаются, спектр из дискретного переходит в сплошной. Обозначим $k\Omega=\omega$ (текущая частота) и рассмотрим предел $\lim(A_k/\Omega)=$ $=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-i\omega t)dt=G(\omega)$, который называют спектральной плотностью (спектральной функцией). При ограничении интеграла, все коэффициенты A_k будут стремиться к нулю. При $T\to\infty$, амплитуды гармонических составляющих, будут равны нулю. Зная $G(\omega)$, можно найти $f(t)$, используя комплексную форму ряда Фурье: $f(t)=\lim_{T\to\infty}(2\pi)^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(A_k/\Omega)\exp(i\omega t)\Omega$ или $f(t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$. Выражения для $G(\omega)$ и $f(t)$, представляют математическое описание прямого и обратного преобразования Фурье.

Физический смысл спектральной плотности $G(\omega)$, состоит в следующем. При $T\to\infty$, A_k и Ω стремятся к нулю, т.е. $A_k\to dA$, $\Omega\to d\omega$ и $\lim_{T\to\infty}(A_k/\Omega)=dA/d\omega=G(\omega)$. Тогда, спектральная плотность пропорциональна плотности амплитуд. Между спектральной плотностью $G(\omega)$ функции $f(t)$ заданной на интервале от $-T/2$ до $T/2$ и комплексными амплитудами гармонических составляющих функции, продолженной периодически в обе стороны оси t, существует простая связь. Сравнивая A_k и $G(\omega)$, получим: $A_k=\Omega G(k\Omega)=(2\pi/T)G(k\Omega)$. Полученное выражение позволяет определить спектр периодических функций. Так как амплитуды равны $A_k/(2\pi)$ то они будут определяться выражением $T^{-1}G(k\Omega)$. Другими словами, комплексные амплитуды равны (с точностью до масштабного множителя $1/T$) спектральной плотности, определенной в

точках $k = 0, \pm 1, \pm 2...$. Определение комплексной амплитуды, связано с понятием комплексного колебания. Пусть существует гармоническое колебание, описываемое выражением $u = u_m \cos(\omega t + \varphi)$. Формулы Эйлера позволяют представить эти колебания в форме $u = (u_m / 2) \exp i\varphi \exp(i\omega t) + (u_m / 2) \exp(-i\varphi) \exp(-i\omega t)$.

Таким образом, действительным гармоническим колебаниям $u = u_m \cos(\omega t + \varphi)$ можно сопоставить комплексные гармонические колебания $u = u_m \exp(i\varphi) \exp(i\omega t)$ с амплитудой $u_m \exp(i\varphi)$.

Описание колебательного процесса с помощью ПФ. Колебательный процесс описывается определенными функциями**.** Колебаний, описываемых функцией вида $f(t) = \begin{Bmatrix} \exp(-\alpha t), t > 0 \\ 0, \qquad t < 0 \end{Bmatrix}$, характеризуется скоростью убывания функции α. Найдем спектральную плотность $f(t)$. Если принять амплитуду $f(t)$ равной единице, данная функция при $t = 0$, не определена. График функции $f(t) = \begin{Bmatrix} \exp(-\alpha t), t > 0 \\ 0, \qquad t < 0 \end{Bmatrix}$, хорошо известен в радиофизике, это импульс экспоненциальной формы. Примем, $f(0) = 0{,}5$, что соответствует величине, которую дает ПФ. Спектральная плотность экспоненциального импульса, определяется выражением [7, 8]:

$$G(\omega) = \int_0^\infty \exp(-\alpha t) \exp(-i\omega t) dt = 1/(\alpha - i\omega).$$

Знание спектральной плотности колебания (импульса) дает возможность найти математическое описание сигнала, используя обратное ПФ, $f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega t / (\alpha + i\omega) d\omega.$

При $f(0) = 0{,}5$ и $t = 0$ имеем $f(0) = \dfrac{0{,}5}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega / (\alpha + i\omega)$. В данном выражении интеграл следует понимать в смысле главного значения:

$$f(0) = (0{,}5/\pi) \lim \int_{-A}^{A} d\omega / (\alpha + i\omega) = 0{,}5/(i\pi) \lim \int_{-A}^{A} d\omega / (\alpha + i\omega) =$$

$$= 0{,}5/(\pi i) \lim \ln(A - i\alpha)/(-A - i\alpha) = 0{,}5/(\pi i) \ln(-1) = 0{,}5/(\pi i) \ln \exp i\alpha = 0{,}5.$$

Таким образом, найдена спектральная плотность экспоненциальной функции. Выясним, как будет изменяться функция времени, когда спектральная плотность изменяется по экспоненциальному закону

$$G(\omega) = \begin{Bmatrix} \exp(-\omega t), & \omega > 0 \\ 0{,}5, & \omega = 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{Bmatrix}.$$

Обратное ПФ этого выражения получим в виде:

$$f(t) = (0{,}5/\pi) \int_0^\infty \exp(-\alpha\omega) \exp(-i\omega t) dt = (0{,}5/\pi) / (\alpha - it).$$

Функция описывает комплексное колебание, действительная и мнимая части которого равны соответственно $(0{,}5/\pi)[\alpha/(\alpha^2 + t^2)]$ и $(0{,}5/\pi)[t/(\alpha^2 + t^2)]$.

Ступенчатая функция. Аналитически ступенчатая функция записывается в виде [4]

$$\gamma(t)=\begin{cases}0,5, & t>0\\ 0, & t=0\\ -0,5, & t<0\end{cases}.$$

«Ступенька» может быть получена из двух экспоненциальных импульсов [5]. При $a\to 0$ спектральная плотность которых, равна:

$$G(\omega)=-0,5\int_{-\infty}^{0}\exp(\alpha t)\exp(-i\omega t)dt+0,5\int_{-\infty}^{0}\exp(-\alpha t)\exp(-i\omega t)dt=-i\omega/(\alpha^2+\omega^2).$$

Если $a=0$, спектральная плотность функции $\gamma(t)$: $G(\omega)=1/(i\omega)$.

Функция Дирака (дельта-функция) определяется производной по времени от функции $\delta=d\gamma(t)/dt$ [7, 8]. Эта функция всюду на числовой оси равна нулю, за исключением точки $t=0$, где она обращается в бесконечность, причем, площадь, ограниченная этой функцией, равна единице [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_{-x}^{x}\delta(t)dt=1,\ \varepsilon>0.$$

Функция Дирака не является аналитической и относится к обобщенным функциям [12]. К δ-функции приходят рассматривая предельные формы некоторых аналитических функций [12]. Покажем, что функция $f(t)=(1/\pi)[\alpha/(\varepsilon^2+t^2)]$ стремится к $\delta(t)$ при $a\to 0$. Видно, что $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=1$, и при $t=0$ получаем $f(0)=1/(\pi a)$. Если $a\to 0$, то пик возрастает; так как при этом площадь не изменяется, тогда функция сужается [7]. Простое приближение к δ-функции получается из функции описывающей импульс прямоугольной формы площадью равной единице [9,10]. Если длительность импульса τ, то амплитуда равна $1/\tau$. Когда длительность τ стремится к нулю, амплитуда возрастает до бесконечности. Отсюда следует важное свойство дельта-функции представленное в виде аналитического выражения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0).$$

Если $a=0$, то $f(t)=0$ при всех t, кроме $t=0$. В этой точке функция обращается в бесконечность. Таким образом,

$$\delta(t)=\lim_{\alpha\to 0}(1/\pi)[\alpha/(\alpha^2+t^2)].$$

Равенство $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$ справедливо для любой точки, в которой функция $f(t)$ – непрерывна. У этого равенства пределы по бесконечности, заменим на $t_0-\varepsilon$ и $t_0+\varepsilon$, где ε – произвольное положительное число. Выберем ε настолько малым, чтобы в ределах от $t_0-\varepsilon$ до $t_0+\varepsilon$ функция $f(t)$ почти не изменяется. Вынося за знак интеграла $f(t_0)$, получим $f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$. Равенство $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$ показы-

вает, что спектральная плотность δ -функции равна $G(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\exp(-i\omega t)dt=1$, т.е. спектральная плотность δ -функции на всех частотах одинакова и равна единице. Найдем интегральное представлением δ -функции. Так как спектральная плотность $G(\omega)=1$, то

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega t)d\omega=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega t d\omega .$$

Это соотношение применим для вычисления некоторых определенных интегралов [5]. Интегрируя

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega t)d\omega=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega t d\omega ,$$

находим

$$\delta(t)dt=\gamma(x)=\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\omega}d\omega .$$

При $x=1$ получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sin\omega/\omega)d\omega=2\int\limits_{0}^{\infty}(\sin\omega/\omega)d\omega=\pi .$$

Функция Хэвисайда или, «единичный скачок»: $1(t)=\begin{Bmatrix}1,\ t>0\\ 0,5\ ,t=0\\ 0,\ t<0\end{Bmatrix}$. Учитывая что $1(t)=\gamma(t)+0{,}5$, ее спектральная плотность равна $1/(i\omega)+\pi\delta(\omega)$. С помощью функции $1(t)$ можно выражение для экспоненциального импульса записать в виде: $f(t)=\exp(-\alpha t)1(t)$. Если спектральная плотность изменяется по закону единичного скачка $G(\omega)=1(\omega)$, то функция, описывающая это колебание, имеет вид $f(t)=-1/(2\pi i t)+0{,}5\delta(t)$.

Функция Гаусса, вида $f(t)=\exp(-\alpha t^2),\ \alpha>0$ широко используется в информационных технологиях, например, при определении погрешностей измерений. При определении ее спектральной плотности потребуется значение интеграла $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha t^2)dt$ [5]. Рассмотрим:

$$I^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x^2)dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha y^2)dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[-\alpha(x^2+y^2)]dxdy .$$

Используя полярную систему координат, введем следующие переменные: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dxdy=\rho d\rho d\varphi$. Тогда

$$I^2=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\rho d\rho d\varphi=2\pi\int\limits_{0}^{\infty}\exp(-\alpha\rho^2)\rho d\rho=\frac{\pi}{a},\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha t^2)dt=\sqrt{\pi/a} .$$

Для функции Гаусса, спектральная плотность определяется [12]:

$$G(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha t)\exp(-i\omega t)dt .$$

Степень функции под знаком интеграла преобразуем в виде:

$$-\alpha t^2 - i\omega t = -\left(t\sqrt{a} + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right) - \frac{\omega^2}{4a}.$$

Вводя вместо t новую переменную $x = t\sqrt{a} + i\omega/(2\sqrt{4a})$, получим:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\exp[-\omega^2/(4a)]dx/\sqrt{a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp[-\omega^2/(4a)],$$

т. е. спектральная плотность функции Гаусса также изменяется по закону Гаусса.

Свойства ПФ в колебательных процессах. Знание физических свойств математических ПФ, позволяет находить спектральные плотности функций (процессов), не вычисляя соответствующих интегралов.

Пусть существует А множество функций времени, а В – множество их спектральных плотностей. Известно [11], что ПФ устанавливают взаимно однозначное соответствие между элементами множеств А и В: $G = Ff$; $f = F^{-1}G$, где F и F^{-1} – операторы прямого и обратного ПФ:

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \{...\}\exp(-i\omega t)dt, \quad F^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{...\}\exp(-i\omega t)d\omega.$$

Ориентируясь на эти преобразования аргументы функций f и G могут быть любыми, следовательно, природа физических явлений, которые математически описываются этими функциями может быть произвольной. В теории колебаний (сигналов), как правило, f – функции времени, а G – функции частоты. Например, в теории антенн f и G – функции координаты. Предположив, что антенна, проводник длиной $2a$ расположенный вдоль оси x, по которому протекает ток, описываемый функцией $I(x)$, диаграмма направленности электромагнитного излучения будет описываться выражением [10]:

$$G(x) = \int_{-a}^{a} I(\xi)e^{-i\xi bx}d\xi,$$

где $I(x)$ – распределение тока вдоль антенны; b – постоянная, $b = k/H$, $k = 2\pi/\lambda$. Отсюда видно, что математическое описание диаграммы направленности антенны, это результат применения прямого ПФ к распределению тока в проводе. Обратим внимание, что ток, и поле в дальней зоне являются функциями координат, значения которых связаны ПФ. В информационных технологиях, например, в обработке радиосигналов также имеют дело с функциями координат.

Линейность ПФ. К линейным операторам относятся те, для которых выполняется условие $\hat{L}(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1\hat{L}f_1 + C_2\hat{L}f_2$, где $\hat{L}$ – линейный оператор, C_1 и C_2 – произвольные постоянные: f_2 и f_2 – произвольные функции [11]. Тогда, линейный оператор суммы равен сумме операторов и постоянную величину можно вынести за знак оператора, откуда следует, что оператор Фурье линеен. Найдем спектральную плотность колебания, часто используемого в оптических информационных технологиях, описываемого функцией $f(t) = \exp(\alpha t)1(-t)$. Известно, что колебаниям описываемым функциями $f_1 = \exp(-\alpha|t|)$ и $f_2 = \exp(-\alpha t)1(t)$ соответствуют спектральные плотности [10]: $G_1 = 2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$, $G_2 = (\alpha + i\omega)^{-1}$. Функция, может быть представлена в виде линейной комбинации f_1 и f_2: $f = f_1(t) - f_2(t)$, поэтому его спектральная плотность равна

$$G(\omega) = 2\alpha / (\alpha^2 + \omega^2) - (\alpha + i\omega)^{-1} = (\alpha - i\omega)^{-1}.$$

Прямое и обратное ПФ. Обратное преобразование умножим на 2π и заменим i на (-1), в результате получим преобразование вида: $F = 2\pi(F^{-1})*$, тогда $F^{-1} = (1/2\pi)F*$. Преобразование, комплексно сопряженное ПФ, изменяет знак аргумента функции на обратный: $Ff(t) = G(\omega)$, $F*f(t) = G(-\omega)$; $F^{-1}G(\omega) = f(t)$, $(F^{-1})*G(\omega) = f(-t)$. Эти преобразования показывают результат многократного применения к данной функции математической операции ПФ. Применяя к функции $f(x)$ прямое преобразование дважды, то получаем $FFf(x) = FG(\varpi) = 2\pi(F^{-1})*G(\varpi) = 2\pi f(-x)$.

Следовательно, результатом двукратного применения ПФ является функция, пропорциональная исходной, в которой знак аргумента изменен на обратный.

В информационных технологиях, в частности, оптических (ОИТ), ПФ находят широчайшее применение. Технически, математическая операция, одномерное ПФ, может быть реализовано с помощью цилиндрических линз или зеркал. Обратное преобразование в ОИТ заменяется прямым. Полученная формула позволяет утверждать, что применение прямого преобразования вместо обратного дает нужную функцию (с коэффициентом пропорциональности 2π), у которой изменен знак аргумента, что в обработке изображений, соответствует перевернутому изображению.

Четные и нечетные функции при реализации ПФ. Если $f(x)$ – четная функция, то ее ПФ также четная функция, $G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-ixt)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos xtdt$, откуда $G(x) = G(-x)$. Для определения спектральных плотностей четных функций можно пользоваться косинус-ПФ [9,10]. Тогда, спектральная плотность $G(x)$ – действительная функция x. Если $f(x)$ – нечетная функция, тогда ее спектральная плотность, мнимая и также нечетная функция. Действительно, $G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-ixt)dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin xtdt$; откуда $G(x) = -G(-x)$.

Реализация ПФ комплексно сопряженных функций. Если $f(t)$ – функция, описывающая комплексные колебания, спектральная плотность которых $G(\omega)$, то спектральная плотность колебаний, описываемых комплексно-сопряженной функцией $f(t)$ будет определяться следующим. Обозначим ее:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f*(t)\exp(-i\omega t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_b(t)\exp(-i\omega t)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f_m(t)\exp(-i\omega t)dt.$$

Однако, $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_b(t)\exp(-i\omega t)dt + i\int_{-\infty}^{\infty} f_m(t)\exp(-i\omega t)dt$. Комплексно сопряженная величина $G*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_b(t)\exp(-i\omega t)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f_m(t)\exp(i\omega t)dt$, отличается от I только знаком у переменной ω. Следовательно, $I = G*(-\omega)$. Тогда для математического описания спектральной плотности колебания, комплексно сопряженного исходному, необходимо заменить спектральную плотность данного колебания на комплексно сопряженную функцию и изменить знак в аргументе.

Масштабирование. Если функции $f(t)$ соответствует спектральная плотность $G(\omega)$, то при изменении масштаба, т е. $f(at)$, ответ возможен при $a>1$ и $a<1$. Первый вариант, соответствует сжатию колебаний, второй – растяжению. Спектральная плотность функции $f(at)$ выглядит [4]:

$$G_a(\varpi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(at)\exp(-i\omega t)dt=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f\ (x)\exp(-i\frac{\omega}{a}x)dx=(1/a)G(\omega/a).$$

Следовательно, сжатие колебаний сопровождается растягиванием его спектральной плотности, а при растяжении – сжатию. В информационных технологиях, например, обработки радиосигналов известно [7,8]: сигналы меньшей длительности имеют более широкий спектр. Известно также [8], что ширина диаграммы направленности антенны обратно пропорциональна диаметру антенны $\theta\approx\lambda/D$. Результат – следствие теоремы масштабов.

Связь между функциями подвергнутыми ПФ. Если $G(\omega)$, спектральная плотность функции $f(t)=|f(t)|\exp[i\arg f(t)]$ (заметьте, комплексной функции), то сместив $G(\omega)$ на величину ω_0, получим $G(\omega-\omega_0)$. Далее, определим математическое описание колебании частотой $f_{см}(t)$, соответствующего смещенной спектральной характеристике. Используя обратное ПФ, получаем $f_{см}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega-\omega_0)\exp(i\omega t)d\omega$. Введя новую переменную $\Omega=\omega-\omega_0$, и перепишем $f_{см}(t)$ в виде

$$f_{см}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\exp(i\Omega t)d\Omega\exp(i\omega_0 t).$$

Сделав преобразования получим $f_{см}(t)=f(t)\exp(i\omega_0 t)=|f(t)|\exp\{i[\omega_0 t+\arg f(t)]\}$. Если рассматривать $f(t)$, как функцию описывающую управляющие колебания, то колебания описываемые $f_{см}(t)$ будут модулированными (по амплитуде и фазе), т.е. становятся носителями информации, т.е. сигналом. Таким образом, смещению спектральной плотности на частоту ω соответствует переход к сигналу, имеющему несущую частоту ω_0. Рассмотрим, что произойдет со спектральной плотностью, если сместим функцию времени $f(t)$ на t_0. Согласно прямому ПФ

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\exp(-i\omega t)dt=\exp(-i\omega t_0)G(\omega).$$

Откуда следует, что при смещении функции времени происходит модуляция спектральной плотности. При неизменности модуля функции, ширина спектра несмещенной и смещенной функций одинакова, изменяется только аргумент спектральной плотности.

Прямое ПФ спектральной плотности колебаний. Допустим, что функция, описывающая колебания $f(t)$, а также ее спектральная плотность $G(\omega)$ – известны, т.е. $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\exp(i\omega t)d\omega.$ Пусть существуют другие колебания, изменяющиеся во времени так же как спектральная плотность первых колебаний, т.е. как $G(t)$. Его спектральная плотность $\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\exp(-i\omega t)dt$. Сравнивая это выражение с выражением для

$f(t)$ видим, что оно равно колебаниям, умноженных на 2π, у которого время t заменено на $(-\omega)$. Т.е, если сигнал $f(t)$ имеет спектральную плотность $G(\omega)$, то колебания $G(t)$ – спектральную плотность $2\pi f(-\omega)$. Например, так как спектральная плотность сигнала $f(t)$ есть $1/(i\omega)+\pi\delta(\omega)$, то сигнал $1/(it)+\pi\delta(t)$ имеет спектральную плотность $2\pi\cdot 1(-\omega)$.

Связь между скалярными произведениями функций координат и их спектральных плотностей. Формула, устанавливающая связь между скалярными произведениями функций координат и их спектральных плотностей, получила название в радиофизике, формулы Релея. Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$, две функции времени со спектральными плотностями $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$, то скалярное произведение функций времени и скалярное произведение спектральных плотностей определяются равенствами

$$(f_1, f_2)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(t) f_2(t)dt,\ (G_1, G_2)=\int_{-\infty}^{\infty} G_1^*(\omega) G_2(\omega)dt.$$

Математически формула Релея записывается в виде $(f_1, f_2)=(0{,}5/\pi)(G_1, G_2)$ или $\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(t) f_2(t)dt=(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} G_1^*(\omega) G_2(\omega)d\omega$, т. е. скалярное произведение двух функций равно скалярному произведению их спектральных плотностей, деленному на 2π.

Из $f_1=\int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega)\exp(i\omega t)\,d\omega$ получаем $f_1^*=(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} G_1^*(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega$.

Найдем произведение $(f_1, f_2)=\int [(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} G_1^*(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega] f_2(t)dt$. Изменив порядок интегрирования, получим $(f_1, f_2)=(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} G_1^*(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\exp(-i\omega t)dtd\omega$.

Внутренний интеграл равен спектральной плотности $G_2(\omega)$ колебаний $f_2(t)$, поэтому: $(f_1 f_2)=(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} G_1^*(\omega) G_2(\omega)d\omega=(0{,}5/\pi)(G_1, G_2)$.

Формула Парсеваля. Рассмотрим, вариант когда $f_2(t)=f_1(t)=f(t)$. Находя произведение двух этих функций, придём к формуле Парсеваля $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt=(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2 d\omega$. Пусть $f(t)$, периодическая функция описывающая ток, протекающий по резистору сопротивлением R. Энергия, рассеиваемая резистором: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 Rdt=1/(2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2 Rd\omega$. Ориентируясь на равенство Парсеваля, энергия может быть подсчитана двумя методами. Во-первых, найдем энергию, выделяемую на резисторе сопротивлением R в единицу времени (мощность) $|f(t)|^2 R$, потом энергию за время dt, в форме $|f(t)|^2 Rdt$ и эту величину суммируем по t. Во-вторых, определяем энергию, которая приходится на единичный частотный интервал $(0{,}5/\pi)|G(\omega)|^2 R$, потом на частотный интервал $d\omega$: $(0{,}5/\pi)|G(\omega)|^2 Rd\omega$ и эту величину суммируем по всем частотам, где $|G(\omega)|^2$ – спектральная плотность мощности.

Энергетический спектр. Функция взаимной корреляции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ равна: $\varphi_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(t) f_2(t+\tau)dt$. Согласно формуле Релея $\varphi_{12}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_1^*(\omega) G_2(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$. Полученное выражение представляет собой обратное ПФ от спектральной плотности

$G_1^*(\omega)G_2(\omega)$. Функция автокорреляции $\varphi(\tau)$ получается когда $f_2(t)=f_1(t)=f(t)$, т.е. $\varphi_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(t)f_2(t+\tau)dt$. Ее спектральная плотность связана с плотностью мощности, которая приходится на единичный частотный интервал: $S(\omega)=|G(\omega)|^2$. Функция корреляции является мерой связи значений колебаний (сигнала) в моменты времени, разделенные интервалом длительностью τ.

Свертка функций. Принято считать [9-11], что сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ является выражение $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$. Свертка коммутативна, т.е. $f_1\otimes f_2=f_2\otimes f_1$ или $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$. Спектральную плотность свертки найдем в следующей последовательности. Обозначим спектральные плотности функций $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ через $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$, в виде $G_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau$; $G_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau$. Функции $f_1(-\tau)$ имеет спектральную плотность $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(-\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\exp(i\omega\tau)dx=G_1(-\omega)$. Так как для функции $f_1^*(\tau)$ спектральная плотность равна $G_1^*(-\omega)$, то функции $f_1*(-\tau)$ имеет спектральную плотность, равную $G_1^*(\omega)$.

Рассмотрим функцию $f_1^*(-\tau+t)=F(\tau)$, спектральная плотность ее по теореме запаздывания равна $G_1*(\omega)e^{-i\omega t}$. Скалярное произведение функций $F(\tau)$ и $f_2(\tau)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F^*(\tau)f_2(\tau)d\tau=(0{,}5/\pi)\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega)\exp(i\omega t)G_2(\omega)d\omega$$

или $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega)G_2(\omega)\exp(i\omega t)d\omega.$ Итак, спектральная плотность свертки функций f_1 и f_2 равна произведению их спектральных плотностей $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$.

Произведение двух функций. Спектральную плотность произведения двух функций найдем вычислением интеграла Фурье: $G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)\exp(-i\omega t)dt$. Если $f_2(t)=(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} G_2(x)\exp(ixt)dx$, то

$$G(\omega)=(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\exp(-i\omega t)G_2(x)\exp(i\omega t)dxdt=$$
$$=(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} G_2(x)\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\exp(-it(\omega-x)dtdx.$$

Внутренний интеграл равен $G_1(\omega-x)$, поэтому $G(\omega)=(0{,}5/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega-x)G_2(x)dx$. Следовательно, спектральная плотность произведения двух функций равна свертке их спектральных плотностей, деленной на 2π:

$$G(\omega)=(0{,}5/\pi)G_1\Theta G_2.$$

Выводы. Показано, что в оптических информационных технологиях, носителем информации является электромагнитное поле. Распространения информации в оптической системе обработки достигается сигналами, описываемых одномерными функциями (координат или времени), и изображениями, соответственно описываемых многомерными пространственно-временными функциями (координат и времени).

Предложены физические основы колебательного процесса в оптической системе обработки, когда информация циркулирует в ней в форме сигналов.

При прохождении сигналов по оптической системе обработки, взаимодействуя с элементами системы, происходит преобразование их и соответственно, изменение спектра. Показано на примере сигналов, для которых известны описывающие их функции, как с помощью преобразований Фурье можно найти пространственные их спектры, т.е. закономерности трансформации информации, ее смысловой и энергетической составляющих

В качестве развития работы, представляется целесообразным в дальнейшем, рассмотреть применение в оптических информационных технологиях сигналов пространственно-временной природы, т.е. изображений, в частности, сигналов с ограниченным спектром, комплексных сигналов, преобразований Френеля и двумерное преобразование Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомаз У.Г. Оптические информационные технологии построения систем формирования изображений / У.Г. Богомаз, Т.В. Белик, В.В. Данилов // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2013. – № 1. – С. 164-172.
2. Богомаз У.Г. Информационная технология определения функции передачи оптической системы построения зображений / У.Г. Богомаз, Т.В. Белик, В.В. Данилов // Радиотехника. Всеукраинский научно-технический сборник. Изд-во Харьковского технического университета радиоэлектроники. – 2013. – № 175. – С. 127-133.
3. Оптические информационные технологии. Преобразование радиосигналов / И.А. Третьяков, М.Л. Павлов, Т.С. Тебенева, В.В. Данилов // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 2. – С. 83-89.
4. Оптические информационные технологии. Обработка радиосигналов / И.А. Третьяков, М.Л. Павлов, Т.С. Тебенева, В.В. Данилов // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 3. – С 40-49.
5. Оптические информационные технологии. Элементная база / И.А. Третьяков, Т.В. Белик, А.П. Ефимович, В.В. Данилов // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 4. – С 40-49.
6. Оптические информационные технологии. Неуправляемые модуляторы / И.А. Третьяков, Т.В. Белик, А.П. Ефимович, В.В. Данилов // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 1. – С. 61-68.
7. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники / Под ред. Б. Х. Кривицкого. В 2-х т. – Т. 2. – М.:. Энергия, 1977. – 472 с.
8. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники / Под ред. Б.Х. Кривицкого, В.Н. Дулина. В 2-х т. – Т. 1. – М.: Энергия, 1977. – 504 с.
9. Парыгин В.Н. Оптическая обработка информации / В.Н. Парыгин, В.И. Балакший. – М.: Изд-во Московского университета, 1987. – 142 с.
10. Литвиненко О.Н. Основы радиооптики / О.Н. Литвиненко. – К.: Техника, 1974. – 208 с.
11. Гудмен Д. Введение в Фурье оптику / Д. Гудмен; перевод с англ., под ред. Г. И. Косоурова. – Москва: «Мир», 1970. – 364 с.
12. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго; перевод с франц. под общ. ред. К.С. Шифрина. – М.: Наука, 1964. – 771 с.

Поступила в редакцию 07.05.2019 г.

OPTICAL INFORMATION TECHNOLOGIES: PHYSICAL FOUNDATIONS

V.V. Danilov, V.I. Timchenko

A carrier of information in optical information technologies is the electromagnetic field of the optical range (10^{14}–10^{16}Гц) / Information is carried by multidimensional signals (images), described by functions of four variables, three spatial coordinates and time. This feature of the optical range has led to the possibility of a significant increase in the amount of information processed. The transition from information carrier in radio electronics (current, voltage), generally one-dimensional (function of coordinates or time), to multidimensional carrier, electromagnetic field (function of spatial coordinates and time) requires appropriate radiophysical explanations.

Keywords: optical information technologies, Fourier transforms, analytical functions, oscillatory process, shift function, signal spectral density, function verification, energy spectrum.

Данилов Владимир Васильевич
доктор технических наук, профессор;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк.
E-mail: ut5iv@mail.ru

Danilov Vladimir Vasilyevich
Doctor of Technical Sciences, Professor;
Donetsk National University,

Тимченко Владимир Иванович
кандидат физико-математических наук, доцент;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк.
E-mail: vlitim@mail.ru

Timchenko Vladimir Ivanovich
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent;
Donetsk National University, Donetsk

УДК 538.11

АНОМАЛЬНЫЙ СДВИГ ГУСА-ХЕНХЕН В ГЕМАТИТЕ

© 2019. *В.Д. Пойманов*

Показано, что взаимодействие электромагнитного излучения с электродипольноактивными спиновыми модами в многоподрешеточном антиферродиэлектрике может приводить к аномальному (отрицательному) пространственному сдвигу пучка при падении на границу раздела с диэлектриком.

Ключевые слова: сдвиг Гуса-Хенхен, гематит, метод эффективной среды.

Введение. В настоящее время большое количество работ посвящено изучению взаимодействия электромагнитного излучения с собственными колебаниями спиновой подсистемы многоподрешеточного магнетика [1–9]. В этом случае многообразие магнитных и оптических свойств обусловлено, в частности, отсутствием центральносимметричности в такой системе [3]. Например, гематит $\alpha - Fe_2O_3$ содержит четыре подрешетки, соответственно чему колебания спиновой подсистемы описываются четырьмя независимыми векторами, представляющими собой линейные комбинации векторов намагниченности отдельных подрешеток [10]. Таким образом, в спектре собственных колебаний гематита имеется четыре ветви, две из которых являются акустическими магнитоактивными модами с характерными частотами в инфракрасной области спектра. Две других являются обменными электродипольноактивными возбуждениями и могут наблюдаться в экспериментах по неупругому рассеянию нейтронов [9].

Постановка задачи. Настоящая работа посвящена изучению взаимодействия электромагнитной волны с обменными модами антиферродиэлектрика (АФД). Ее целью будет изучение особенностей отражения ТМ-поляризованной волны от структуры, содержащей АФД (среда 1). В частности, рассмотрим эффект, пространственного сдвига пучка ЭМВ относительно точки падения вдоль границы раздела (сдвиг Гуса-Хенхен, (СГХ)), возникающий при полном внутреннем отражении при падении ЭМВ из диэлектрика (среда 2). Ввиду отсутствия плазмонных ветвей в спектре собственных колебаний среды 2, ее диэлектрическую проницаемость будем считать скалярной величиной, равной ε_0.

Решение задачи. Рассмотрим два случая:

1. Сверхрешетка АФД/диэлектрик в отсутствие внешнего поля;
2. Однородный АФД во внешнем магнитном поле H_0 приложенном вдоль вектора антиферромагнетизма $\vec{l}_1$.

В обоих случаях полагаем, что АФД находится в легкоосной фазе, а среда является немагнитной ($\mu = 1$), являясь таким образом правосторонней.

Рассмотрим геометрию $\vec{k} \in xy, \vec{l}_1 \perp \vec{n} \parallel ox$, в которой падающая ЭМВ поляризована вдоль направления oz, также как и приложено внешнее поле в случае 2. Тензор диэлектрической проницаемости (ТДП) в общем случае имеет вид:

$$\hat{\varepsilon}_a = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon' & 0 \\ -i\varepsilon' & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Соответственно этому поле во всем пространстве ищем в виде:

$$H_z(x,y) = e^{iky} \times \begin{pmatrix} e^{ik_0x} + R \cdot e^{-ik_0x} \\ T \cdot e^{-qx} \end{pmatrix}, \begin{matrix} x > 0 \\ x < 0 \end{matrix} \tag{2}$$

где R и T – френелевские коэффициенты отражения и прохождения соответственно. Спектр нормальных поляритонов (НП) в каждой среде имеет вид:

$$k_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2},\ q = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k^2 - \left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon_1}\right)\frac{\omega^2}{c^2}}. \tag{3}$$

Полагаем, что $k_0^2 > 0$, $q^2 > 0$, так что имеет место полное внутреннее отражение. При $x = 0$ непрерывными на границе раздела являются H_z и

$$E_y = -\frac{c}{\omega}\left(\frac{i\varepsilon_1\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon'\frac{\partial}{\partial y}}{\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon'^2}\right)H_z. \tag{4}$$

Записывая систему граничных условий для (2), получим коэффициент отражения в виде:

$$R = e^{-i\varphi}, \qquad \varphi = 2 \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 q - \varepsilon' k)}{k_0(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon'^2)}\right). \tag{5}$$

Используя (5), находим величину СГХ [11–13]

$$\Delta = \frac{d\varphi}{dk} = \frac{2\varepsilon_0^2\omega^2}{qk_0\left(k_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 q - \varepsilon' k)}{\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon'^2}\right)^2\right)c^2} \cdot \left(k\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon'^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) - q\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon'^2}\right). \tag{6}$$

Случай 1. В отсутствие внешнего поля ТДП этих слоев имеют вид:

$$\hat{\varepsilon}_k = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xk} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yk} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zk} \end{pmatrix},\ k = 1,2, \tag{7}$$

причем для АФД [1]

$$\varepsilon_{xa}(\omega) = \varepsilon_{ya}(\omega) = \varepsilon_{\perp a}(\omega) = \varepsilon_\perp \cdot \frac{\omega^2 - \omega_\varepsilon^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{8}$$

где ω_0 – частота антиферроэлектрического резонанса, $\omega_\varepsilon^2 = \omega_0^2 + \omega_a^2$. Для диэлектрического слоя

$$(\varepsilon_d)_{ik} = \varepsilon_0\delta_{ik}. \tag{9}$$

Ненулевые компоненты усредненного ТДП (1), полученные методом эффективной среды [6, 7]:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\frac{\nu_a}{\varepsilon_{xa}} + \frac{\nu_d}{\varepsilon_{xd}}}, \qquad \varepsilon_2 = \nu_a\varepsilon_{ya} + \nu_d\varepsilon_{yd}, \tag{10}$$

где ν_a и ν_d – относительные толщины антиферроэлектрического и диэлектрического слоев соответственно. Подставляя сюда (8) и (9), находим:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(0)}\frac{\omega^2 - \omega_\varepsilon^2}{\omega^2 - \omega_1^2}, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(0)}\frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{11}$$

где

$$\varepsilon_1^{(0)} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\perp}{\nu_d\varepsilon_\perp + \nu_a\varepsilon_0}, \qquad \varepsilon_2^{(0)} = \nu_a\varepsilon_\perp + \nu_d\varepsilon_0,$$

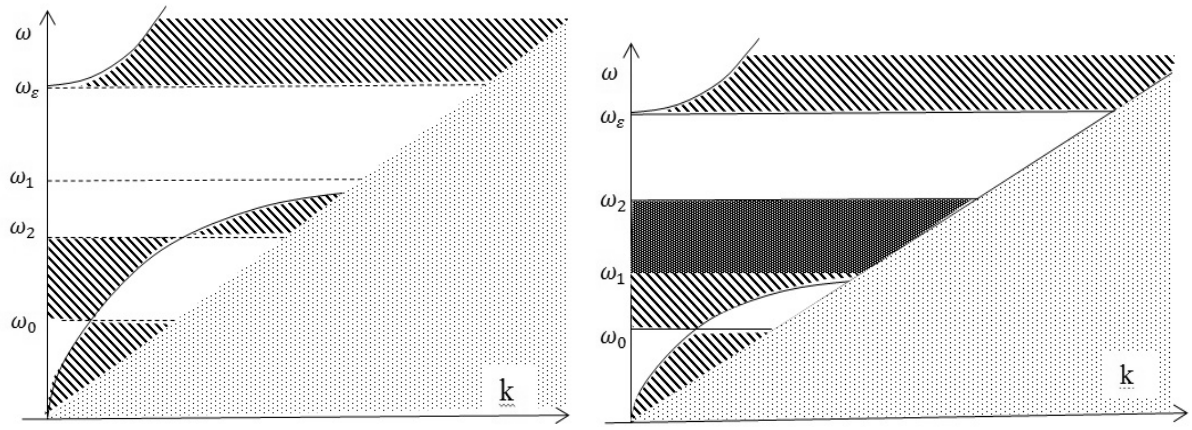
$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{\nu_d\varepsilon_\perp}{\nu_d\varepsilon_\perp + \nu_a\varepsilon_0}\omega_a^2, \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{\nu_a\varepsilon_\perp}{\nu_a\varepsilon_\perp + \nu_d\varepsilon_0}\omega_a^2.$$

Обратим внимание на то, что при $\nu_a > \nu_d$ выполняется соотношение $\omega_2 > \omega_1$ и наоборот.

Как следует из (3) и (6) выражения для спектра нормальных поляритонов и СГХ в сверхрешетке упрощаются и дают соответственно:

$$q = \sqrt{\varepsilon_2\left(\frac{k^2}{\varepsilon_1} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)},\ \Delta = \frac{2\varepsilon_0^2\varepsilon_2^2\omega^2 k}{qk_0((\varepsilon_2 k_0)^2 + (\varepsilon_0 q)^2)c^2}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right). \quad (12)$$

Зависимость СГХ в этом случае на $k\omega$ – диаграмме изображена на рис. 1. Отметим, что при нормальном падении в случае негиротропных сред СГХ всегда равен нулю.



а б

Рис.1 СГХ для случая сверхрешетки при $\nu_a < \nu_d$ (рис. 1а) и при $\nu_a > \nu_d$. (рис. 1, б) Область ниже наклонной прямой $\omega = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ соответствует поверхностной волне в диэлектрике, косой штриховки – положительному СГХ, темная область - отрицательному. Незаштрихованная область соответствует объемным волнам в АФД. Области разделены кривой $q = 0$.

Случай 2. Однородный АФД является изотропным в плоскости падения, поэтому ТДП при наличии внешнего поля запишется в виде [7]:

$$\hat{\varepsilon}_a = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp a} & i\varepsilon_a' & 0 \\ -i\varepsilon_a' & \varepsilon_{\perp a} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel a} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\varepsilon_{\perp a}(\omega) = \varepsilon_\perp \frac{(\omega^2 - \tilde{\omega}_+^2)(\omega^2 - \tilde{\omega}_-^2)}{(\omega^2 - \omega_{0+}^2)(\omega^2 - \omega_{0-}^2)}, \quad \varepsilon_a'(\omega) = \varepsilon_\perp \frac{2\omega\omega_H\omega_a^2}{(\omega^2 - \omega_{0+}^2)(\omega^2 - \omega_{0-}^2)}, \quad (14)$$

$$\omega_{0\pm} = \omega_0 \pm \omega_H,\ \ \tilde{\omega}_\pm^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_a^2}{2} + \omega_H^2 \pm \sqrt{4\omega_H^2\left(\omega_0^2 + \frac{\omega_a^2}{2}\right) + \left(\frac{\omega_a^2}{2}\right)^2}. \quad (15)$$

Предполагается, что внешнее поле не превышает поля спин-флоп перехода. Представим спектр нормальных поляритонов и СГХ в виде:

$$q = \sqrt{k^2 - \tilde{\varepsilon}\frac{\omega^2}{c^2}},\ \Delta = \frac{2\varepsilon_0^2\omega^2\tilde{\varepsilon}^2}{qk_0\left((\tilde{\varepsilon}k_0)^2 + \left(\varepsilon_0\varepsilon_{\perp a}(q - \delta k)\right)^2\right)c^2}\left(k\left(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) - q\frac{\delta}{\tilde{\varepsilon}}\right), \quad (16)$$

где

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{\perp a}(1 - \delta^2), \qquad \delta = \frac{\varepsilon_a'}{\varepsilon_{\perp a}}.$$

Используя (14) – (15), представим последние выражения в виде:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{\perp a}\frac{(\omega^2-\omega_{\varepsilon+}^2)(\omega^2-\omega_{\varepsilon-}^2)}{(\omega^2-\tilde{\omega}_+^2)(\omega^2-\tilde{\omega}_-^2)}, \quad \delta = \frac{2\omega\omega_H\omega_a^2}{(\omega^2-\tilde{\omega}_+^2)(\omega^2-\tilde{\omega}_-^2)}, \tag{17}$$

где $\omega_{\varepsilon\pm} = \omega_\varepsilon \pm \omega_H$.

Таким образом, знак СГХ в (16) определяется величиной

$$k\left(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) - q\frac{\delta}{\tilde{\varepsilon}}.$$

При $\tilde{\varepsilon} > 0$ условие полного внутреннего отражения дает $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon_0$. Поэтому слагаемое $\frac{1}{\varepsilon_0}$ во всяком случае не влияет на знак выражения $k\left(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right)$. Будем полагать, что $\varepsilon_0 \gg \tilde{\varepsilon}$, что фактически несправедливо только вблизи полюсов $\tilde{\varepsilon}$. В остальных случаях СГХ можно представить в более простом виде:

$$\Delta = \frac{2\omega}{c\sqrt{\varepsilon_0}(q-\delta k)^2}\left\{\tilde{\varepsilon}\left(\frac{k}{q} - \delta\right)\right\}. \tag{18}$$

Характерные области для этого случая изображены на рис. 2.

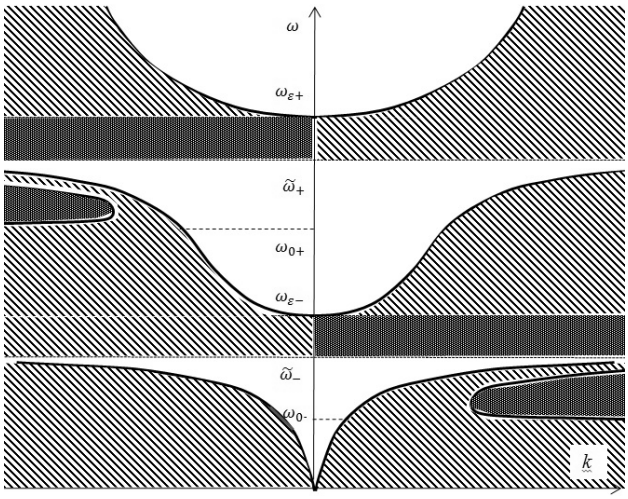


Рис. 2 СГХ для случая однородного АФД во внешнем магнитном поле. Темная область соответствует отрицательному СГХ, область косой штриховки – положительному. При $H = 0$ области отрицательного СГХ исчезают. Незаштрихованная область соответствует объемным волнам в АФД. Области разделены кривой $q = 0$.

Как следует из (18), наличие внешнего поля сдвигает величину СГХ в сторону отрицательных значений. Следует обратить внимание на упорядочение характерных частот:

$$\omega_{0-} < \tilde{\omega}_- < \omega_{\varepsilon-} < \omega_{0+} < \tilde{\omega}_+ < \omega_{\varepsilon+} \tag{19}$$

при выполнении условия $\omega_H < \frac{\omega_\varepsilon - \omega_0}{2}$ (в противном случае изменится соотношение между $\omega_{\varepsilon-}$ и ω_{0+}).

Очевидно, внешнее поле также приводит к формированию областей с отрицательным СГХ. Кроме того, в этом случае направления падающей волны k и $-k$ становятся неэквивалентными, т.е. в спектре наблюдается невзаимность. Кроме того – величина СГХ резонансно усилена не только вблизи области наклонного падения, где она неограниченно возрастает, но и для значений k таких, что $q - \delta k = 0$.

Выводы. В настоящей работе рассмотрен эффект пространственного сдвига пучка электромагнитных волн при падении на многоподрешеточный антиферродиэлектрик (сдвиг Гуса-Хенхен). Эффект хорошо управляется внешним магнитным полем и поэтому может быть использован в магнитооптике для смещения пучка отраженных волн. Найдены области положительного и отрицательного СГХ для случаев двухкомпонентной сверхрешетки, в состав которой входит АФД, и однородного АФД во внешнем магнитном поле, приложенном вдоль вектора антиферромагнетизма. Показано, что для формирования области отрицательного СГХ в случае сверхрешетки необходимо, чтобы толщина АФД слоя была больше толщины диэлектрического. В случае однородного АФД указанные области формируются приложением внешнего магнитного поля, меньшего поля спин-флоп перехода. Обнаружена невзаимность спектра и резонансное усиление эффекта, управляемое внешним магнитным полем. Показано существование аномальных областей отрицательного СГХ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и мультиферроики / А.П. Пятаков, А.К. Звездин // Успехи физических наук. – 2012. – Т. 182, № 6. – С. 593-620.
2. Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков / Е.А. Туров, А.В. Колчанов, В.В. Меньшенин и др. – М.: Физматлит, 2001. – 560 с.
3. Кулагин Д.В. Поляритонная динамика одномерного магнитного фотонного кристалла в скрещенных магнитном и электрическом полях / Д.В. Кулагин, А.С. Савченко, С.В. Тарасенко // Журнал эксперементальной и теоретической физики. – 2008. – Т. 133, вып. 5. – С. 1051-1069.
4. Савченко А.С. Поверхностная спин-волновая динамика легкоосного антиферромагнетика во внешнем электрическом поле / А.С. Савченко, С.В. Тарасенко, Т.Н. Тарасенко // Физика твердого тела. – 2007. – Вып. 2. – С. 267–278.
5. Новый механизм усиления эффекта Гуса-Хэнхен на границе раздела прозрачных сред / А.С. Савченко, А.С. Тарасенко, С.В. Тарасенко, В.Г. Шавров // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2015. – Т. 2, вып. 7. – С. 380-387.
6. Tarkhanyan R.H. Wave refraction and backward magnon-plasmon polaritons in left-handed antiferromagnet/semiconductor superlattices / R.H. Tarkhanyan, D.G. Niarchos // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2007. – Vol. 312. – P. 6-15
7. Tarkhanyan R.H. Influence of external magnetic field on magnon-plasmon polaritons in negative-index antiferromagnet-semiconductor superlattices / R.H. Tarkhanyan, D.G. Niarchos, M. Kafesaki // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2010. – Vol. 322. – P. 603-608.
8. Туров Е.А. Новые физические явления в магнетиках, связанные с магнитоэлектрическим и антиферроэлектрическим взаимодействием / Е.А. Туров, В.В. Николаев // Успехи физических наук. – 2005. – Т. 175, № 5. – С. 457-473.
9. Криворучко В.Н. Поверхностные обменные поляритоны в $\alpha - Fe_2O_3$ / В.Н. Криворучко, Т.Е. Примак // Физика твердого тела. – 1991. – Т. 33, № 11. – С. 3205-3215.
10. Kruvoruchko V. N. Antiferroelectric resonance in noncentrosymmetric multi-sublattice magnets / V.N. Kruvoruchko, D. A. Yablonskii // Sov. Phys. Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1988. – Vol. 67, No 9. – P. 1886-1890.
11. Macedo R. Spin canting induced Goos-Hanchen shifts / R. Macedo, R.L. Stamps, T. Dumelov // Optical Society of America. – 2014. – Vol. 22, No 23. – P. 28467-28478.
12. Singh I. J. Lateral displacement of a light beam at a ferrite interface / I. J. Singh, V. P. Nayyap // J. Appl. Phys. – 1991. – Vol. 69, No 11. – P. 7820-7824.
13. Басс Ф.Г. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками / Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов. – М.: Наука, 1989. – 288 с.

Поступила в редакцию 13.05.2019 г.

NEGATIVE GOOS-HANCHEN SHIFT ON THE HEMATITE

V.D. Poimanov

It is shown that the interaction of electromagnetic radiation with electrodipole-active spin modes in multisublattice antiferrodielectric can lead to anomalous (negative) spatial shift of the beam when falling on the interface with the dielectric.

***Keywords*:** Goos-Hanchen shift, hematite, effective medium method.

Пойманов Владислав Дмитриевич
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), старший преподаватель кафедры теоретической физики и нанотехнологий.
E-mail: Vladislav.Poymanow@yandex.ru

Poimanov Vladyslav Dmitrievich
Donetsk National University, Donetsk,
Senior lecturer at the Department of theoretical physics and nanotechnology

Х И М И Ч Е С К И Е Н А У К И

УДК 541.183+546.142

МИЦЕЛЛООБРАЗОВАНИЕ ДИГАЛОГЕНГАЛОГЕНАТОВ ЦЕТИЛТРИМЕТИЛАММОНИЯ В ЩЕЛОЧНЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРАХ

© 2019. ***А.А. Котенко, С.Л. Хилько, Т.М. Прокопьева, В.А. Михайлов***

Проведены измерения поверхностного натяжения в системах, образованных щелочными растворами дихлорбромата цетилтриметиламмония и дибромбромата цетилтриметиламмония, а также дибромброматом бис(N,N-диметилацетамид) водорода и бромидом цетилтриметиламмония динамическим и статическим методами. Определены критические концентрации мицеллообразования, оценены величины максимальной поверхностной концентрации и площади, занимаемой молекулой ПАВ.

Ключевые слова: цетилтриметиламмоний; дигалогенгалогенаты; гипобромит; мицеллообразование; тензиометрия.

Введение. Мицеллярные системы на основе катионных поверхностно-активных веществ (ПАВ), преимущественно бромида цетилтриметиламмония (CTAB от cetyltrimethylammonium bromide) и других солей тетраалкиламмония, нашли широкое применение в самых различных областях – от бытовой химии [1] и очистки промышленных стоков [2] до синтеза наночастиц золота [3] и подавления коррозии [4]. Известна способность систем на основе солей четвертичного азота катализировать в водных растворах различные органические [5] и ферментативные реакции [6], обусловленная адсорбцией растворенных органических веществ из воды в мицеллярную псевдофазу. Это свойство особенно ценно применительно к сложным эфирам кислот фосфора и серы, которые при обычных условиях плохо растворяются в воде и медленно разрушаются в природных условиях. Эти вещества долго сохраняют токсичность, будучи использованы как пестициды или отравляющие вещества. Очистка местности (помещений, техники, одежды) от таких загрязнений представляет серьезные трудности. Обычно применяемый щелочной гидролиз предполагает использование высоких концентраций щелочи и повышенных температур, что в полевых условиях бывает нелегко реализовать [7].

Ранее было обнаружено, что генерируемый в мягких условиях гипобромит-ион проявляет высокую реакционную способность по отношению к сложным эфирам [8]. Бромноватистая кислота считается наиболее активным эндогенным электрофилом [9], ее соли широко используются в системах контроля аквафлоры охлаждающих вод [10, 11] и воды плавательных бассейнов [12]; все более активно продвигаются в качестве дезинфектантов для охлаждающих композиций в пищевой промышленности [13, 14].

Мицеллярные композиции на основе CTAB и гипобромитов быстро и эффективно разрушают фосфаты, фосфонаты и сульфонаты [15]. Удобными предшественниками для малостабильного гипобромит-иона зарекомендовали себя дигалогенгалогенаты. Процедура генерирования гипобромит-иона неизбежно сопровождается выделением других ионных частиц; различные источники продуцируют различное количество этих ионов, формально не участвующих в гидролизе. Однако эти ионы могут влиять на процессы мицеллообразования [16, 17] с участием CTAB, и на свойства мицеллярной псевдофазы.

Целью настоящей работы была оценка мицеллообразующих свойств систем на основе дигалогенгалогенат-анионов и катионов цетилтриметиламмония в щелочных водных растворах.

Экспериментальная часть. Товарный бромид цетилтриметиламмония CTAB перекристаллизован из смеси ацетон-спирт. Этот препарат использован для синтеза дибромбромата цетилтриметиламмония (далее – CTABr3) и дихлорбромата цетилтриметиламмония (далее – CTABrCl2).

Дибромбромат цетилтриметиламмония CTABr3. Навеску бромида цетилтриметиламмония (2,01 г; $5{,}5\times10^{-3}$ моля) растворили в хлороформе (10 мл), к раствору прибавили бром (0,3 мл; $5{,}8\times10^{-3}$ моля), выпавший осадок отфильтровали через стеклянный пористый фильтр. Желтый порошок, вес 2,40 г ($4{,}6\times10^{-3}$ моля), выход 83 %. Т.пл. 92–94 ^{o}C.

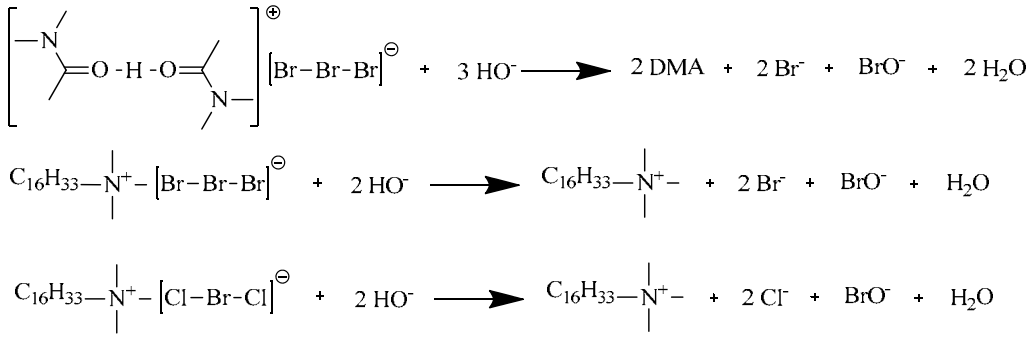
Дихлорбромат цетилтриметиламмония CTABrCl2. Навеску бромида цетилтриметиламмония (2,22 г; $6{,}09\times10^{-3}$ моля) поместили в круглодонную колбу объемом 100 мл, прибавили хлороформ (15 мл) и перемешали до растворения. К этому раствору приливали по каплям жидкий хлор до прекращения поглощения (прибл. 0,5 г). Из реакционной массы отогнали растворитель на водяной бане (т-ра в парах 50–61 ^{o}C), затем в вакууме водоструйного насоса. Кубовый остаток высушили на воздухе. Желтая аморфная масса, вес 2,61 г ($5{,}99\times10^{-3}$ моля); выход 98 %. Т.пл. 93–95 ^{o}C.

Дибромбромат бис(диметилацетамид)водорода (далее - DBB). В стакан объемом 100 мл помещают концентрированную бромистоводородную кислоту (47 %; 12,0 мл; 0,104 моля) и приливают бром (5,1 мл; 0,1 моля) одной порцией. Смесь охлаждают в бане с холодной водой (не во льду) и приливают N,N-диметилацетамид (18,6 мл; 0,2 моля) также одной порцией. Смесь при этом разогревается, отделяется красное вязкое масло. Не вынимая из охлаждающей бани, смесь интенсивно перемешивают толстой стеклянной палочкой до начала затвердевания. В дальнейшем помешивают периодически, стараясь не допустить образования больших конгломератов из кристаллов продукта. После окончания кристаллизации (обычно 1–3 часа) осадок отфильтровывают на большой воронке Бюхнера. Толщина слоя осадка на воронке должна быть как можно меньше, состояние осадка после фильтрования должно приближаться к воздушно-сухому. Осадок выгружают на фильтровальную бумагу и высушивают на воздухе. Выход колеблется, но всегда не меньше чем 36,7 г (0,088 моля; 88 %). Для тензиометрических измерений продукт перекристаллизовывают из метанола. Т.пл. 82–84 ^{o}C. Синтез этого соединения описан ранее [8,18]; приведенная здесь методика гораздо удобнее.

Измерения поверхностного натяжения проведены методом кольца Дю Нуи (тензиометр TE-1, Lauda, Германия), и методом максимального давления в пузырьке на установке, собранной по известной схеме [19]. Калибровка установки проведена измерением поверхностного натяжения для набора чистых жидкостей. Постоянство температуры в измерительной ячейке поддерживалось с помощью термостата.

Результаты и обсуждение. Гипобромная кислота и гипобромит-анион известны своей высокой реакционной способностью и невысокой стабильностью [20] в водных растворах (главным образом за счет диспропорционирования [21]); гарантийный срок годности реактивов заводского изготовления не превышает шести месяцев. Из-за низкой стабильности растворы гипобромитов готовят незадолго до употребления, используя различные более устойчивые и более удобные в работе предшественники.

В настоящей работе в качестве таких источников использованы три соединения: 1) дибромбромат бис(N,N-диметилацетамид)водорода; 2) дибромбромат цетилтриметиламмония; 3) дихлорбромат цетилтриметиламмония. При взаимодействии со щелочью в водном растворе эти соединения генерируют гипобромит-ион:



Геометрически трехатомные анионы галогенов весьма лабильны: известны как симметричные линейные, так и деформированные изогнутые структуры [22, 23]. В структурах солей с большими катионами и делокализованным положительным зарядом такие анионы, как правило, симметричны. Кристаллы дибромбромата бис(N,N-диметилацетамид)водорода построены [18] из симметричного линейного аниона $[Br\text{-}Br\text{-}Br]^-$ и катиона $[DMA\ldots H\ldots DMA]^+$ с очень короткой ($r_{O\ldots O}$ 2,4Å) симметричной водородной связью O…H…O.

Приведенные выше схемы превращений этих анионов основаны на хорошо изученных реакциях галогенов в воде [24]. Процессы образования гипобромит-иона из всех перечисленных источников весьма сходны. Существенно различаются их результаты, что становится очевидным при рассмотрении формирования воображаемой мицеллярной системы, содержащей 1 моль катиона цетилтриметиламмония и 1 моль гипобромит-иона. Такие системы будут содержать также: 1) два моля хлорид-анионов при формировании из дихлорбромата цетилтриметиламмония, 2) два моля бромид-анионов при формировании из дибромбромата цетилтриметиламмония, 3) три моля бромид-анионов при формировании из дибромбромата бис(N,N-диметилацетамид)водорода и бромида цетилтриметиламмония. В кинетических опытах концентрация мицеллообразователя (катиона цетилтриметиламмония) редко превышает 0,03 М [15], отсюда легко оценить концентрацию всех других ионных частиц.

Мы попытались оценить, сказывается ли эта разница в содержании анионов на тензиометрических свойствах мицеллярных систем на основе бромида цетилтриметиламмония, и, опосредованно, на свойствах мицеллярной псевдофазы. С этой целью измерено поверхностное натяжение гипобромит-содержащих водных растворов солей цетилтриметиламмония разного происхождения.

Измерение поверхностного натяжения растворов (а не индивидуальных жидкостей) предъявляет дополнительные требования к методу измерений. Как неоднократно подчеркивалось, статические методы пригодны для изучения растворов с быстро устанавливающимся значением равновесного поверхностного натяжения [25]. В растворах CTAB малых концентраций (до и вблизи критических концентраций мицеллообразования) равновесное поверхностное натяжение устанавливается в течение нескольких секунд [26-28] или минут [29], поэтому работоспособность установки проверили на растворах этого вещества в воде. Результаты измерения поверхностного натяжения растворов CTAB в воде представлены на рис. 1.

Определенная в настоящей работе величина ККМ для CTAB в воде при 25 °C приведена в таблице. Эта величина многократно определялась тензиометрически. В литературе приводятся оценки от 0,80 [33] до 1,1 [31] ммоль/л. Также многократно величина ККМ для CTAB определялась другими методами (в ммоль/л): по данным кондуктометрических измерений 1,005 [34], по данным калориметрии 0,94 [35], потенциометрически с использованием ион-селективных электродов 0,91 [36]; методом гашения флуоресценции пирена 0,95 [37].

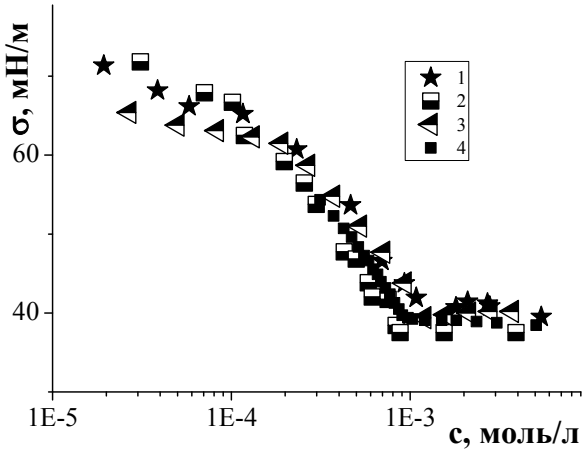


Рис. 1. Зависимость поверхностного натяжения растворов CTAB от концентрации (1) в сопоставлении с литературными данными: 2 – [30], 3 – [31], 4 – [32]

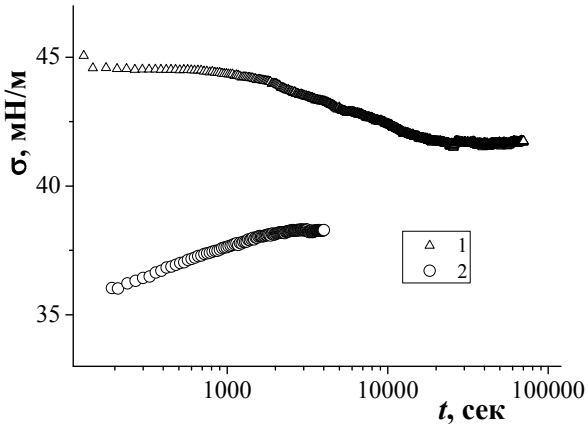


Рис. 2. Зависимость от времени поверхностного натяжения растворов: 1 – CTAB (5×10^{-6} М) в присутствии KBr (0,1 М); 2 – CTAB (1×10^{-3} М) в присутствии NaOH (0,1 М)

Из зависимости поверхностного натяжения от объемной концентрации можно оценить поверхностную концентрацию (изотерма Гиббса):

$$\Gamma = -\frac{1}{2RT}\frac{d\sigma}{d(\ln C)}, \quad (1)$$

где коэффициент 2 в дроби обусловлен распадом (диссоциацией) CTAB на две частицы при малых концентрациях.

Используя величину поверхностной концентрации Г (в молях на единицу площади) можно оценить площадь, занимаемую одной молекулой (в данном случае катионом цетилтриметиламмония) на поверхности раствора [17]:

$$A = \frac{1}{N\times\Gamma}. \quad (2)$$

Рассчитанные для CTAB величины поверхностной концентрации Г и площади А, занимаемой одной частицей, приведены в таблице.

Таблица

Тензиометрические характеристики для CTAB и дигалогенгалогенатов цетилтриметиламмония

ПАВ	ККМ×10^3, моль/л	Г×10^6, моль/м^2	А×10^{20}, м^2
CTAB	1,02	2,77 ± 0,3	60 ± 6
CTAB в 0,1н NaOH	0,93	2,06± 0,3	80 ± 12
CTAB в 0,1н KBr	0,02	2,46 ± 0,3	67 ± 6
CTABrCl2 в 0,1н NaOH; pH=13	0,73	2,70 ± 0,3	62 ± 6
CTABr3 в 0,1н NaOH; pH=13	0,44	2,50 ± 0,3	66 ± 6
CTAB + DBB; pH=11	0,52	2,90 ± 0,3	58 ± 6

Ранее определенные величины Г (в тех же единицах) варьируют в широких пределах: от 0,55 [38] до 5,34 [39]. Величины А также оценивались в весьма широких пределах: от 42 [32] до 67,6 [40].

Измерение поверхностного натяжения в присутствии электролитов представляет отдельные сложности. Как следует из данных, приведенных на рис. 2 (получены динамическим методом кольца Дю Нуи), равновесное значение поверхностного натяжения раствора CTAB в присутствии бромида калия устанавливается в течение

длительного времени (t ≈ 30 000 с). Это согласуется с литературными данными [28, 41], в соответствии с которыми время установления равновесия в растворах CTAB в присутствии бромида натрия и калия в децинормальных концентрациях превышает 10^3 секунд. Достоверные значения поверхностного натяжения в таких ситуациях можно получить только с использованием динамических методов. Результаты измерений поверхностного натяжения растворов CTAB в присутствии бромида калия (в концентрации 0,1 моль/л) методом кольца Дю Нуи находятся в удовлетворительном соответствии с литературными данными (рис. 3, таблица).

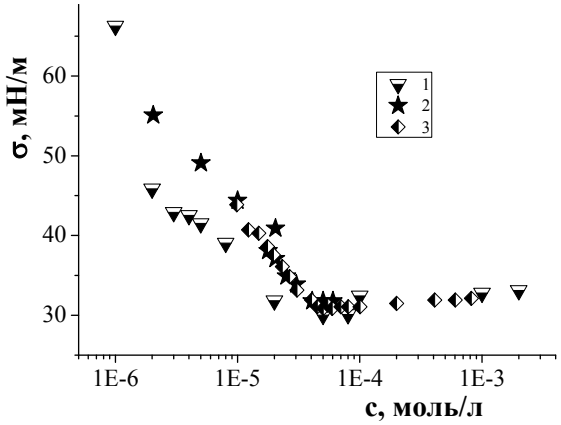


Рис. 3. Зависимость поверхностного натяжения от концентрации CTAB в 0,1 М растворе KBr (1), литературные данные: 2 – [42], 3 – [43]

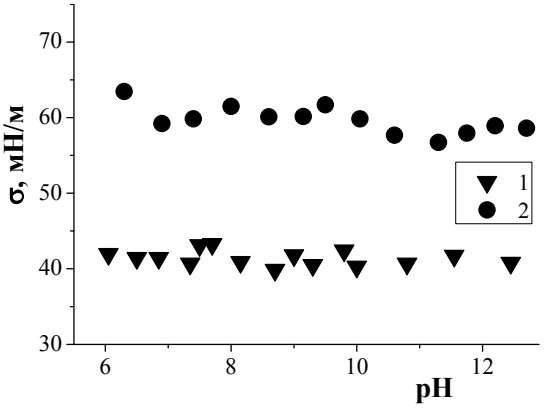


Рис. 4. Зависимость поверхностного натяжения растворов CTAB от водородного показателя.
1 – [CTAB] = 0,00203 моль/л;
2 – [CTAB] = 0,000203 моль/л

Судя по опубликованным данным [26], в присутствии меньших количеств бромида калия (и других бромидов) время установления равновесия резко сокращается. При концентрациях бромид-аниона меньше 10^{-2} моль/л можно рассчитывать на получение достоверных значений натяжения за меньшее время эксперимента (т.е. статическими методами). Измерения в присутствии щелочи (едкий натр) не выявили существенного влияния на поверхностное натяжение растворов CTAB. Как видно из данных, представленных на рис. 2, равновесное поверхностное натяжение в растворах CTAB в присутствии щелочи устанавливается в течение нескольких минут, что сопоставимо с характеристическим временем эксперимента в методе максимального давления в пузырьке. Это обстоятельство позволяет использовать метод МДП для измерения поверхностного натяжения растворов CTAB и едкого натра при их совместном присутствии.

Как следует из данных, представленных на рис. 4, добавки щелочи в изученном интервале концентраций несущественно влияют на поверхностное натяжение раствора CTAB. Оценки величин ККМ (рис. 5), поверхностной концентрации Г для системы CTAB+NaOH и площади А, занимаемой одной частицей, приведены в таблице.

Полученные результаты дают основание полагать, что метод МДП применим для измерения поверхностного натяжения щелочных растворов дибромбромата цетилтриметиламмония CTABr3 и дихлорбромата цетилтриметиламмония CTABrCl2. Соответствующие данные представлены на рис. 6 и в таблице.

Добавки дибромбромата бис(диметилацетамид)водорода в концентрациях меньших, чем 3×10^{-3} М не оказывают существенного влияния на поверхностное натяжение растворов бромида цетилтриметиламмония при его фиксированной концентрации и постоянном значении pH (рис. 7).

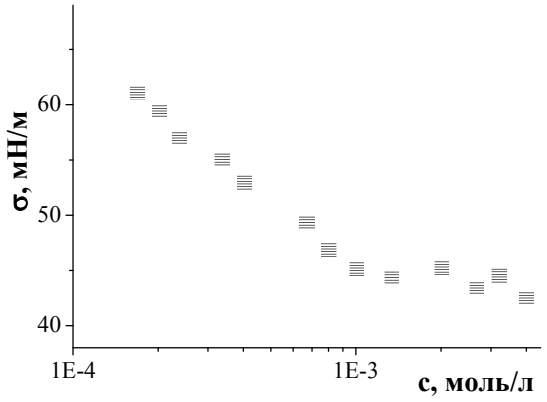


Рис. 5. Зависимость поверхностного натяжения от концентрации CTAB в 0,1 М растворе NaOH

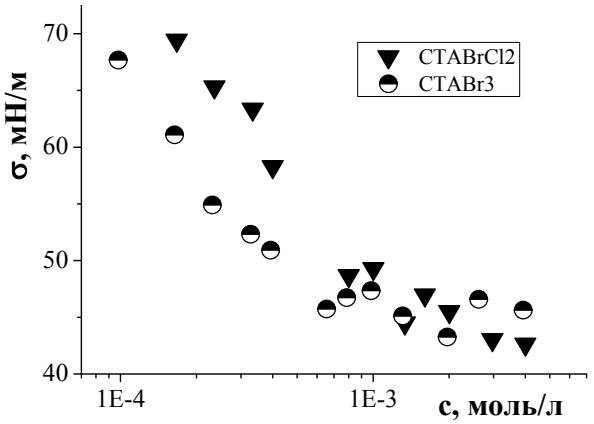


Рис. 6. Зависимость поверхностного натяжения от концентрации для растворов дибромбромата цетилтриметиламмония (CTABr3) и дихлорбромата цетилтриметиламмония (CTABrCl2)

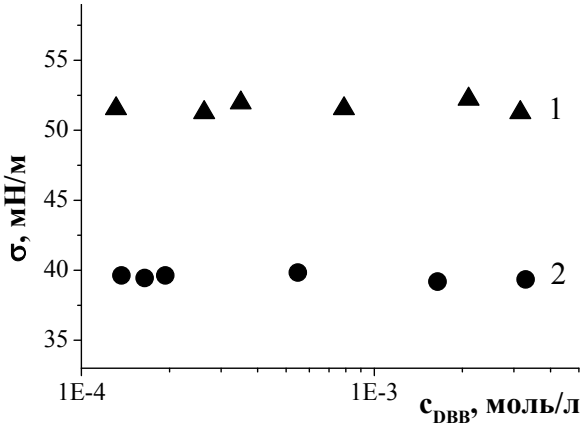


Рис. 7. Влияние добавок дибромбромата бис(диметилацетамид)водорода на поверхностное натяжение растворов CTAB при pH = 11,
1 – [CTAB] = 3×10^{-4} М, 2 – [CTAB] = 3×10^{-3} М

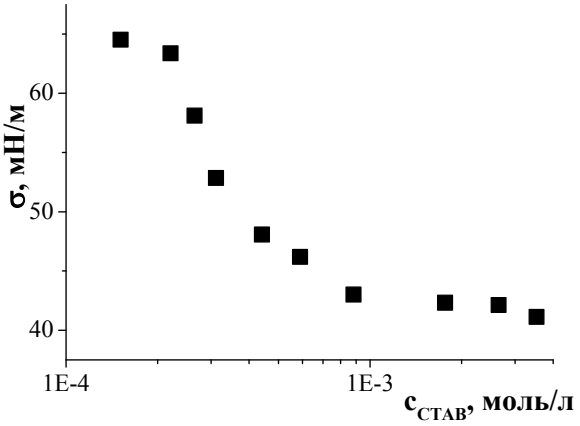


Рис. 8. Зависимость поверхностного натяжения растворов от концентрации CTAB и DBB при их совместном присутствии (1:1) и pH = 11

При одновременном изменении концентрации CTAB и DBB (находящихся в эквимольном соотношении) и фиксированном значении pH поверхностное натяжение меняется так же, как и для самого CTAB, и величина ККМ практически неизменна (рис. 8, таблица).

Результаты проведенных тензиометрических измерений истолкованы в рамках сложившихся теоретических представлений [17, 44]. Оценки величин Г и А для растворов CTAB в воде, сделанные ранее на основе этих представлений, подтверждались данными независимых экспериментов по отражению нейтронов от поверхности раствора [32, 45, 46] и измерению радиоактивности поверхностного слоя [47]. В совокупности эти исследования подтверждают правомочность использования тензиометрических данных для определения состояния солей цетилтриметиламмония в растворе.

Определенная в настоящей работе величина ККМ для CTAB в воде типична для этой хорошо изученной системы. Значительный разброс данных в литературе ($(8 – 11)\times10^{-4}$ моль/л) обусловлен тем обстоятельством, что ККМ характеризует область перехода к преимущественному образованию мицелл (а не точку).

Для щелочных растворов дигалогенгалогенатов цетилтриметиламмония величина ККМ существенно меньше, и это, вероятно, обусловлено дополнительным количеством

галогенид-ионов, образующихся при реакции со щелочью. Известно, что с увеличением концентрации галогенидов величина ККМ для водных растворов СТАВ уменьшается [29, 40, 48, 49].Типичными значениями можно считать (далее приведены ККМ / концентрация соли, обе величины в моль/л) для бромидов: $4{,}2\times10^{-4}$ /0,002 (KBr [48]), $4{,}1\times10^{-4}$ / 0,002 (KBr [50]), $(4{,}9 \pm 0{,}4)\times10^{-5}$ / 0,1 (KBr [43]), $1{,}5\times10^{-4}$ / 0,01 (NaBr [51]), $3{,}0\times10^{-5}$ / 0,1 (NaBr [28]); для хлоридов: $2{,}6\times10^{-4}$ / 0,05 (NaCl [52]), $3{,}0\times10^{-4}$ / 0,01 и $6{,}0\times10^{-5}$ / 0,1 (KCl [29]), $6{,}5\times10^{-4}$ / 0,002 (NaCl [50]).

Общая концентрация галогенидов в области значений ККМ, приведенных в таблице, не превышает 0,003 моль/л, так что приведенные в ней оценки ККМ можно считать находящимися в разумном соответствии с имеющимися в литературе.

Влияние гидроксид-ионов невелико (рис. 4) по сравнению с галогенид-ионами. По литературным данным [53], в присутствии 0,01 М NaOH величина ККМ для СТАВ составляет $0{,}81\times10^{-3}$ моль/л (что неотличимо от самого СТАВ). По данным спектрофотометрических, потенциометрических, калориметрических изысканий, сродство противоанионов к мицеллам СТАВ уменьшается при переходе от малых «жестких» анионов к большим «мягким» [50, 36]; наиболее широкий ряд представлен в [54, 55]. Из этих данных можно сделать вывод, что взаимодействие мицелл СТАВ с гидроксид-ионом выражено в наименьшей степени [36, 54, 55] по сравнению с другими электролитами. Влияние гипобромит-иона на величины ККМ остается невыясненным; по аналогии с гидроксид-ионом, можно предполагать, что оно невелико. Судя по литературным данным, диалкиламиды в малых концентрациях также мало влияют на мицеллообразование СТАВ [34, 56].

Поверхностная концентрация Г и площадь, занимаемая одной молекулой А, в доступных источниках определялись по результатам разных методов; разброс значений (см. выше) очень велик, и не позволяет сделать определенные выводы не только о численных значениях, но и о тенденциях их изменения под влиянием солей. Вероятно, величины Г и А для растворов СТАВ изменяются сложным образом с ростом концентрации галогенидов. В области малых концентраций величина Г уменьшается с ростом концентрации электролита (до 0,01 моль/л), затем возрастает [49]. В этом вопросе есть значительная неопределенность, связанная с использованием делителя 2 в уравнении (1). Неясно, можно ли считать электролиты в концентрациях, превышающих 0,01 моль/л, полностью диссоциированными.

Приведенные в настоящей работе результаты по измерению поверхностного натяжения щелочных растворов дигалогенгалогенатов цетилтриметиламмония (и смесей СТАВ с дибромброматом бис(диметилацетамид)водорода) указывают на общность их поведения с растворами бромида цетилтриметиламмония в воде и, вероятно, на сходство в строении мицелл. Слабо выраженная зависимость от природы противоиона позволяет предположить, что мицеллы, образованные катионами цетилтриметиламмония, различаются только составом и строением слоя Штерна, тогда как центральная часть мицелл остается неизменной для всех изученных солей и их смесей.

Выводы.Тензиометрические свойства растворов дибромбромата и дихлорбромата цетилтриметиламмония в изученном интервале концентраций (1×10^{-6} – 3×10^{-3} моль/л) мало зависят от противоиона и от присутствия других ионов. Критические концентрации мицеллообразования мало чувствительны к щелочности среды и для всех дигалогенгалогенатов несколько ниже, чем для СТАВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Safety Assessment of Trimoniums as Used in Cosmetics [Text] / L.C. Becker, W.F. Bergfeld, D.V. Belsito et al. // International Journal of Toxicology. – 2012. – Supplement 3. – P. 296S-341S.

2. Cationic Surfactants for Demulsification of Produced Water from Alkaline-Surfactant-Polymer Flooding [Text] / R. Zolfaghari, L.C. Abdullah, D.R.A. Biak, S. Radiman // Energy Fuels. – 2019. – Vol. 33, iss. 1. – P. 115–126.
3. The facile removal of CTAB from the surface of gold nanorods [Text] / Y. He, S. Unser, I. Bruzas et al. // Colloids and Surfaces B: Biointerfaces. – 2018. – Vol. 163. – P. 140–145.
4. Anti-corrosion Ability of Surfactants: A Review [Text] / M.A. Malik, M.A. Hashim, F. Nabi et al. // Int. J. Electrochem. Sci. – 2011. – Vol. 6. – P. 1927–1948.
5. Multicomponent reactions accelerated by Aqueos Micelles [Text] / D. Paprocki, A. Madej, D. Koszelewski et al. // Frontiers in Chemistry. – 2018. – Vol. 6. – op. No. 502 (21 pages).
6. Sintra, T.E. Superactivity induced by micellar systems as the key for boosting the yield of enzymatic reactions [Text] / T.E. Sintra, S.P.M. Ventura, J.A.P. Coutinho // J. Mol. Cat. B: Enzymatic. – 2014. – Vol. 107. – P. 140–151.
7. Peroxyhydrolysis of nerve agent VX and model compounds and related nucleophilic reactions [Text] / Y.C. Yang, F.J. Berg, L.L. Szafraniec et al. // J. Chem. Soc. Perkin Trans. 2. – 1997. – Vol. 3, iss. 3. – P. 607–613.
8. Bis(dialkylamide)hydrogen dibromobromate precursors of hypobromite ion in reactions with nerve and blister agent stimulants [Text] / Y.S. Simanenko, V.A. Savelova, T.M. Prokop'eva et al. // J. Org. Chem. – 2004. – Vol. 69, No. 26. – P. 9238–9240.
9. Ximenes, V. F. Hypobromous acid, a powerful endogenous electrophile: Experimental and theoretical studies [Text] / V.F. Ximenes, N.H. Morgon, A.R. de Souza // Journal of Inorganic Biochemistry. – 2015. – Vol. 146, iss. 5. – P. 61–68.
10. Nalepa, C.J. Comparison of bromine-based biocides in a medium-size cooling tower [Text] / C.J. Nalepa, G.L. Golson, R.M. Moore // Journal of the Cooling Tower Institute. – 1999. – Vol. 20, iss. 1. – P. 42–60.
11. Critchley, M. The efficacy of biocides and other chemical additives in cooling water systems in the control of amoebae [Text] / M. Critchley, R. Bentham // Journal of Applied Microbiology. – 2009. – iss. 3. – P. 784–789.
12. *WHO* Guidelines for Safe Recreational-water Environments. Vol. 2: Swimming Pools, Spas and Similar Recreational-water Environments. Available at: https://www.who.int/water_sanitation_health/bathing/srwe2full.pdf.
13. Efficacy of Hypobromous Acid as a Hide-On Carcass Antimicrobial Intervention [Text] / J.W. Schmidt, R. Wang, N. Kalchayanand et al. // J. Food Protection. – 2012. – Vol. 75, No. 5. – P. 955–958.
14. U.S. Department of Agriculture, Food Safety and Inspection Service. 2011. Safe and suitable ingredients used in the production of meat, poultry, and egg products, Directive 7120.1 Rev. 7. U.S. Department of Agriculture, Food Safety and Inspection Service, Washington, DC. Available at: http://www.fsis.usda.gov/oppde/rdad/fsisdirectives/7120.1.pdf.
15. Organotrihalide Complexes: α-Nucleophiles and Effective Oxidizing Agents in Decomposition Reactions of Organophosphorus Compounds in Water and Surfactant Micelles [Text] / V.A. Savelova, C.A. Bunton, T.M. Prokop'eva et al. // Theor. Exp. Chem. – 2004. – Vol. 40, No. 5. – P. 300–308.
16. Grover, P.K. Critical Appraisal of Salting-Out and Its Implications for Chemical and Biological Sciences [Text] / P.K. Grover, R. L. Ryall// Chem. Rev. – 2005. – Vol. 105, No. 1. – P. 1–10.
17. Surfactants and Interfacial Phenomena [Text] / M.J. Rosen: 3rd ed. – N.J.: Wiley, 2004. – 444 p.
18. Михайлов, В.А. О реакции брома с диалкилацетамидами [Текст] / В.А. Михайлов, Д.С. Юфит, Ю.Т. Стручков // Журнал общей химии.– 1992. – Т. 62, вып. 2. – С. 399–405.
19. Ребиндер, П.А. Поверхностные явления в дисперсных системах [Текст] / Коллоидная химия. Избранные труды. – М.: Наука, 1978. – 368 с.
20. Yang, Y. Participation of the Halogens in Photochemical Reactions in Natural and Treated Waters [Text] / Y. Yang, J.J. Pignatello // Molecules. – 2017. – Vol. 22, No. 10. – op. No.1684 (23 pages).
21. Lister, M.W. The Rates of Some Reactions of Aqueous Hypobromous Acid and Hypobromite Ions [Text] / M.W. Lister, P.E. McLeod // Can J. Chem. – 1971. – Vol. 49, No. 12. – P. 1987–1992.
22. Wiebenga, E.H. Structures of Interhalogen Compounds and Polyhalides [Text] / E.H. Wiebenga, E.E. Havinga, K.H. Boswijk // Advances in Inorganic Chemistry and Radiochemistry. – 1961. – Vol. 3 – P. 133–169.
23. Haller, H. Recent Discoveries of Polyhalogen Anions - from Bromine to Fluorine [Text] / H. Haller, S. Riedel // Zeitschrift Für Anorganische Und Allgemeine Chemie. – 2014. – Vol. 640, iss. 7. – P. 1281-1291.
24. Equilibrium, kinetic, and UV-spectral characteristics of aqueous bromine chloride, bromine, and chlorine species [Text] / T.X. Wang, M.D. Kelley, J.N. Cooper et al. // Inorg. Chem. – 1994. – Vol. 33, No. 25. – P. 5872-5878.

25. Mysels, K. J. The maximum bubble pressure method of measuring surface tension, revisited [Text] / K.J. Mysels // Colloids and Surfaces. – 1990. – Vol. 43, No. 2. – P. 241–262.
26. Adsorption Behavior and Dilational Rheology of the Cationic Alkyl Trimethylammonium Bromides at the Water/Air Interface[Text] / C. Stubenrauch, V. B. Fainerman, E. V. Aksenenko, R. Miller // J. Phys. Chem. B. – 2005. – Vol. 109, iss. 4. – P. 1505–1509.
27. Modeling Adsorption of Cationic Surfactants at Air/Water Interface without Using the Gibbs Equation [Text] / C.M. Phan, T. N. Le, C.V. Nguyen, S. Yusa // Langmuir. –2013. – Vol. 29, iss. 15. – P. 4743–4749.
28. Surfactant Adsorption onto Interfaces: Measuring the Surface Excess in Time [Text] / Y. He, Y. Shang, H. Liu et al. // Langmuir. – 2012. – Vol. 28, No. 6. – P. 3146−3151.
29. Adamczyk, Z. Influence of Ionic Strength on Surface Tension of Cetyltrimethylammonium Bromide [Text] / Z. Adamczyk, G. Para, P. Warszyński // Langmuir. – 1999. –Vol. 15, No. 24. – P. 8383–8387.
30. Bergeron, V. Disjoining Pressures and Film Stability of Alkyltrimethylammonium Bromide Foam Films [Text] / V. Bergeron // Langmuir. – 1997. – Vol. 13, No. 13. – P. 3474–3482.
31. Mukherjee, I. Tensiometric determination of Gibbs surface excess and micelle point: A critical revisit [Text] / I. Mukherjee, S.P. Moulik, A.K. Rakshit // J.Coll. Inter. Sci. – 2013. – Vol. 394, No. 3. –P. 329–336.
32. Li, P.X.. Limitations in the Use of Surface Tension and the Gibbs Equation To Determine Surface Excesses of Cationic Surfactants [Text] / P.X. Li, R.K. Thomas, J. Penfold // Langmuir. – 2014. – Vol. 30, No. 23. – P. 6739–6747.
33. Quantifying the micellar structure formed from hydrocarbon-fluorocarbon surfactants [Text] / Z.O. Et-Tarhouni, E. Carter, D.M. Murphy et al. // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. – 2016. – Vol. 492. – P. 255–262.
34. Sood, A. K. Influence of organic solvents and temperature on the micellization of conventional and gemini surfactants: a conductometric study[Text] / A.K. Sood, S. Sharma // Phys. Chem. Liq. – 2016. – Vol. 54, No. 5. – P. 574–588.
35. Aggregation behavior of hexadecyltrimethylammonium surfactants with various counterions in aqueous solution [Text] / N. Jiang, P. Li , Y. Wang et al. // J. Coll. Inter. Sci. – 2005. – Vol. 286, No. 2. – P. 755–760.
36. Larsen, J. W. Calorimetric and counterion binding studies of the interactions between micelles and ions. Observation of lyotropic series [Text] / J.W. Larsen, L.J. Magid // J. Am. Chem. Soc. – 1974. – Vol. 96, No. 18. – P. 5774–5782.
37. Formation and Growth of Micelles in Dilute Aqueous CTAB Solutions in the Presence of NaNO3 and NaClO3 [Text] / K. Kuperkar, L. Abezgauz, K. Prasad, P. Bahadur // J. Surfact.Deterg. – 2010. – Vol. 13, iss. 3. – P. 293–303.
38. Study of interaction between cationic surfactant (CTAB) and paracetamol by electrical conductivity, tensiometric and spectroscopic methods [Text] / A. Nabi, S. Tasneem, C.G. Jesudason et al. // J. Mol. Liq. – 2018. – Vol. 256. – P. 100–107.
39. An unusual synergistic adsorption of MIBC and CTAB mixtures at the air–water interface [Text] / T.N. Le, C.M. Phan, A.V. Nguyen, H.M. Ang // Minerals Engineering. – 2012. – Vol. 39. – P. 255–261.
40. Kumar, B. Effects of Electrolytes on Micellar and Surface Properties of Some Monomeric Surfactants[Text] / B. Kumar, D. Tikariha, K.K. Ghosh // J. Disp. Sci. Technology. – 2012. – Vol. 33, No. 2. – P. 265–271.
41. Taylor, C. D. A simple and rapid method for the determination of the surface equations of state and adsorption isotherms for efficient surfactants [Text] / C.D. Taylor, D.S. Valkovska, C.D. Bain // Phys. Chem. Chem. Phys. – 2003. – Vol. 5, iss. 21. – P. 4885–4891.
42. Para, G. The surface tension of aqueous solutions of cetyltrimethylammonium cationic surfactants in presence of bromide and chloride counterions [Text] / G. Para, E. Jarek, P. Warszynski // Coll. Surf. A: Physicochemical and Engineering Aspects. – 2005. – Vol. 261, iss. 1–3. – P. 65–73.
43. Knock, M.M. Effect of counterion on monolayers of hexadecyltrimethylammonium halides at the air-water interface [Text] / M.M. Knock, C.D. Bain // Langmuir. – 2000. – Vol. 16, iss. 5. – P. 2857–2865.
44. Influence of surface processes on the dilationalvisco-elasticity of surfactant solutions [Text] / F. Ravera, M. Ferrari, E. Santini, L. Liggieri // Adv. Coll. Inter. Sci. – 2005. – Vol. 117, iss. 1–3. – P. 75–100.
45. Detailed Structure of the Hydrocarbon Chain in a Surfactant Monolayer at the Air/Water Interface: Neutron Reflection from Hexadecyltrimethylammonium Bromide [Text] / J.R. Lu, Z.X. Li, J. Smallwood et al. // J. Phys. Chem. –1995. – Vol. 99, No. 20. – P. 8233–8243.
46. Lu, J. R. Surfactant layers at the air/water interface: structure and composition [Text] / J.R. Lu, R.K. Thomas, J. Penfold // Adv. Coll. Inter. Sci. – 2000. – Vol. 84, iss. 1–3. – P. 143–304.
47. Jones, M. N. Radiotracer studies on soap films [Text] / M. N. Jones, G. Ibbotson // Trans. Farad.Soc. – 1970. – Vol. 66. – P. 2394–2399.
48. Jalali, F. Micellization of cetyltrimethylammonium bromide (CTAB) in mixed solvents and in the presence of potassium bromide [Text] / F. Jalali, A. Gerandaneh // J. Dispers. Sci. Technol. – 2011. – Vol. 32, iss. 5. – P. 659–666.

49. Para, G. The Hofmeister series effect in adsorption of cationic surfactants—theoretical description and experimental results [Text] / G. Para, E. Jarek, P. Warszynski // Adv. Coll. Inter. Sci. – 2006. –Vol. 122, iss. 1–3. – P. 39–55.
50. Jakubowska, A. Interactions of different counterions with cationic and anionic surfactants [Text] / A. Jakubowska // J. Coll. Inter. Sci. – 2010. – Vol. 346, iss. 2. – P. 398–404.
51. Nakahara, H. Examination of Surface Adsorption of Cetyltrimethylammonium Bromide and Sodium Dodecyl Sulfate [Text] / H. Nakahara, O. Shibata, Y. Moroi // J. Phys. Chem. B. – 2011. –Vol. 115, iss. 29. – P.9077–9086.
52. Surface Tension Studies of Cetyltrimethylammonium Bromide – Bile Salt Association [Text] / M. Swanson-Vethamuthu, M. Almgren, P. Hansson, J. Zhao // Langmuir. – 1996. – Vol. 12, No. 9. – P. 2186–2189.
53. Sen, P. K. Evidence of co-operativity in the pre-micellar region in the hydrolytic cleavage of phenyl salicylate in the presence of cationic surfactants of CTAB, TTAB and CPC [Text] / P. K. Sen, P. Chatterjee, B. Pal // J. Mol. Catal. A: Chemical. – 2015. –Vol. 396. – P. 23–30.
54. Bartet, D. Association of anions to cationic micelles [Text] / D. Bartet, C. Gamboa, L. Sepulveda // J. Phys. Chem. –1980. – Vol. 84, No. 3. – P. 272–275.
55. Gamboa, C. Free energies of transfer of anions from water to cationic micelles from ionic exchange measurements [Text] / C. Gamboa, L. Sepulveda, R. Soto // J. Phys. Chem. – 1981. – Vol. 85, No. 10. – P. 1429–1434.
56. Water−N,N-Dimethylformamide Alkyltrimethylammonium Bromide Micellar Solutions: Thermodynamic, Structural, and Kinetic Studies [Text] / M. Del Mar Graciani, M. Muñoz, A. Rodríguez, M.L. Moyá // Langmuir. – 2005. – Vol. 21, No. 8. – P. 3303–3310.

Поступила в редакцию 02.04.2019 г.

MICELLISATION OF CETYLTRIMETHYLAMMONIUM DIHALOGENOHALOGENATES IN WATER UNDER BASIC CONDITIONS

A.A. Kotenko, S.L. Hilko, T.M. Prokopieva, V.A. Mikhailov

Surface tension measurements for basic solutions of cetyltrimethylammonium dibromobromate and dichlorobromate (and mixtures of cetyltrimethylammonium bromide and bis(N,N-dimethylacetamide)hydrogen dibromobromate) in water have been made by static and dynamic methods. Critical micelle concentrations were revealed, and surface excesses and areas per molecule were evaluated for these systems. For all systems under examination, similar construct of cetyltrimethylammonium micelles have been assumed.

Keywords: cetyltrimethylammonium; dihalogenohalogenates; hypobromite; micellisation; tensiometry.

Котенко Алла Александровна
ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», младший научный сотрудник,
e-mail: allakotenko@ukr.net

Kotenko Alla Aleksandrovna
State institution L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry, Donetsk, Researcher

Хилько Светлана Леонидовна
кандидат химических наук, старший научный сотрудник; ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», ведущий научный сотрудник
e-mail: sv-hilko@yandex.ru

Khil'ko Svetlana Leonidovna
Candidate of Chemical Sciences, Leading Researcher, Senior Researcher.
State institution L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry, Donetsk

Прокопьева Татьяна Мефодиевна
кандидат химических наук, старший научный сотрудник; ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», старший научный сотрудник

Prokop'eva Tatiana Mefodievna
Candidate of Chemical Sciences, Senior Researcher, Senior Researcher.
State institution "L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry", Donetsk

Михайлов Василий Александрович
кандидат химических наук, старший научный сотрудник; ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», заведующий отделом исследований нуклеофильных реакций
e-mail: v_mikhailov@yahoo.com

Mikhailov Vasilii Alexandrovych
Candidate of Chemical Sciences, head of department, Senior Researcher.
State institution L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry, Donetsk

УДК 547:54.052 + 54.057

МОДИФИКАЦИЯ СОПОЛИМЕРОВ МАЛЕИНОВОГО АНГИДРИДА С ВИНИЛАЦЕТАТОМ АМИНОКИСЛОТАМИ

© 2019. *Т.В. Крюк, Т.Г. Тюрина, О.С. Кобцева*

Синтезированы высокомолекулярные амиды на основе сополимеров малеинового ангидрида с винилацетатом и некоторых аминокислот (глицина, лейцина, изолейцина). Методами ^{1}H ЯМР и pH-метрии установлено, что при амидировании при 105 °C в растворе диоксана в полимерной цепи образуется смесь звеньев полуамида и циклического амида. Условия реакции (продолжительность синтеза, катализатор, способ введения добавки) слабо влияют на соотношение продуктов реакции. При реакции сополимеров с аминокислотами в гомогенной водной среде (105 °C) образуются только звенья малеимида.

Ключевые слова: сополимер; малеиновый ангидрид; винилацетат; аминокислоты; модификация.

Введение. Важным направлением развития современной медицины является адресная доставка лекарственных средств. Биомедицинская инженерия в данной области быстро расширяется за счет разработки и синтеза новых многофункциональных полимерных материалов, которые могут быть получены на основе α-аминокислот [1]. Учитывая сложность достижения четкой структуры и монодисперсности синтетических биоматериалов, обширные процедуры подготовки для достижения высокой степени чистоты, альтернативу им составляют полимеры, в которых аминокислоты находятся в боковой цепи. Такие материалы могут быть получены путем конъюгации или модификации полимеров аминокислотами, однако на сегодняшний день для биомедицинского применения предлагается ограниченное количество коньюгатов α-аминокислота–полимер.

Целью настоящей работы было изучение влияния условий реакции модификации физиологически активных сополимеров малеинового ангидрида (МА) с винилацетатом (ВА) [2, 3] простейшей аминокислотой глицином (Gly) и аминокислотами с разветвленным строением боковой цепи лейцином (Leu), изолейцином (Ile) на состав продуктов амидирования.

Экспериментальная часть. Мономеры, инициатор и растворители очищали известными методами [4, 5] (до содержания основного вещества 99,98 %). Сополимеризацию МА с ВА проводили в растворе 1,4-диоксана (ДО) или бензола (60 ± 0,1 или 70 ± 0,1 °C), инициатор – пероксид бензоила (1 мас. %). Соотношение мономеров составляло 1 : 1 моль/моль, их суммарная концентрация 2 моль/л, в качестве осадителя использовали петролейный эфир. Полученный сополимер сушили в вакууме при 50 °C до постоянной массы.

Модификацию проводили в растворе ДО или H_2O при эквимольном соотношении звеньев МА и аминокислоты без катализатора и в присутствии триэтиламина (ТЭА). Сополимер массой 0,185 г растворяли в 5 мл растворителя, к полученному раствору добавляли аминокислоту и нагревали в течение 2 или 4 ч при 105 °C с обратным холодильником. Аминокислоту вводили в реакционную смесь либо однократно перед нагреванием либо 4 раза равными долями через каждые 0,5 ч нагревания. ТЭА добавляли к реакционной смеси в виде раствора в ДО ($1{,}26 \cdot 10^{-6}$ моль/л). При синтезе в органическом растворителе после охлаждения реакционной смеси раствор модифицированного полимера декантировали от непрореагировавшей аминокислоты и

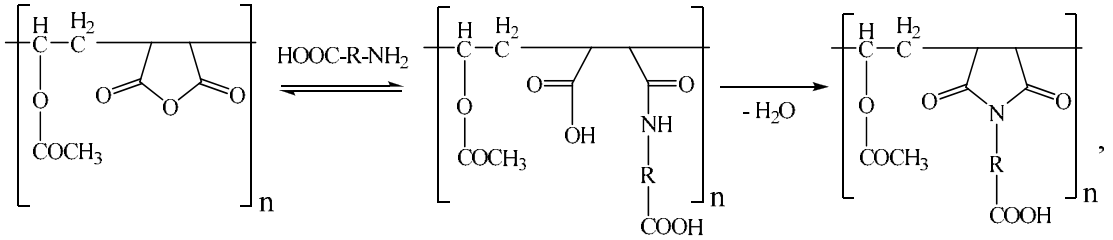
выделяли полимер высаждением в петролейный эфир. Из водного гомогенного раствора полимер после модификации осаждали холодным этиловым спиртом или диэтиловым эфиром, инкубировали в течение 1 ч при –4 °С, выделившийся осадок центрифугировали со скоростью 3 000 об/мин в течение 15 мин [6]. Остаток после удаления жидкой фазы высушивали до постоянной массы в вакууме при 50 °С. Продукты модификации представляли собой порошки желто-коричневого цвета.

Содержание карбоксильных групп (ω(СООН), мас. %) в образцах сополимера, продуктах его модификации и аминокислотах определяли методом алкалиметрического титрования [7], точку эквивалентности фиксировали, используя иономер И-160МИ со стеклянным электродом ЭС-10603 и хлорсеребряным электродом ЭСр-10103 в качестве индикаторного и электрода сравнения. В качестве титрантов использовали: 0,1 н раствор NaOH при титровании в водной среде, 0,1 н КОН в *из*о-пропаноле (ИПС) – в смешанном растворителе ДМФА–вода; 87 : 13 по объему. Для приготовления ~0,1 н спиртового раствора щелочи 1,2 г КОН (ч.д.а.) растирали в ступке и растворяли в 0,2 л ИПС, предварительно очищенного перегонкой. Титр раствора щелочи устанавливали по янтарному ангидриду. Образцы для водного титрования готовили путем растворения навески (~ 0,04 г) в 50 мл бидистиллята (30–50 °С, 1–2 ч), для неводного – навеску (~ 0,02 г) растворяли сначала в 4 мл бидистиллята, потом добавляли 26 мл очищенного ДМФА. Объем титранта, соответствующий точке эквивалентности, находили по пересечению кривой второй производной ($\Delta^2pH/\Delta V^2$) с осью абсцисс.

^{1}Н ЯМР спектры растворов сополимера и продуктов его модификации регистрировали с помощью прибора Bruker Avance II (400 МГц) при 25 °С, используя в качестве растворителя ДМСО-d_6 или $Д_2О$.

Результаты и их обсуждение. В ^{1}Н ЯМР спектре сополимера, выделенного через 2 ч после реакции с лейцином в растворе ДО при 105 °С (рис. 1*а*), в сравнении со спектром исходного сополимера (рис. 1*б*), наблюдаются сигналы протонов, принадлежащих как полимеру, так и фрагментам аминокислоты. Протонам исходного сополимера в спектре соответствуют уширенные сигналы в области 2,8–4,6 м. д. (СН звена МА); 2,1–2,8 и 4,8–5,6 м. д. (CH_2 и СН звена ВА), которые относятся к основной полимерной цепи, и интенсивный сигнал в области 1,6–2,1 м. д. с максимумом при 1,9 м. д. (CH_3 в боковой цепи звена ВА) [4, 8]. Группам Leu соответствуют: триплет ***1*** в области 0,6–1,0 м. д. с центром при 0,92 м. д. (CH_3); мультиплет ***2*** в области 1,5–1,8 м. д. с центром при 1,68 м. д. (β–CH_2, γ–СН); триплет ***3*** в области 3,6–3,8 м. д. с центром при 3,71 м. д. (β–СН) [9]. Свидетельством того, что аминокислота входит в боковую цепь полимера, является уширенный вид сигналов, относящихся к указанным протонам.

В то же время уширенная форма сигнала не позволяет оценить, относятся ли сигналы ***1–3*** в ^{1}Н ЯМР спектре (рис.1*а*) к звеньям с полуамидными (ПА) или циклическими группами (ЦА), которые могут образовываться при взаимодействии аминогрупп аминокислоты с карбоксильными группами сополимера, как показано на схеме:



где R: CH_2; $CH–CH_2–CH(CH_3)_2$; $CH–CH(CH_3)–C_2H_5$.

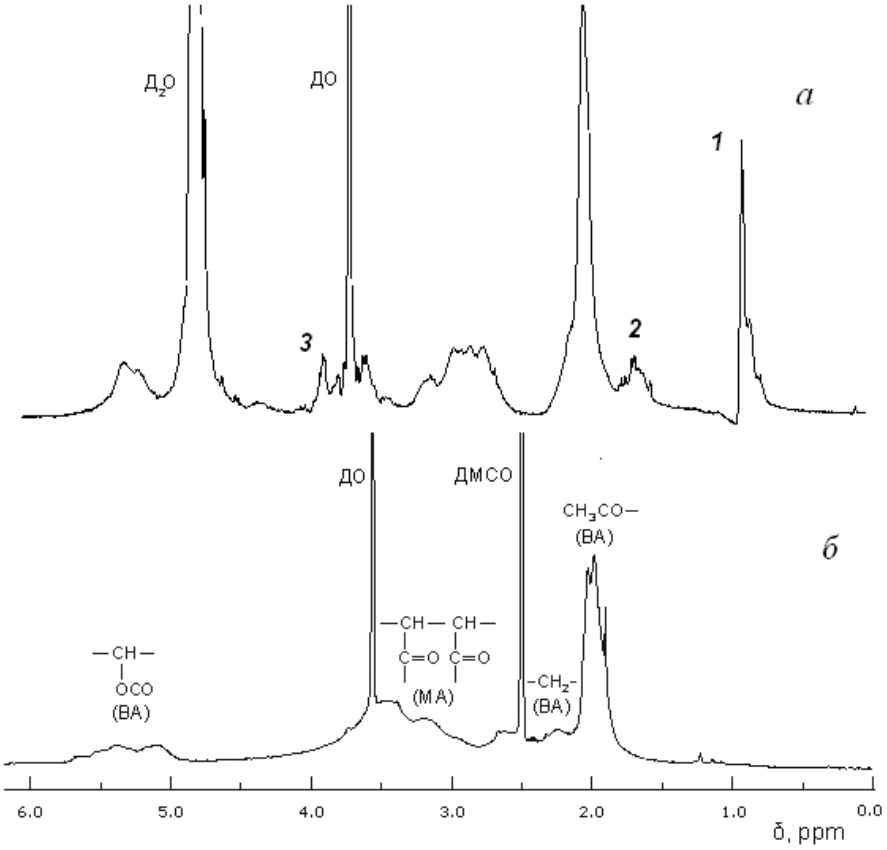


Рис. 1. Спектры ^{1}H ЯМР сополимера МА–ВА (*б*) и продукта его модификации (105 °С, 2 ч) лейцином (*а*). Растворитель: $Д_2O$ (*а*), ДМСО-d_6 (*б*); 400 МГц, 25 °С

Для определения состава полученных образцов проводили их потенциометрическое титрование щелочью в водной среде. Кривые титрования продуктов, полученных при модификации в растворе ДО, как и исходного гидролизованного сополимера, характеризуются наличием двух перегибов, а кривые титрования образцов, полученных в водном растворе, имеют вид, сходный с кривой титрования свободной аминокислоты (рис. 2*а*). Во всех случаях скачки на зависимостях $\Delta pH/\Delta V = f(V_{NaOH})$, полученных для продуктов модификации, наблюдаются при меньшем объеме щелочи по сравнению с кривыми титрования исходного гидролизованного сополимера (рис. 2*б*), что подтверждает связывание карбоксильных групп полимерной цепи аминогруппой добавленной кислоты.

Как известно [8], два скачка на кривой титрования сополимера МА–ВА обусловлены последовательной нейтрализацией соседних карбоксильных групп в структурной единице данного полимера. В звене ПА также имеются две карбоксильные группы, однако, поскольку соотношение констант их диссоциации в воде существенно меньше 10^4 (pK_1 янтарной кислоты 4,21 [10], pK_1 глицина, лейцина и изолейцина 2,30–2,32 [11]), обе группы должны титроваться совместно [12]. Действительно, на кривой титрования наблюдается только один скачок (рис. 2). Кроме того, корректному проведению анализа в водной среде мешает образование цвиттер-ионов аминокислот. Для усиления их кислотных свойств необходимо проведение титрования в полярном органическом растворителе протофильного характера, обладающем выраженными дифференцирующими свойствами, к которым относится ДМФА [12].

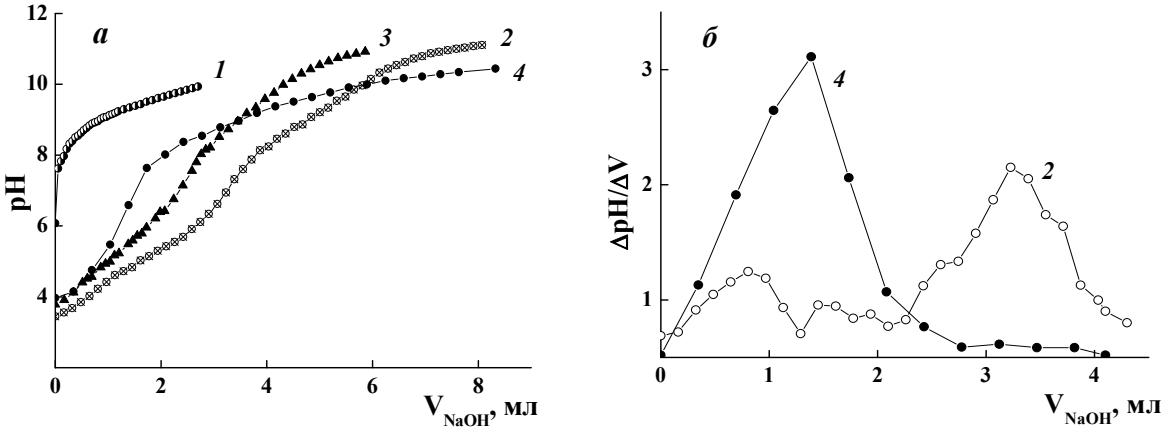


Рис. 2. Кривые потенциометрического титрования лейцина (*1*), сополимера МА–ВА (*2*) и продуктов его модификации лейцином (105 °С, 2 ч) в ДО (*3*) и в воде (*4*).
а – исходная кривая; *б* – ее первая производная
Условия титрования: растворитель – вода, титрант – 0,1 н NaOH.

С этой целью нами была подобрана водно-органическая смесь с минимальным содержанием воды, необходимым для получения гомогенного раствора (ДМФА : H_2O = = 87 : 13 по об.), в качестве титранта использовали раствор КОН в *изо*-пропаноле. В такой среде на дифференциальной кривой титрования изолейцина наблюдается один максимум, сополимера МА–ВА – два максимума (кривые *1*, *2* на рис. 3). Наличие трех экстремумов при титровании смеси сополимера с Ile (кривая *3* на рис. 3) обусловлено реакциями одной карбоксильной группы изолейцина и двух СООН групп звена МА. Для продукта амидирования МА–ВА изолейцином в растворе ДО (кривая *4* на рис. 3) провели расчет содержания кислотных групп, соответствующих каждому из двух наблюдаемых максимумов. Полученные значения на 10–20 % меньше, чем количество карбоксильных групп в сополимере, в котором 100 % ангидридных звеньев превратились в полуамидные (26,8 мас. %), и в гидролизованном сополимере (48,6 мас. %). Это позволяет говорить о том, что первый перегиб на потенциометрической кривой титрования амидированных сополимеров (кривая *3* на рис. 2) связан с нейтрализацией СООН группы аминокислоты, второй – СООН группы малеинового

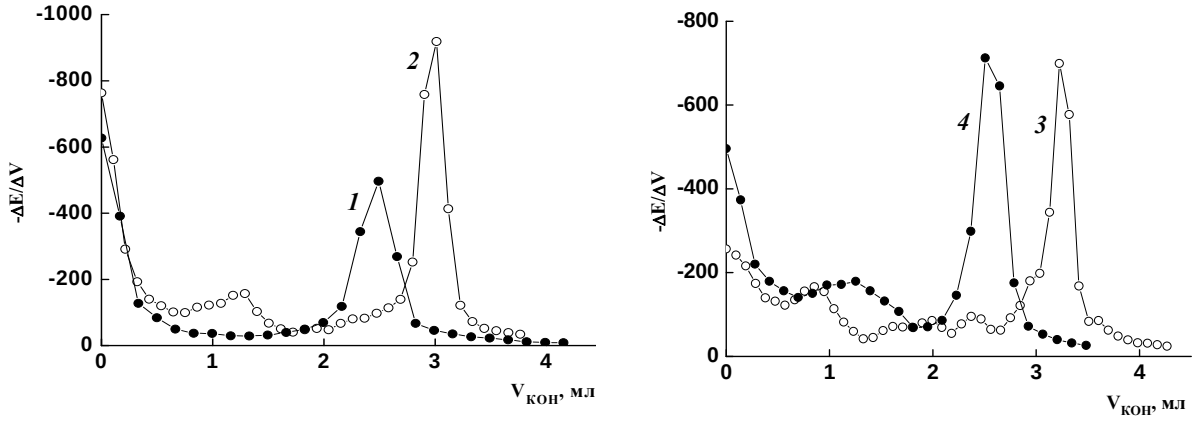


Рис. 3. Дифференциальные кривые 1-го порядка потенциометрического титрования изолейцина (*1*), сополимера МА–ВА (*2*), смеси сополимера с Ile (*3*) и продукта модификации сополимера изолейцином (105 °С, 2 ч в ДО) (*4*).
Условия титрования: растворитель – смесь ДМФА–вода, титрант – 0,1 н КОН в ИПС.

ангидрида в звене полуамида и при этом модификация протекает с образованием в полимерных цепях, наряду со звеньями ПА, также некоторого количества звеньев с имидными группами.

При наличии в продукте модификации звеньев ПА (с долей x) и ЦА (с долей $(1–x)$) общее содержание COOH групп, определяемое в результате титрования, включает 2 группы в звене полуамида и 1 группу в звене малеимида. Отсюда молекулярная масса звена сополимера:

$$\mathrm{MM}_{\text{зв}} = x \cdot \mathrm{M}_{\text{звПА}} + (1-x) \cdot \mathrm{M}_{\text{звЦА}} = \frac{\left[2x \cdot 45 + (1-x) \cdot 45\right] \cdot n_{\mathrm{MA}} / 50}{\omega\ (\mathrm{COOH})} \cdot 100\% = \frac{90 \cdot (1+x) \cdot n_{\mathrm{MA}}}{\omega\ (\mathrm{COOH})},$$

где 45 – молекулярная масса группы COOH, г/моль; 2 – число групп COOH в исходном гидролизованном сополимере; n_{MA} – содержание звеньев МА в исходном сополимере, % мас.; $\mathrm{M}_{\text{звПА}}$ и $\mathrm{M}_{\text{звЦА}}$ – молекулярная масса звена сополимера, модифицированного соответственно до ПА и ЦА.

Таким образом, долю полуамидных звеньев (в % мас.) можно рассчитать по уравнению:

$$x = \frac{\mathrm{M}_{\text{звЦА}} \cdot \omega\ (\mathrm{COOH}) - 90 \cdot n_{\mathrm{MA}}}{90 \cdot n_{\mathrm{MA}} - \omega\ (\mathrm{COOH}) \cdot \mathrm{M}_{\mathrm{H_2O}}}. \quad (1)$$

Расчет содержания COOH групп для большого числа образцов сополимеров, модифицированных аминокислотами в различных условиях (табл.), подтверждает предположение о том, что при амидировании МА–ВА в растворе ДО реакция протекает до образования звеньев ПА и ЦА. При модификации сополимера лейцином в водном растворе амидирование протекает более глубоко: концентрация кислотных групп составляет всего 9–14 мас.% (табл.). Это говорит о полном преобразовании звеньев МА в малеимидные и объясняет наличие одного перегиба на кривых титрования таких образцов, соответствующего нейтрализации COOH групп аминокислотного остатка (кривая *4* на рис. 2).

Таблица

Количество карбоксильных, полуамидных и имидных групп в составе сополимера МА–ВА и продуктов его модификации аминокислотами в растворе при 105 °С

Характеристики сополимера		Амино-кислота	Условия реакции	ω(COOH), мас. % (расчет [1] / эксперимент)	ПА, мол. доли	ЦА, мол. доли
M_η, Da	ω(МА), мас. %					
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
26700	47,9	Gly	ДО, 2 ч	32,1 / 27,2	0,54	0,46
			ДО, 2 ч, ТЭА [2]	32,1 / 26,6	0,51	0,49
		Leu	ДО, 2 ч	26,8 / 26,6	0,88	0,12
			ДО, 2 ч, порционное введение добавки [3]	26,8 / 24,6	0,67	0,33
			ДО, 2 ч, ТЭА	26,8 / 25,5	0,77	0,23
			ДО, 4 ч	26,8 / 24,6	0,70	0,30
			ДО, 4 ч, ТЭА	26,8 / 25,9	0,80	0,20
		Ile	ДО, 2 ч	26,8 / 24,7	0,71	0,29
			ДО, 2 ч, порционное введение добавки	26,8 / 25,6	0,78	0,22
			ДО, 2 ч, ТЭА	26,8 / 26,4	0,84	0,16

Продолжение таблицы

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
99000	52,8	Leu	ДО, 2 ч	28,5 / 24,5	0,60	0,40
			ДО, 2 ч, порционное введение добавки	28,5 / 26,0	0,71	0,29
			ДО, 4 ч	28,5 / 20,7	0,41	0,59
			H_2O, 2 ч, осадитель 1 [4)]	28,4 / 9,1	–	1,0
			H_2O, 2 ч, осадитель 2 [4)]	28,4 / 10,8	–	1,0
			H_2O, 2 ч, ТЭА	28,4 / 13,8	–	1,0
		Ile	ДО, 4 ч	28,5 / 25,7	0,69	0,31

[1)] ω(COOH) в исходных сополимерах рассчитывали для состава 50:50 % мол., в модифицированных – для случая 100 %-ного превращения ангидридных звеньев в полуамидные;
[2)] соотношение звено МА : ТЭА = 1 : 0,6 моль/моль;
[3)] аминокислоту вводили в реакционную систему равными долями через 0,5 ч;
[4)] осадитель 1 – этиловый спирт, осадитель 2 – диэтиловый эфир.

Согласно результатам расчета по формуле (1), наиболее глубоко амидирование сополимера в среде ДО протекает при использовании глицина: содержание полуамидных и имидных звеньев составляет ~ 1 : 1. При модификации аминокислотами с разветвленной боковой цепью изменение условий синтеза (повышение продолжительности реакции от 2 до 4 ч, присутствие катализатора, порционное введение добавки в реакционную смесь) слабо влияет на степень амидирования: во всех случаях содержание звеньев ПА в сополимерах составило 70–80 %; малеимидных, соответственно, 20–30 %. Такой результат может быть связан с тем, что реакция проходит в гетерогенной среде вследствие плохого растворения аминокислот в органическом растворителе.

При проведении реакции в воде модификация сополимера осуществляется в гомогенном растворе и в этом случае амидирование протекает с образованием большего количества малеимидных звеньев (см. табл.). Недостатком данного способа синтеза является невозможность полного выделения продуктов из раствора. При использовании в качестве осадителя этилового спирта максимальный выход коньюгатов составил 21 %, при высаждении диэтиловым эфиром – 50 %. Однако, в последнем случае продукт модификации выделяется в виде липкой массы.

Таким образом, при модификации сополимера МА–ВА α-аминокислотами происходит превращение полимерных звеньев в полуамидные и малеимидные. Варьирование условий проведения реакции приводит лишь к небольшому изменению соотношения таких звеньев. Максимальное количество звеньев ПА образуется при амидировании сополимера аминокислотами с разветвленной боковой цепью в растворе 1,4-диоксана. При проведении модификации в водной среде происходит образование преимущественно циклических звеньев.

Выводы. Проведено амидирование сополимеров малеинового ангидрида с винилацетатом аминокислотами в растворе диоксана (105 °С, 2 или 4 ч, с триэтиламином и без катализатора). Выделены сополимеры, содержащие звенья полуамида и малеимида, соотношение которых составляет 1 : 0,9 при модификации глицином, 1 : 0,2–0,5 – лейцином, изолейцином. Модификация сополимера в воде аминокислотами с разветвленной боковой цепью приводит к полному превращению звеньев малеинового ангидрида в малеимидные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smart polymersomes and hydrogels from polypeptide-based polymer systems through α-amino acid N-carboxyanhydride ring-opening polymerization. From chemistry to biomedical applications / E. Liarou, S. Varlas, D. Skoulas [et al.] // Progr. Polym. Sci. – 2018. – Vol. 83. – P. 28-78.

2. Synthesis and Biocompatibility of Maleic Anhydride Copolymers: 1. Maleic Anhydride–Vinyl Acetate, Maleic Anhydride–Methyl Methacrylate and Maleic Anhydride–Styrene / D. Spiridon, L. Panaitescu, D. Ursu [et al.] // Polym. Int. – 1997. – Vol. 43, No 2. – P. 175-181.
3. In vitro amoebicidal activity of poly(maleic anhydride-co-vinyl acetate) copolymer on Acanthamoeba spp. trophozoites and cysts / G. Karakus, E. Malatyali, H. B. Zengin [et al.] // Basic Clin. Sci. – 2013. – Vol. 2. – P. 1-14.
4. Chitanu G. C. Synthesis and characterization of maleic anhydride copolymers and their derivatives. 2. New data on the copolymerization of maleic anhydride with vinyl acetate / G. C. Chitanu, I. Popescu, A. Carpov // Rev. Roumaine de Chim. – 2006. – Vol. 51, No 9. – P. 923-929.
5. Guven G. Complex-radical copolymerization of N-vinylpyrrolidone with isostructural analogs of maleic anhydride / G. Guven, Z. M. O. Rzaev // Polymer Bul. – 2008. – Vol. 60. – P. 741-752.
6. Synthesis, structural characterization, and antiproliferative/cytotoxic effects of a novel modified poly(maleic anhydride-co-vinyl acetate)/doxorubicin conjugate / G. Karakus, A. Ece, A. S. Yaglioglu [et al.] // Polymer Bulletin. – 2017. – Vol. 74, No 6. – P. 2159-2184.
7. Торопцева А. М. Лабораторный практикум по химии и технологии высокомолекулярных соединений / А. М. Торопцева, К. В. Белогородская, В. М. Бондаренко. – Л. : Химия, 1972. – 416 с.
8. Behaviour of the poly(maleic anhydride-co-vinyl acetate) copolymer in aqueous solutions / G. Nemtoi, C. Beldie, C. Tircolea [et al.] // Eur. Polym. J. – 2001. – Vol. 37, No 4. – P. 729-735.
9. Тихонов В. П. Изучение конформационных превращений лейцина, изолейцина и валина методом ПМР / В. П. Тихонов, Н. А. Костромина // Теор. экс. химия. – 1977. – Т. 13, № 4. – С. 496-503.
10. Лурье Ю. Ю. Справочник по аналитической химии / Ю. Ю. Лурье. – М. : Химия, 1989. – 448 с.
11. Харнед Г. Физическая химия растворов электролитов / Г. Харнед, Б. Оуэн. – М. : Изд-во ин. л-ры. – 1952. – 628 с.
12. Крешков А. П. Аналитическая химия неводных растворов / А. П. Крешков. – М. : Мир, 1982. – 256 с.

Поступила в редакцию 13.02.2019 г.

MODIFICATION OF MALEIC ANHYDRIDE AND VINYL ACETATE COPOLYMERS BY AMINO ACIDS

T.V. Kryuk, T.G. Tyurina, O.S. Kobtceva

High-molecular amides from maleic anhydride – vinyl acetate copolymers and same amino acids (glycine, leucine, isoleucine) have been synthesized. By NMR spectroscopy and potentiometric titration methods it was established that mixture of semi-amide and cyclic amide units is formed in the polymer chain at amidating in a solution of dioxane (105°C). Reaction conditions (synthesis time, catalyst, method of introducing amino acid) have insignificant effect on the ratio of reaction products. In the reaction of copolymers with amino acids in a homogeneous aqueous medium (105°C) only maleimide units are formed.

Keywords: copolymer; maleic anhydride; vinyl acetate; amino acids; modification.

Крюк Татьяна Владленовна
кандидат химических наук;
ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк.
E-mail: ktvl2010@mail.ru

Kryuk Tatyana
Candidate of Chemical Sciences;
State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk

Тюрина Татьяна Григорьевна
доктор химических наук;
ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк.
E-mail: t_tiurina@mail.ru

Tyurina Tatyana
Doctor of Chemical Sciences;
State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk

Кобцева Олеся Сергеевна
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», магистрант химического факультета.
E-mail: olesyakobtceva969@gmail.com

Kobtceva Olesya Sergeevna
Donetsk national University, undergraduate student at the Department of chemistry

Б И О Л О Г И Ч Е С К И Е Н А У К И

УДК 57.042; 577.0

МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ АСИММЕТРИИ КЛЕНА ОСТРОЛИСТНОГО (*ACER PLATANOIDES* L.) В УСЛОВИЯХ г. ДОНЕЦКА

© 2019. *О.Р. Кольченко, В.О. Корниенко*

Проведен обзор имеющихся шкал оценки флуктуирующей асимметрии для различных растительных организмов. Показана важность разработки адаптационной шкалы для оценки флуктуирующей асимметрии в различных условиях произрастания *Acer platanoides* L. Подобрано оптимальное количество параметров для измерения флуктуирующей асимметрии листовой пластины *Acer platanoides* L. для наиболее быстрого анализа показателя. Разработана шкала оценки флуктуирующей асимметрии *Acer platanoides* L. в условиях г. Донецка.

Ключевые слова: антропогенная нагрузка; биоиндикация; шкала оценки; флуктуирующая асимметрия; *Acer platanoides* L.

Введение. В настоящее время в связи с повышением техногенного загрязнения и возрастании антропогенного и автотранспортного влияния на экологическое состояние крупных городов, появляется необходимость индикации загрязнения окружающей среды [1]. Для индикации состояния городской среды наиболее перспективными биоиндикаторами являются древесные растения, которые являются неотъемлемым компонентом урбанизированных экосистем [2]. Наиболее чувствительным органом древесных растений, который в первую очередь дает реакцию на повышенный уровень стрессового фактора является листовая пластина. Данная реакция может проявляться в наличии хлорозов, некрозов, повышении или понижении уровня определенных фотосинтетических пигментов или в асимметрии листовой пластины. На современным этапе, наиболее распространенным методом индикации является исследование асимметричности листовых пластин.

С начала XXI в. большую популярность набрал метод флуктуирующей асимметрии. Данный метод применяется при оценке состояния,как животных, так и растительных организмов в стрессовых условиях среды. По общепринятому определению, флуктуирующая асимметрия (ФА) – это ненаправленные отклонения от идеальной симметрии билатеральных морфологических признаков. Это один из типов асимметрий, среди которых выделяют также направленную и антисимметрию. Считается, что ФА возникает в результате ослабления способности организма контролировать развитие в условиях генетического или экологического стресса и наилучшим образом характеризует отклонения от условной нормы [3]. Из всех видов асимметрии, именно ФА способна дать некоторую информацию об уровне стресса, испытываемого организмом [4–5]

Имеется множество подходов к исследованиям посвященным ФА и асимметрии в целом. В основном, используется методика, разработанная Захаровым и др [6]. Также, часто используется шкала оценки ФА, разработанная этими исследователями и большая ошибка применять её к другим объектам и территориям без ее калибровки и адаптации.

Поэтому нами была предпринята попытка адекватно оценить состояние растительных организмов с учетом всех возможных ошибок постановки эксперимента и производимых расчетов. К таким ошибкам можно отнести измерение признаков объекта ручными методами, использование мелколистных видов деревьев в качестве объекта, использование «стандартной шкалы» при оценке ФА и др [3].

Целью данной работы является разработка адаптированной шкалы оценки ФА для г. Донецка. Задачи: 1) провести обзор существующих шкал оценки ФА; 2) обосновать необходимость создания адаптированной шкалы в условиях г. Донецка; 3) подбор достаточного количества параметров достоверной оценки ФА *Acer platanoides* L.; 4) создание шкалы оценки ФА с учетом уровня антропогенной нагрузки для г. Донецка.

Величина ФА может меняться под воздействием большого количества факторов: генетической структуры популяции [7], климата, почвенных условий, повреждения животными, комплекса антропогенных факторов и др. [3]. Поэтому тяжело вычленить какой-то отдельный фактор, который влияет на уровень ФА. Следует говорить о комплексном воздействии и учитывать максимальное количество факторов участвующих в антропопрессинге.

Также известно, что в некоторых исследованиях указывается отсутствие превышений показателя ФА у организмов из нарушенных местообитаний по сравнению с контрольными [3, 8]. Данный факт может свидетельствовать об индивидуальной чувствительности каждого вида организмов, взятого для исследований или о различии применяемых методик для оценки полученных результатов.

Известно, что величина ФА возрастает при гибридизации растительных организмов [7]. В большинстве работ российских ученых в качестве модельных объектов при исследовании ФА являются разные виды берез, в частности, наиболее распространенный вид в биоиндикации *Betula pendula* Roth. По данным Коропачинского [9] березы часто образуют гибриды. Гибридизация же, в свою очередь, способствует увеличению показателя асимметрии, что может нарушать оценку полученных результатов.

В публикациях большого количества авторов замечено применение шкалы оценки показателя ФА, разработанной Захаровым и др.[6] для *Betula pendula* Roth (табл. 1).

Таблица 1

Пятибалльная шкала оценки отклонений состояния организма от условной нормы по величине интегрального показателя флуктуирующей асимметрии для березы повислой (*Betula pendula* Roth) (по Захарову и др., 2000)

Балл	Показатель ФА
I	<0,040
II	0,040–0,044
III	0,045–0,049
IV	0,050–0,054
V	>0,054

Примечание: I – условная норма, II – слабое влияние неблагоприятных факторов, III и IV – загрязненные районы, V – критическое значение

Данная шкала считается универсальной и часто применяется для оценки состояния как исходного вида, так и других видов берез и даже совсем не близкородственных видов деревьев. Так, в работах ряда авторов [10-24] представлена оценка состояния *Betula pendula* Roth по шкале Захарова без ее адаптации к исходным условиям произрастания видов. Авторы не учитывают показатели условно контрольных групп, как отправную точку анализа всех остальных показателей, поэтому их данные могут носит некорректную оценку.

Замечено использование данной шкалы для оценки и других видов древесных растений, которые не имеют близкородственной связи с *Betula pendula* Roth и имеют совершенно другую структуру листовой пластины. Часто производят оценку

Acer platanoides L. [11, 25, 26], *Populus nigra* L [12, 27], *Populus balsamifera* L. [28], *Taraxacum officinale* [29], *Crataegus sanguine* Pall [30], *Petroselinum tuberosum* [31] и др. видов не учитывая их индивидуальные особенности и реакцию в виде ФА на антропогенную нагрузку.

Другой шкалой оценки является шкала разработанная Стрельцовым [32] (табл. 2). В данной шкале представлена пятиббальная оценка состояния для березы бородавчатой (повислой), а также для всех остальных видов растительных организмов. Как можно заметить, балл асимметрии соответствующий условной норме по сравнению с такой же нормой для березы повислой по шкале Захарова имеет более высокий показатель, что говорит об адаптации автором балльной системы под условия обитания данного вида. Также имеется балльная оценка состояния других растительных организмов и она имеет достаточного большой диапазон значений, что, вероятнее всего, не дает возможность корректно оценить состояния других растений.

Таблица 2

Балльная система качества среды обитания живых организмов по показателям флуктуирующей асимметрии высших растений (по А.Б. Стрельцову, 2003)

Виды	Балл				
	1	2	3	4	5
Береза бородавчатая	<0,0550	0,0560–0,0600	0,0610–0,0650	0,0650–0,0700	>0,0700
Все виды растений	<0,0018	0,0019–0,0089	0,0090–0,0220	0,0220–0,0400	>0,0400

Примечание: 1 – чисто; 2 – относительной чисто («норма); 3 – загрязнено («тревога»); 4 – грязно («опасно»); 5 – очень грязно («вредно»).

Различие между шкалой Захарова и Стрельцова прослеживается в подходе оценки. Захаров оценивает отклонения состояния организма от условной нормы и на основе этого делает предположение о загрязненности его местообитания. Шкала же Стрельцова сразу оценивает качество среды в месте произрастания исследуемого организма. При этом, как известно, для различных видов растительных организмов может не прослеживаться прямой корреляции между ФА и местом обитания, в котором произрастает организм. В данном случае необходим более тонкий подход к исследованию.

По данной шкале также производят оценку ФА многих растений, опираясь на универсальность разбалловки. Среди работ российских авторов по данной шкале была произведена оценка *Trifolium repens* L. [33] и *Acer platanoides* L. [34].

Одна из первых попыток адаптации шкалы Захарова к другому объекту исследования (*Quercus robur* L.) принадлежит Гераськиной [35], на основе рекомендаций Константинова [36]. Одним из важных факторов адаптации шкалы по Константинову является выделение пределов измерения значений показателя ФА.

Попытку адаптации шкалы Захарова к оценке состояния *Acer platanoides* L. предпринял Мелькумов [37] (табл. 3) В данной шкале имеется пятиббальная система оценки с учетом места произрастания исследуемого вида. В отличие от шкалы Захарова значения показателя асимметрии в шкале Мелькумова имеют более широкий диапазон. Вероятнее всего, подобные изменения были произведены с учетом большой вариации показателей ФА в исследованиях данного автора.

Эта шкала наиболее подходит для оценки показателя ФА в регионе производимых исследований и лишь для конкретного вида древесных растений.

Таблица 3

Шкала отклонения от нормы *Acer platanoides* L. по ФА (по Мелькумову, 2014)

Балл	Значение показателя асимметрии
1 балл – условная норма	<0,015
2 балла	0,016–0,025
3 балла	0,026–0,035
4 балла	0,036–0,045
5 баллов	0,046–0,055
Критическое состояние	>0,056

Учитывая анализ имеющихся шкал нами была предпринята попытка создания подобной пятиббальной оценочной шкалы для *Acer platanoides* L. в условиях г. Донецка. Данный объект был выбран в связи своей распространенности на территории г. Донецка, листья клена остролистного имеют крупный размер, что уменьшает наличие большой погрешности измерений[3], а также данный вид не подвержен гибридизации, что помогает произвести наиболее точную оценку состояния растительного организма по показателю ФА.

Материалы и методы. Для исследования нами был выбран Буденовский и Калининский районы, которые были поделены на 5 участков по наличию объекта исследования и его произрастания вдоль крупных автомагистралей: Макеевское шоссе, пр. Ильича, ул. Светлого Пути и ул. Крепильщиков. В качестве контрольного участка исследовали крутину *Acer platanoides* L. на территории дендрария Донецкого ботанического сада.

Сбор листьев производился в середине августа-начале сентября, в период полного формирования всех структур листовой пластины. Весь материал был собран со световой стороны, с нижней части кроны. Листья отбирались приблизительно равного размера, исключая в выборке наличия слишком крупных или слишком мелких экземпляров. После сбора листовые пластины сканировали на сканере высокого разрешения и гербаризировали. Замер параметров для оценки ФА производился в программе AxioVisiover. 4.8. Данный метод измерения по сравнению с ручными методами измерения линейкой, шангенциркулем и транспортиром [12, 17] имеет преимущество в плане снижения погрешности до минимума.

Для измерения показателя ФА нами были выбраны 4 параметра листовой пластинки, предложенных Мелькумовым [37] (рис. 1). Чаще всего для измерения ФА используется 5–7 параметров листовой пластины, которые были предложены Кряжевой [38]. Уменьшение количества измеряемых параметров статистически не отличается от большего количества и ускоряет сам процесс измерения.

Рис. 1. Измеряемые параметры ФА

Данные параметры оценили на флуктуирующий характер каждого из них. Для этого вычисляли эмпирического значения коэффициента эксцесса для анализа наличия антисимметрии и эмпирическое значение критерия Уилкоксона для проверки наличия направленной асимметрии [39].

Исследование вибрационно-акустического шума вдоль автомагистралей проводили с помощью измерителя уровня шума GM1351 и портативного осциллографа. Измерение шума производилось через каждые 30–40 метров возле автотрасс.

Проводилось исследование содержания тяжелых металлов в почвах исследуемых участках на атомно-абсорбционном спектрофотометре (ААС). Для анализа аэрополлютантов вблизи автомагистралей пользовались универсальным газоанализатором ГАНК-4. Данные исследования проводились согласно ГОСТам [40, 41]. Жизнеспособность исследованных деревьев определяли по 8-бальной шкале С.А. Савельевой [42].

Результаты и обсуждения. По данным исследований было выявлено превышение некоторых тяжелых металлов в почвах. Так, содержание Zn в почвах вдоль автомагистралей превышено в среднем в 1,8 раза, Cu– в 16 раз. На одном из участков (ул. Крепильщиков) выявлено превышение в содержании Cr в 2 раза. По данным полученным с газоанализатора обнаружено превышение сероводорода (H_2S) в 2,2 раза. Уровень звукового давления на участков в среднем превышен на 10–14 %.

Анализируя результаты по ФА, выявлено, что на контрольном участке показатель асимметрии в среднем составил 0,045. Показатель асимметрии на всех остальных участках варьировал от 0,049 до 0,066.

В случае оценки данных показателей по шкале Захарова, следует вывод о высоком уровне стрессовой нагрузки на растительный организм даже на территории контроля (III–V баллов). Однако, загрязнения почв тяжелыми металлами и воздуха аэрополлютантами на данной территории обнаружено не было, так же как и не был превышен ПДУ по вибрационно-акустическому шуму (45 дБА). Оценивая полученные данные по шкале Стрельцова видно, что показатель асимметричности на нашей условно контрольной территории соответствует критическому состоянию окружающей среды в месте произрастания организма (5 баллов). Подобную ситуацию мы можем наблюдать, оценивая наши показатели по шкале Мелькумова (5 баллов).

Таким образом, мы отталкивались от полученного нами показателя асимметричности на территории дендрария, сделав его условной нормой для адаптации оценочной шкалы.Учитывая разброс данных по параметрам ФА, полученным с других участков, мы распределили значения показатели асимметричности по пятиббальной системе с разбегом в пять единиц для каждого балла (табл. 4).

Таблица 4

Пятибалльная шкала оценки отклонений состояния организма от условной нормы по величине показателя флуктуирующей асимметрии

Балл	Значение показателя асимметричности	Уровень антропогенной нагрузки на окружающую среду	Реакция организма
I	<0,046	Минимальный	Условно нормальная
II	0,046–0,050	Средний	Небольшие отклонения от нормы
III	0,051–0,055	Высокий	Существенные нарушения
IV	0,056–0,060	Очень высокий	Опасные нарушения
V	>0,060	Критический	Критическое состояние

Нами также была выявлена корреляцию (R^2=0,7) между показателем ФА и уровнем звукового давления как одного из факторов антропопрессинга. Таким образом, мы постарались связать значение показателя асимметричности с уровнем антропогенной нагрузки.

Также нами обнаружена прямая зависимость между жизнеспособностью древесных растений и показателем ФА их листовых пластин (R^2=0,91). Таким образом, мы также связали показатель асимметричности с реакцией живого организма.

Выводы. В результате проведенных исследований был выявлен высокий уровень антропогенной нагрузки на деревья клена остролистного, произрастающих вдоль автомобильных магистралей города Донецка. На основании этого проведено исследование показателей ФА *Acerplatanoides* L. и сделана попытка оценки состояния организма и среды, в которой он находится по имеющимся шкалам. Анализируя полученные показатели асимметрии, был сделан вывод о невозможности применения имеющихся шкал для данного объекта исследования на территории г. Донецка. Поэтому, учитывая все полученные данные, была найдена зависимость между показателями асимметрии, уровнем антропогенной нагрузки и состоянием растительного организма на исследуемых территориях. Таким образом, можно судить о чувствительности листового аппарата клена остролистного, что дает возможность использования данного вида древесных растений в качестве биоиндикатора с учетом правильного методического подхода в оценке флуктуирующей асимметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седельникова Л.Л. Аккумулирующая способность листьев декоративных растений в городской среде/ Л.Л. Седельникова, О.Л. Цандекова // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. – № 7 . – 2015. – С. 80-83
2. Горелова С.В. Биоиндикация и биомониторинг антропогенного загрязнения экосистем с использованием биогеохимических характеристик листьев древесных растений (на примере Тульской области) / С.В. Горелова, Е.М. Волкова, М.В. Фронтасьев // Известия Тульского государственного университета. – 2015. – Вып. 4. – С. 232-247.
3. Козлов М.В. Исследования флуктуирующей асимметрии растений в России: мифология и методология / М.В. Козлов // Экология. – 2017. – № 1. – С. 3-12
4. Козлов М.В. Стабильность развития: мнимая простота методики (о методическом руководстве «Здоровье среды: методика оценки») / М.В. Козлов // Заповедники и национальные парки. – 2001. – № 36. – С. 23-25
5. Moller A.P. Asymmetry, developmental stability, and evolution / A.P. Moller, J.P. Swaddle // Oxford: Oxford Univ. Press. – 1997. – 291 p.
6. Здоровье среды: методика оценки / В.М. Захаров, А.С. Баранов, В.И. Борисов и др. – М.: ЦЭПР. – 2000. – 65 с
7. Leaf fluctuating asymmetry increases with hibridization andintrogression between Quercusmafnoliifolia and Quercusresinosa (Fagaceae) through an altitudinal fradient in Mexico / A.L. Albarran-Lara, L. Mendoza-Cuenca, S. Avalos at al. //Intern. J. Plant Sci. – 2010. – Vol. 171, No 3. – P. 310-322
8. Graham J.H. Fluctuating asymmetry: methods, theory, and applications / J.H. Graham, S. Raz, H. Hel-Or, E. Nevo // Symmetry. – 2010. – Vol. 2. – P.466-540
9. Коропачинский И.Ю. Естественная гибридизация и проблемы систематики берез Северной Азии / И.Ю. Коропачинский // Сибирский экологический журнал. – 2013. – № 4. – С. 459-479
10. Петрушкевич Ю.М. Впливпромислових умов на величину флуктуючоїасиметріїлисткової пластинки betulapendula / Ю.М. Петрувшкевич // Наук. зап. Терноп. нац. пед. ун-ту. Сер. Біол. – 2018. – № 1. – С. 82-89
11. Савинцева Л.С. Экологический анализ адаптивных механизмов растений в урбанизированной среде: дисс. канд. биол. наук. – Киров, 2015. – 169 с.
12. Гордеева И.В. Сравнительная оценка качества окружающей среды с использованием коэффициента флуктуирующей асимметрии листовых пластинок разных видов деревьев / И.В. Гордеева // Успехи современной науки и образования. – 2017. – Т. 2, № 3. – С. 106-110.
13. Клевцова М.А. Биоиндикация экологического состояния урбанизированных состояний / М.А. Клевцова, Фан Тхи Лан Ань // Вестник Воронежского гос. ун-та. – 2016. – № 3. – С. 79-86.
14. Мурашова Д.В. Флуктуирующая асимметрия листовых пластинок березы повислой (Betula pendula), произрастающей на территории национального парка «Шушенский бор» / Д.В. Мурашова // Наука без границ. – 2018. – № 2. – С. 72-75

15. Чернакова О.В. Использование флуктуирующей асимметрии листьев Betula pendula Roth для оценки экологического состояния территории г. Иркутска / О.В. Чернакова, Г.В. Чудновская // Вестник ИрГСХА. – 2018. – № 89. – С. 96-104
16. Залесов С.В. Оценка стабильности состояния березы на различном удалении от ОАО «Уфалейникель» / С.В. Залесов, А.В. Бачурина, А.О. Шевелина // Леса России и хозяйство в них. – 2018. – № 1. – С. 21-27
17. Волчатова И.В. Оценка стабильности развития древесных растений в условиях антропогенного воздействя / И.В. Волчатова, Н.А. Попова // XXI век. Техносферная безопасность. – 2018. – Т. 3, № 1. – С. 43-55
18. Садртдинова Ч.Ф. Влияние полигона твердых коммунальных отходов г. Нефтекамска на состояние окружающей среды / Ч.Ф. Садртдинова, Н.В. Шахринова // Глобальный научный потенциал. – 2018. – № 11. – С. 168-171.
19. Заболотских В.В. Биодиагностика экологического состояния атмосферного воздуха города Самара / В.В. Заболотских, А.В. Васильев, Р.С. Фролов // Матер. конф. Эклогические проблемы бассейнов крупных рек. Тольятти, 15-19 октября 2018 г. – С. 94-96
20. Николайчук А.М. Флуктуирующая асимметрия листовой пластинки березы повислой в условиях техногенного загрязнения окружающей среды выбросами заводов цементной промышленности / А.М. Николайчук, М.Н. Вишкевич // Вестник Музырского государственнго педагогического университета им. И.П. Шамякина. – 2017. – № 2. – С. 46-50
21. Дивульская Н.Н. Оценка флуктуирующей асимметрии древесного растения березы повислой в условиях города Новополоцка / Н.Н. Дивульская // Матер. конф. Молодость. Интеллект. Инициатива. Витебск, 21 апреля 2017 г. – С. 72-74
22. Перзадаева А.А. Биоиндикация экосистем города Астаны по стоянию листьев березы повислой / А.А. Перзадаева // Научный альманах. – 2017. – №10-3. – С. 200-202
23. Фахрутдинова Ю.В. Стабильность развития смородинно-крыжовникового гибрида Josta в условиях интродукции в красноярском крае / Ю.В. Фахрутдинова, Т.А. Кондратюк, Г.Г. Первышина // Вестник Красноярского государственного аграрного университета. – 2017. – № 8. – С. 128-135.
24. Никитина А.А. Оценка качества среды по уровню стабильности развития березы повислой / А.А. Никитина, О.П. Трофимова, С.Г. Баранов // Матер. конф. Проблемы экологического образования в XXI веке. Владимир, 29 ноября – 05 декабря 2017 г. – С. 40-44.
25. Кушнарева А.А. Оценка резистентности клена остролистного (Acerplatanoides L.) к загрязнению атмосферного воздуха по флуктуирующей асимметрии листьев / А.А. Кушнаерва, Н.Б. Стрльцова // матер.конф. Международный студенческий научный вестник. – № 2. – 2015. – С. 362-363.
26. Щербаков А.В. Флуктуирующая асимметрия листа клена остролистного (Acerplatanoides L.) как индикационный показатель качества среды / А.В. Щербаков, Е.О. Королькова // Социально-экологические технологии. – 2015. – С. 111-121.
27. Шайхутдинова А.Р. Флуктуирующая асимметрия – как показатель антропогенного влияия предприятий на качество атмосферного воздуха / А.Р. Шайхутдинова, Е.С. Балымова // Матер. конф. Экология и безопасность жизнедеятельности, Пенза, 21-22 декабря 2017 г. – С. 158-161.
28. Колесова С.Н. Использование метода флуктуирующей асимметрии древесных растений для оценки воздушной среды города Архангельска / С.Н. Колесова // Матер. конф. Геоэкологические проблемы европейского севера арктики, Архангельск, 15-16 февраля 2018 г. – С. 71-74.
29. Шумилов Л.Г. Изучение и оценка качества среды обитания с помощью метода флуктуирующей асимметрии / Л.Г. Шумилов // Матер. конф. Конкурентоспособность территорий. Екатеринбург, 23-27 апреля 2018 г. – С. 134-135
30. Папинен А.Е. Оценка экологического благополучия окрестностей с. Екатериновка с использованием Crataegus sanguine Pall В качестве биоиндикатора / А.Е. Папинен // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2018. – № 11-1. – С. 20-22.
31. Ракутько С.А. Флуктуирующая асимметрия билатеральных признаков как критерий оценки качества облучения в светокультуре / А.С. Ракутько и др. // Технологии и технические средства механизированного производства продукции растениеводства и животноводства. – 2017 – № 91. – С. 45-55.
32. Стрельцов А.Б. Региональная система биологического мониторинга / А.Б. Стрельцов. – Калуга: Изд-во Калужского ЦНТИ, 2003. – 158 с.
33. Соколова Г.Г. Флуктуирующая асимметрия листовой пластинки клевера ползучего при оценке стабильности развития / Г.Г. Соколова, Г.Т. Камалтдинова // Известия Алтайского государственного университета. – 2011. – С. 40-43.

34. Самохова Н.А. Оценка устойчивости клена остролистного к загрязнению атмосферного воздуха выбросами автотранспорта по флуктуирующей асимметрии листа / Н.А. Самохова // сборн. трудов конф. Ландшафтная архитектура и природообустройство: от проекта до экономики-2016 (Саратов, 15-20 февраля 2016 г.). – Саратов, 2016. – С. 141-143.
35. Гераськина Н.П. Оценка стабильности развития дуба черешчатого на территории национального парка «Орловское полесье» / Н.П. Гераськина // Самарская Лука: проблемы региональной и глобальной экологии. – 2009. – Т. 18, № 3. – С. 240-244.
36. Константинов Е.Л. Особенности флуктуирующей асимметрии листовой пластинки березы повислой (Betula pendula Roth.) как вида биоиндикатора: Автореф. дис. канд. биол. наук. – Калуга, 2001. – 20 с.
37. Мелькумов Г.М. Флуктуирующая асимметрия листовых пластинок клена остролистного (Acerplatanoides L.) как тест экологического состояния паркоценозов городской среды / Г.М. Мелькумов, Д.Э. Волков // Вестник Воронежского гос. ун-та. – 2014. – №3. – С.95-98.
38. Кряжева Н.Г. Анализ стабильности развития березы повислой в условиях химического загрязнения / Н.Г. Кряжева, Е.К. Чистякова, В.М. Захаров // Экология. – 1996. – № 6. – С. 441-444.
39. Глухов А.З. Оценка прояления флуктуирующей асимметрии билатеральных признаков листовой пластинки AcerpseudoplatanusL. в условиях придорожных экосистем промышленного города (на примере г. Донецка) / А.З. Глухов и др. // Промышленная ботаника. – 2011. – Вып. 11. – С. 90-96.
40. «Руководство по контролю загрязнения атмосферы. РД 52.04.186-89» (утв. Госкомгидрометом СССР 01.06.1989, Главным государственным санитарным врачом СССР 16.05.1989).
41. ГОСТ 28168-89 Почвы. Отбор проб.
42. Савельева Л.С. Устойчивость деревьев и кустарников в защитных лесных насаждениях / Л.С. Савельева. – М: «Лесная промышленность», 1975. – 168 с.

Поступила в редакцию 26.02.2019 г.

METODICAL APPROACH TO ASSESSING FLUCTUATING ASYMMETRY OF NORWAY MAPLE (*ACER PLATANOIDES* L.) IN THE CONDITIONS OF DONETSK

O.R. Kolchenko, V.O. Kornienko

A review of the existing scales of assessment of fluctuating asymmetry for various vegetable organisms. Shows the importance of developing the adaptation of the scale for the assessment of fluctuating asymmetry in various conditions of growth of *Acer platanoides* L., the optimum number of parameters for the measurement of fluctuating asymmetry of leaf plates of *Acer platanoides* L. for the most rapid indicator analysis. The scale of evaluation of the fluctuating asymmetry of *Acer platanoides* in the conditions of Donetsk was developed.

Keywords: anthropogenic load; bioindication; evaluation scale; fluctuating asymmetry; *Acer platanoides* L.

Кольченко Ольга Руслановна
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк,
студентка
E-mail: daniaua411@gmail.com

Kolchenko Olga R.
Donetsk National University, Donetsk;
Student

Корниенко Владимир Олегович
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк,
старший преподаватель кафедры биофизики.
E-mail: kornienkovo@mail.ru

Kornienko Vladimir O.
Senior Lecturer at the Department of Biophysics

УДК 574.522 : 543.31(477)

ГИДРОХИМИЧЕСКИЙ РЕЖИМ ПРУДОВ СТАРОБЕШЕВСКОГО РАЙОНА

© 2019. *Э.И. Мирненко*

В работе представлены данные по основным гидрохимическим показателям 4 водоёмов Старобешевского района. Дана характеристика класса вод согласно комплексной классификации качества поверхностных вод суши.

Ключевые слова: гидрохимические показатели, фитопланктон, Донбасс, Старобешевский район.

Введение. Природный водоем является естественной сбалансированной экосистемой, настроенной на самоочищение и самовосстановление, биологический баланс которого может быть нарушен, как в результате естественного старения водоема, накапливания в водоеме естественной (автохтонной) органики: листвы, веток, метаболитов гидробионтов и водоплавающих птиц, отмерших водных растений, так и в результате не естественного (аллохтонного) загрязнения водоема органическими веществами и питательными элементами: мусор, ливневые сточные воды, нанос с полей и дорог, плохо очищенные сточные воды, канализация, удобрения. Особенно остро проблема аллохтонного накопления биогенов стоит в Донбассе, поскольку основные потребители воды прудов является сельское хозяйство, коммунальные нужды, культурно-бытовые предприятия, также пруды широко используются для осветления шахтных вод более 7 % прудов используют для рыборазведения, 3 % – в рекреационных целях [1, 2].

За последние 40–80 лет с момента создания большинства прудов Донбасса произошла потеря их функциональности как источника водоснабжения, а ухудшенное состояние водоёмов связанно с ухудшением химического состава воды, приводящее к заиливанию, зарастанию, «цветению» и абразию берегов [2].

Таким образом, целью работы является определение современного состояния гидрохимических характеристик водных объектов Старобешевского района.

Объекты исследования. Объектами исследования послужили пруды расположены на бассейне р. Кальмиус, находящиеся в Старобешевском районе. Пруды находятся в близи сельскохозяйственных угодий.

Пруд № 1, площадью водного зеркала 3,07 га, объемом 63,90 тыс. м^3, расположенный на балке Колодезная, бассейн Кальмиус, на территории Марьяновской сельской администрации, административно относящейся к Старобешевскому району [3].

Пруд № 2, площадью водного зеркала 10,85 га, объемом 146,27 тыс. м^3, расположенный на балке Кривая, бассейн реки Кальмиус, на территории Александровской сельской администрации, административно относящейся к Старобешевскому району [3].

Пруд № 3, площадью водного зеркала 12,25 га, объемом 263,01 тыс. м^3, расположенный на балке Кривая, бассейн реки Кальмиус, на территории Старобешевской поселковой администрации, административно относящейся к Старобешевскому району [3].

Пруд № 4, площадью водного зеркала 6,65 га, объемом 81,12 тыс. м^3, расположенный на балке Широкая, бассейна реки Кальмиус, на территории Марьяновской сельской администрации, административно относящейся к Старобешевскому району [3].

Материалы и методы. Гидрохимический анализ проб искусственных водоемов Донбасса проводились с мая по сентябрь 2018 г. Отбор проб проводили согласно общепринятому руководству по методам отбора проб (ИСО 5667-2) [4].

При оценке гидрохимических параметров прудов естественного и искусственного происхождения анализируют физические (органолептические) свойства воды согласно СанПиН 4630-88: температура воды, цветность, запах, электрометрическое определение активной реакции воды (pH), определение растворенного кислорода по Винклеру, определение количества ионов аммония, определение количества нитрат-ионов, определение количества нитрит-ионов, определение количества сероводорода, определение количества сухого остатка, определение количества железа, определение массовой концентрации взвешенных веществ, определение численности и биомассы фитопланктона [4].

Результаты и обсуждение. В ходе проведенных исследований была дана оценка на основании 17 гидрохимических показателей (табл. 1). Установлено что температура воды в поверхностном слое исследуемых водоемов не поднимается выше +26 °С (пруд № 1), а минимальная температура была отмечена на уровне +17,5 °С для пруда № 2. Вышеуказанное колебание значений температуры связано с изменением погодных и климатических условий в период проведения исследований, однако является типичным для бореальной географической зоны.

Таблица 1

Гидрохимическая характеристика исследуемых водных объектов

№	Показатель	Пруд № 1 на балке Колодезная бассейн Кальмиус	Пруд №2 на балке Кривая, бассейн реки Кальмиус	Пруд №3 на балке Кривая, бассейн реки Кальмиус	Пруд №4 на балке Широкая, бассейна реки Кальмиус
1	Температура, °С	+26	+16,5	+18	+26
2	Взвешенные вещества, мг/дм^3	20	25	16	18
3	Цветность, Pt Co град.	150	80	80	150
4	Хлориды, мг/дм^3	55,0	240,0	258,3	226,6
5	Сульфаты, мг/дм^3	288	452	644	1 449
6	Аммоний, мг/дм^3	0,43	1,70	2,82	0,35
7	Нитриты, мг/дм^3	0,03	0,04	0,03	0,06
8	Нитраты, мг/дм^3	6,14	7,25	0,50	2,75
9	Сухой остаток, мг/дм^3	6 644	3 984	7 320	2 375
10	Растворенный O_2, мгO_2/дм^3	11,17	11,70	10,31	11,56
11	pH, ед. pH	7,8	8,2	8,5	8,2
12	БПК$_5$, мгO_2/дм^3	3,5	3,15	2,50	2,62
13	ХПК, мгO_2/дм^3	16,72	20,16	18,24	16,48
14	Железо, мг/дм^3	0,16	0,38	0,21	0,18
15	Сероводород, мг/дм^3	0,05	0,05	0,05	0,05
16	Численность кл/дм^3	124	167	159	53
17	Биомасса мг/дм^3	38,4	51,9	49,3	16,6

Одним из показателей качества природных и сточных вод является содержание в них взвешенных веществ. *Взвешенные вещества* – это содержащиеся в воде нерастворимые частицы минерального и органического происхождения, имеющие размер более 10^{-3} см. В исследуемых прудах количество взвешенных веществ варьирует от 16 до 25 мг/дм^3. Взвешенные частицы влияют на прозрачность воды и на проникновение в нее света, на температуру, растворенные компоненты поверхностных вод, адсорбцию токсичных веществ, а также на состав и распределение отложений и на скорость осадкообразования [2].

Цветность воды определяли согласно платиново-кобальтовой шкале, необходимо уточнить, что цвет воды (установленный согласно платиново-кобальтовой шкале) это воспринимаемый глазом окрас, имеющий в небольших объемах прозрачный цвет. Однако при увеличении объема вода приобретает различный оттенок, это происходит из-за содержащихся в воде взвешенных веществ, растворенного органического вещества, а также гуминовых кислот, вымываемых из почвы [2]. Все выше перечисленные вещества по селективному поглощению и рассеиванию света, могут окрашивать воду в желто-бурый и бурый цвет, также стоит отметить, что цвет воды непосредственно в водоеме зависит от условий освещенности. Наиболее интенсивное окрашивание проб исследуемых водоемов было выявлено в прудах № 1 и № 4 – 150°. Наименьше окрашенными пробами характеризовались пруды № 2 и № 3.

В исследованных прудах был определен запах воды, вызываемый летучими пахнущими вещества, которые поступают в водоем в процессе жизнедеятельности гидробионтов и при биохимическом разложении органических веществ и их компонентов, а также с промышленными, сельскохозяйственными и хозяйственно-бытовыми сточными водами [2, 4]. Запах исследованных прудов не отличался критическими значениями и характеризовался как землистый, затхлый или болотистый. Основные причины появления запаха в прудах установить невозможно, т. к. они слишком подвержены действию многочисленных факторов, в том числе и биотических, например, в первом пруду, болотистый запах воды появлялся с окончанием «цветения» водорослей, а в пруду № 3 запах в течении всего вегетационного периода варьировал от затхлого до гнилостного и плесневого.

Величина pH, а именно содержание ионов водорода в природных водах было определенно с помощью потенциометра со стеклянным электродом. Источником ионов водорода являются также соотношением концентраций угольной кислоты и ее ионов, а также наличие гумусовых кислоты. Изменения pH тесно связаны с процессами фотосинтеза (из-за потребления CO_2 водной растительностью). В исследуемых прудах концентрация водородных ионов довольно устойчива из-за буферности водной системы. Полученные результаты показывают, что в пробах показатель pH варьировал в диапазоне 7–8 ед., что указывает на условия пониженного количества карбонатов и насыщения воды CO_2. Учитывая, что нормой, установленной в соответствии с СанПиНом 4630-88 [5], является показатель 6,5–8,5, превышение pH в исследуемых прудах не наблюдается.

Количественное определение кислорода имеет важное значение при изучении санитарного состояния открытых водоемов. Концентрация растворенного кислорода в воде была на высоком уровне от 11,70 до 10,31 мг/дм^3 учитывая, что нормой, установленной в соответствии с СанПиН 4630-88 [5], является количество растворенного кислорода большее, чем 4 мг O_2/дм^3, то во всех прудах, без исключения, показатели были в норме, соответственно в воде доминируют эвриксидные организмы. Таким образом, концентрация растворенного кислорода в воде находилась на высоком уровне, что обеспечивает нормальное функционирование и самоочищение водоемов.

Присутствие ионов аммония в незагрязненных поверхностных водах связано с процессами биохимической денатурации белковых веществ. Основные источники поступления ионов аммония в водные объекты являются животноводческие фермы, хозяйственно-бытовые сточные воды, поверхностный сток с сельхозугодий при использовании аммонийных удобрений, а также сточные воды предприятий пищевой, коксохимической, лесохимической и химической промышленности [2]. В стоках промышленных предприятий содержится до 1 мг/дм^3 аммония, в бытовых стоках – 2–7 мг/дм^3. Содержание ионов аммония в исследуемых водоёмах варьировало в интервале от 0 до 3мкг/дм^3 в пересчете на азот в соответствии с СанПиН 4630-88 это уровень низкого загрязнения.

Нитриты являются неустойчивыми компонентами природных вод, поэтому при благоприятных для их окисления условиях, характерных для поверхностных вод, они встречаются в незначительных количествах (сотые и даже тысячные доли миллиграмма в литре). Присутствие в незагрязненных поверхностных водах нитритных ионов связано главным образом с процессами минерализации органических веществ и нитрификации. Концентрация нитритов [2].

Как видно из табл. 1, концентрация нитритных ионов в прудах варьировала от 0,50 до 7,25 мг/дм^3, увеличение концентрации нитратных ионов наблюдается в период массового отмирания фитопланктона, также может поступать с промышленными и бытовыми сточными водами, особенно со стоками после биологической очистки воды, учитывая, что нормой, установленной в соответствии с СанПиН 4630-88 [5], является показатель, не превышающий 45,0 мг/дм^3, то все исследуемые пруды не превышают среднего количества нитрат-ионов.

Хлориды и сульфаты присутствуют практически во всех поверхностных водах и являются одними из важнейших анионов. Главным источником хлоридов в поверхностных водах являются процессы химического выветривания и растворения хлорсодержащих минералов, в основном *галита* [6,7]. В больших количествах хлориды и сульфаты содержатся в шахтных водах, промышленных стоках, коммунально-бытовых и сельскохозяйственных водах. В речных водах и водах пресных озер содержание хлоридов колеблется от долей миллиграмма до десятков, сотен, а иногда и тысяч миллиграммов на литр. Концентрация хлоридов в поверхностных водах подвержена заметным сезонным колебаниям, коррелирующим с изменением общей минерализации воды. Возрастающее значение приобретают промышленные и хозяйственно-бытовые сточные воды [6,7].

Как видно из табл. 1, максимальную концентрацию хлоридов отмечали в пруду № 3 (258,3 мг/дм^3), тогда как в пруду №1 концентрация ионов хлора была в 5 раз меньше (55,0 мг/дм^3). По количеству сульфатов максимальную концентрацию отмечали в пруду № 4 (1 449,4 мг/дм^3), тогда как в пруду № 1 концентрация сульфатов была в 7 раз меньше (288,0 мг/дм^3). Таким образом, по количеству солей воду можно отнести к сульфатной (горько-соленой) с минерализацией >1 ‰.

Измерение сероводорода (H_2S) проводили с помощью фотоколориметра КФК2. В водоемах H_2S может быть образован за счет деятельности десульфирующих бактерий (главным образом *Desulfovibrio*). Нормой, установленной в соответствии с СанПиН 4630-88 [4], является отсутствие сероводорода, однако его превышение отмечается во всех исследуемых прудах, что может привести к замору и массовой гибели гидробионтов.

Сухой остаток измеряли методом выпаривания, в исследуемых пробах наивысший показатель количества сухого остатка наблюдался в исследуемом водоеме

№ 3 – 7 320 мг/дм^3, самый низкий показатель был в пруду № 4 – 2 375 мг/дм^3. Учитывая, что нормой, установленной в соответствии с СанПиН 4630-88 [5], является показатель не превышающий 1 000 мг/дм^3, то превышение количества сухого остатка наблюдалось во всех прудах.

Химическое потребление кислорода (ХПК или перманганатная окисляймость) – это условная величина, характеризующая загрязнения воды различными легкоокисляющими веществами, главным образом органического происхождения. В исследуемых прудах ХПК варьирует от 16,48 мгO_2/ дм^3 до 20,16 мг O_2/дм^3. Максимальная окисляемость отмечена в пруду № 2 (20,16 мг O_2/дм^3), а минимальную в пруду № 4 (16,48 мг O_2/дм^3).

Биохимическое потреблемение кислорода (БПК$_5$) отражает содержание в воде биохимически нестойких органических веществ, которые быстро окисляются. В воде исследованных прудов биохимическое потребление кислорода колебалось от 2,5 до 3,5 мг O_2/дм^3 (табл. 1).

Известно [2], что если уровень БПК$_5$ выше, чем перманганатная окисляемость воды, то это свидетельствует о значительном уровне загрязнения воды органическими веществами, поступление которых идет за счет стоков промышленных предприятий, сельского хозяйства и стоков комунально-бытовых вод. По результатам исследований (табл.1) БПК$_5$ во всех прудах ниже, чем перманганатная окисляемость, что свидетельствует об отсутствии значительно уровня загрязнения.

Железо в природной воде находиться в виде ионов двух- и трехвалентного железа, коллоидов, комплексных соединений и тонкодисперсной взвеси [5, 6]. В исследуемых прудах железо встречается в виде II и III валентного, в количестве от 0,16 до 0,38 мг/дм^3, в соответствии с СанПиН 4630-88 [5] количество железа для бытовых нужд не должно превышать 10 мг/дм^3. Наличие в воде железа может приводить к развитию железистых бактерий, использующих в процессе своей жизнедеятельности энергию, выделяемую при окислении закисных соединений в окисленные.

Подсчет численности водорослей фитопланктона проводили методом микроскопирования с помощью счетной камеры Горяева [6, 7]. В пробах воды наибольшее количество фитопланктона наблюдалось в исследуемом пруду № 2 – 167 тыс. кл /дм^3, самый низкий показатель отмечен в пруду № 4 – 53 тыс. кл/дм^3.

Вычисление биомассы фитопланктона производили методом суммирования биомасс отдельных популяций [6–8]. В исследуемых пробах максимальный показатель биомассы фитопланктона наблюдался в водоеме № 2 – 51,9 мг/дм^3, минимальный показатель определен в пруду № 9 – 16,6 мг/дм^3. Полученные данные о численности и биомассе фитопланктона свидетельствуют о летней стагнации водоема и «цветению» в исследуемых прудах.

Вывод. Таким образом, вода в исследуемых прудах пресная сульфатно-хлоридная олигоголинная с минерализацией >1 ‰, отличается средним уровнем прозрачности с высоким содержанием растворенного кислорода и биохимического потребления кислорода коррелирующая с перманганатной окисляемостью, со средними концентрациями форм азота. По классификации поверхностных вод суши (Комплексная экологическая классификация качества поверхностных вод суши по О.П. Оксиюк и В.Н. Жукинскому) воды исследованных прудов относится к 4 классу разряда 4а или 4б от умеренно до сильно загрязненной.

Работа реализована в рамках инициативной и госбюджетной тем "Функциональная ботаника: экологический мониторинг, ресурсные технологии, фитодизайн" № 0117D000192 и "Диагностика природных и трансформированных

экотопов по состоянию фитокомпонентов" № 0118D000017, выполняющихся в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гидрохимические показатели состояния окружающей среды: справочные материалы / под ред. Т.В. Гусевой. – М.: ФОРУМ : ИНФРА-М, 2007. – 192 с.
2. Константинов А.С. Общая гидробиология / А.С. Константинов – М.: Высш. шк., 1972. – 490 с.
3. Государственный комитет водного и рыбного хозяйства Донецкой Народной Республики. [Электронный ресурс]. URL : https://gkvrh.ugletele.com
4. Фомин Г. С. Вода. Контроль химической, бактериальной и радиационной безопасности по международным стандартам : энциклопедический справочник / Г. С. Фомин. – М. : Протектор, 2000. – 838 с..
5. Санитарные правила и нормы охраны поверхностных вод от загрязнения : СанПиН 4630-88 от 04.
6. Справочник по свойствам, методам анализа и очистке воды: В 2 ч. / Л.А. Кульский, И.Т. Гороновский, А.М. Конаговский и др. – К.: Наукова думка, 1980. – Ч. 1. – 680 с.
7. Справочник по свойствам, методам анализа и очистке воды: В 2 ч. / Л.А. Кульский, И.Т. Горновский, А.М. Кочановский, М.А. Шевченко / Под ред. И.Т. Гороновского. – К.: Наук.думка, 1980. − Ч. 2. – 1206 с.
8. Мирненко Э. И. Особенности «цветения» водоемов в городе Донецке. – Saarbrucken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 93 с.

Поступила в редакцию 06.05.2019 г.

ECOLOGICAL AND HYDROCHEMICAL FEATURES OF PHYTOPLANKTON FORMATION IN STAROBESHEVSKY DISTRICT

E.I. Mirnenko

The paper presents data on the main hydrochemical parameters of 4 reservoirs of the Starobeshevsky district. The characteristic of the water class is given according to the complex classification of surface water quality.

Keywords: hydrochemical indicators, phytoplankton, Donbass, Starobeshevsky district.

Мирненко Эдуард Игоревич
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), старший преподаватель.
E-mail: eduard_mirnenko@mail.ru

Mirnenko Eduard
Donetsk National University, Donetsk, Senior Lecturer

УДК 574 : 58.632 : 581 : 502 (477)

ИНВЕНТАРИЗАЦИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ДОНБАССА ПО ФИТОИНДИКАЦИОННЫМ КРИТЕРИЯМ

© 2019. ***А.И. Сафонов***

Представлены результаты фитоиндикационных работ в зонах непосредственного воздействия предприятий-загрязнителей. Составлены списки видов и их признаков строения, имеющие значение для проведения экологического мониторинга в регионе и экологической экспертизы в системе диагностики степени трансформации экотопов Донбасса.

Ключевые слова: фитоиндикация, Донбасс, экологический мониторинг, экспертиза промышленных объектов.

Введение. В регионах с развитой промышленной инфраструктурой, добычей полезных ископаемых, металлургической, химической, коксохимической отраслями неизбежен процесс трансформации и загрязнения природных сред [1]. Проведение своевременной диагностики состояния экотопов – первоочередная задача ученых-экологов для принятия своевременных решений о возможной коррекции антропогенно воздействия [2]. В Донецком экономическом районе ботанико-экологические исследования посвящены методам фитоиндикации и мониторинга: при спорово-пыльцевом обследовании [3], анализе сороно-рудеральной фракции флоры региона [4], определении стратегий выживания фтоиндикаторов [5], анализе их эмбриональных структур [6–7]. Региональные исследования сформированы в рамках тематических направлений функциональной ботаники [8], экспертизы промышленных предприятий [9], фитоквантификации [10], экологического мониторинга [11] на основании сводного чек-листа [12]. Такой широкий спектр методических подходов и способов использования растений позволяет реализовывать полномасштабные и достоверные проекты экспертных наблюдений в зонах экологического дисбаланса [13].

Цель работы – представить результаты инвентаризационных экспертных работ на промышленных объектах Донбасса по фитоиндикационным критериям.

Материал и методика исследования. Методы квантификации и проведения экологической экспертизы в Донбассе описаны в [3, 6, 9–10]. Использованы сводные критерии и данные аналитических конструкций чек-листа города Донецка [12].

В базовой экспериментальной части представлены сведения о состоянии экотопов на промышленных предприятиях (в зоне их непосредственного влияния) в 2017 и 2018 годах: 1) Донецкий металлургический завод, 2) Енакиевский металлургический завод, 3) Макеевский металлургический комбинат, 4) Енакиевский коксохимзавод, 5) Макеевский коксохимзавод, 6) Ясиновский коксохимзавод, 7) Харцызский трубный завод, 8) Зуевская ТЭС, 9) Старобешевская ТЭС, 10) концерн Стирол. Такой формат скрининга не предусматривает сбор материала в контрольных (относительно малонарушенных) местах произрастания растений-индикаторов, поскольку критерии их пластичности уже регионально установлены по экологическим шкалам, индексам, аддитивно стандартизированы при флуктуации системы экологического баланса [9, 11, 12]. Экспериментальная часть работы реализована в лабораториях кафедры ботаники и экологии Донецкого национального университета.

Анализ результатов. Проведенная эколого-ботаническая экспертиза [9] позволила зафиксировать разницу в 10-летней динамике показателей фитоиндикационной значимости состояния экотопов по используемым растениям-индикаторам в зонах воздействия промышленных предприятий. Эти же объекты промышленной собственности проанализированы и при проведении инвентаризации последних лет, чтобы сформировать общий список фитоиндикационно значимых критериев. Такой список необходим для составления классификационной рабочей схемы проводимых экспериментов и может быть полезен для экстраполирования методики на другие объекты в изучаемой климатической зоне, поскольку в фитоиндикационном мониторинге очень важно иметь региональные значения и диапазоны варьирования признаков, экологических шкал и функциональных параметров. Наибольшими показателями (в определенном целевом списке предприятий-загрязнителей экологического напряжения) характеризуются все анализируемые в этом блоке наблюдений металлургические и коксохимические заводы Донбасса (предоставлены в первой половине перечня объектов); существенно ухудшилась ситуация в зоне воздействия Старобешевской ТЭС (что отражается для экотопа значений № 9); по используемым критериям функционально более благоприятной экологическая ситуация определена в радиусах влияния Харцызского трубного завода и Ясиновского коксохимзавода. Таблица 1 содержит сводные значения индексированных показателей по фитоиндикации в промышленных экотопах за 2017 год, поскольку часть данных 2018 года по нескольким критериям (морфотипическая разнокачественность общего габитуса *Cichorium intybus* L. – *MDGCi* (1-10), габитуса *Reseda lutea* L. – *MDGRl* – (1-10), габитуса *Berteroa incana* (L.) DC. – *MDGBi* – (1-7), индекс трихоморазнообразия *Echium vulgare* L. – *ITREv* (1-10); индекс аномальности анастомозной сетки *Cichorium intybus* L. – *AANCi* (1-10), частота встречаемости (ч. в.) пыльцевых зерен *Cichorium intybus* L. с атипичным строением лакун – *KPCi* (1-10); степень дефектности пыльцевых зерен *Cichorium intybus* L. при окрашивании метиленовым синим – *SDPmsCi* (1-10), частота встречаемости деформированного или несформированного зародыша *Cichorium intybus* L. – *KDNECi* – (1-10), проявление тератологической схизокотилии *Cichorium intybus* L. – *TrShCi* (1-10), индекс матрикальной гетерокарпии в узком понимании *Cichorium intybus* L. и *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip. – *GCCi* и *GCTi* (1-10) опубликована ранее [9].

В представленной серии экспериментов содержатся результаты уже на 15 критериев больше (табл. 1) по списочному составу и предусмотрен подсчет общего суммарного эффекта по каждому объекту (промышленной площадке – учетной пробной площадке), что не было сделано ранее в таком расчетном интервале времени. Общая тенденция высоких значений для объектов более токсичной деятельности сохранилась для всех без исключения 25 критериев из чек-листа фитоиндикаторов, используемых в Донбассе. Этот факт важен для возможного альтернативного использования значимых индексов в ситуации при элиминации на конкретной территории какого-либо из критериев (по объективным причинам ввиду его отсутствия в этом вегетационном сезоне) списочного состава.

Все экспериментальные пробные площадки соответствуют либо высокому, либо недопустимому уровню трансформации условий произоастания видов-индикаторов, что указывает на высокие концентрации загрязняющих токсических элементов в природных средах. По данным табл. 1 также установлено, что разные индикаторные виды по одноименным критериям соответствуют интервалу значимости между собой, то есть тоже могут рассматриваться как взаимодополняющие при общей оценке среды.

Таблица 1

Значения индексированных показателей фитоиндикаторов в промышленных экотопах Донбасса по критериям мониторингологической значимости системы инвентаризации, 2017 год

№	Критерий *	Пробные площадки									
		1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
1	*MDGCi*	9	9	10	9	9	7	5	4	8	4
2	*MDGTm*	5	3	4	4	4	5	4	5	7	3
3	*MDGTi*	10	10	10	9	8	6	6	5	9	5
4	*MDGTv*	5	6	6	5	4	3	3	3	6	3
5	*MDGRl*	10	10	10	9	8	6	5	7	10	5
6	*MDGEv*	4	4	4	4	4	3	2	3	4	2
7	*GABi*	10	8	10	8	8	5	5	6	8	3
8	*GACi*	5	5	4	5	5	4	5	5	5	2
9	*GAPm*	9	8	7	7	7	5	4	7	8	4
10	*GATi*	9	10	7	6	8	5	5	6	8	5
11	*ITRCi*	9	9	8	10	8	5	3	4	7	3
12	*ITREv*	10	8	8	6	9	4	5	7	8	4
13	*AANCi*	9	8	10	10	6	3	3	3	8	2
14	*AANPm*	7	10	8	10	8	5	4	2	7	3
15	*ITSCi*	7	9	7	7	6	3	3	2	10	6
16	*ITSEv*	8	9	8	8	5	3	4	4	7	7
17	*IAStaCi*	7	7	6	7	7	5	3	7	7	4
18	*KPCi*	7	9	8	8	5	2	5	6	8	5
19	*SDPmsCi*	7	8	8	7	5	2	8	6	10	7
20	*SDPmsTi*	9	8	8	8	9	5	4	2	8	5
21	*KDNECi*	7	9	8	10	8	4	4	6	7	7
22	*TrSCi*	9	8	10	6	8	3	5	2	8	5
23	*TrShCi*	9	8	6	7	8	5	3	7	9	3
24	*MGCCi*	9	9	6	6	7	3	4	5	9	7
25	*MGCTv*	9	8	8	10	7	4	5	6	8	4
Всего		**199**	**200**	**189**	**186**	**171**	**105**	**107**	**120**	**194**	**108**

* Перечень индексированных показателей: морфотипическая разнокачественность общего габитуса *Cichorium intybus* L. – *MDGCi;* морфотипическая разнокачественность общего габитуса *Tragopogon major* Jacq. – *MDGTm;* морфотипическая разнокачественность общего габитуса *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip. – *MDGTi;* морфотипическая разнокачественность общего габитуса *Tanacetum vulgare* L. – *MDGTv*; разнокачественность общего габитуса *Reseda lutea* L. – *MDGRl;* морфотипическая разнокачественность общего габитуса *Echium vulgare* L. – *MDGEv;* коэффициент генеративной активности *Berteroa incana* (L.) DC. – *GABi;* коэффициент генеративной активности *Cichorium intybus* L. – *GACi;* коэффициент генеративной активности *Plantago major* L. – *GAPm;* коэффициент генеративной активности *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip.– *GATi;* индекс трихоморазнообразия (типификация трихом) *Cichorium intybus* L. – *ITRCi;* индекс трихоморазнообразия *Echium vulgare* L. – *ITREv;* индекс аномальности анастомозной сетки *Cichorium intybus* L. – *AANCi;* индекс аномальности анастомозной сетки *Plantago major* L. – *AANPm;* Индекс общей специализации трихом (нитчатого, ретортоообразного типа и сферической формы) *Cichorium intybus* L. – *ITSCi;* индекс общей специализации трихом (нитчатого, ретортоообразного типа и сферической формы) *Echium vulgare* L. – *ITSEv;* индекс атипичного строения устьичного аппарата *Cichorium intybus* L. – *IAStaCi;* частота встречаемости (ч. в.) пыльцевых зерен *Cichorium intybus* L. с атипичным строением лакун – *KPCi;* степень дефектности пыльцевых зерен *Cichorium intybus* L. при окрашивании метиленовым синим – *SDPmsCi;* степень дефектности пыльцевых зерен *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip. при окрашивании метиленовым синим – *SDPmsTi;* ч. в. деформированного или несформированного зародыша *Cichorium intybus* L. – *KDNECi;* проявление тератологической синкотилии *Cichorium intybus* L. – *TrSCi;* проявление тератологической схизокотилии *Cichorium intybus* L. – *TrShCi;* индекс матрикальной гетерокарпии в широком понимании *Cichorium intybus* L.– *MGCCi*; индекс матрикальной гетерокарпии в широком понимании *Tanacetum vulgare* L. – *MGCTv.*

В результате проведенного фитоиндикационного скрининга установлено, что по степени увеличения техногенной нагрузки на среду промышленные предприятия формируют следующий ранжированный перечень: Ясиновский коксохимзавод, Харцызский трубный завод, концерн Стирол, Зуевская ТЭС, Макеевский коксохимзавод, Енакиевский коксохимзавод, Макеевский металлургический комбинат, Старобешевская ТЭС, Донецкий металлургический завод, Енакиевский металлургический завод.

Для промышленных объектов составлены списки зарегистрированных видов высших растений, имеющих индикаторное значение, что важно для организации локального экологического мониторинга в каждой конкретной точке при сопряженных экологических параметрах. В списки включены виды (помимо уже указанных в табл. 1), значения которых важны для расчета общего показателя техногенной нагрузки на среду.

Учетная площадка Донецкого металлургического завода содержит: *Achillea collina* J. Becker ex Rchb., *Achillea nobilis* L., *Agrostis stolonifera* L., *Amaranthus albus* L., *Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Atriplex micrantha* C.A. Mey., Atriplex patens (Litv.) Iljin, *Barbula unguiculata* Hedw., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al., *Bryum argenteum* Hedw., *Bryum caespiticium* Hedw., *Bryum capillare* Hedw., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Chelidonium majus* L., *Cichorium intybus* L., *Cirsium arvense* (L.) Scop., *Cynoglossum officinale* L., *Dicranum polysetum* Sw., *Ditrichum pussilum* (Hedw.) Hampe (*D. tortile* (Schrad.) Brockm., *Euphorbia seguieriana* Neck., *Oberna behen* (L.) Ikonn., *Plantago lanceolata* L., *Plantago major* L., *Polygonum aviculare* L., *Reseda lutea* L., *Rumex crispus* L., *Salsola australis* R. Br., *Senecio vulgaris* L., *Sonchus arvensis* L., *Stenactis annua* Nees, *Tragopogon major* Jacq., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip., *Xanthium albinum* (Widd.) H. Scholz.

Список видов-индикаторов на территории Енакиевского металлургического завода: *Achillea collina* J. Becker ex Rchb., *Agrostis stolonifera* L., *Amaranthus albus* L., *Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Barbula unguiculata* Hedw., *Bromopsis inermis* (Leyss.) Holub, *Bryum argenteum* Hedw., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al., *Bryum caespiticium* Hedw., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Cirsium arvense* (L.) Scop., *Convolvulus arvensis* L., *Cynoglossum officinale* L., *Fallopia convolvulus* (L.) A. Löve, *Galium mollugo* L., *Gnaphalium uliginosum* L., *Kochia laniflora* (S. G. Gmel.) Borb., *Melilotus albus* Medik., *Melilotus officinalis* (L.) Pall., *Niphotrichum canescens* (Hedw.) Bednarek-Ochyra & Ochyra, *Orthotrichum pallens* Bruch ex Brid., *Papaver rhoeas* L., *Persicaria maculata* (Rafin.) A. & D. Löve, *Plantago lanceolata* L., *Plantago major* L., *Polygonum aviculare* L., *Polygonum* patulum M. Bieb., *Reseda lutea* L., *Rumex crispus* L., *Senecio vulgaris* L., *Sinapis arvensis* L., *Sisymbrium polymorphum* (Murray) Roth, *Sonchus arvensis* L., *Stenactis annua* Nees, *Swida alba* Opiz, *Tragopogon major* Jacq., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip

Макеевский металлургический комбинат в зоне влияния формирует условия произрастания следующих видов-индикаторов: *Amaranthus retroflexus* L., *Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Arrhenaterum elatius* (L.) J. et C. Presl., *Artemisia vulgaris* L., *Atriplex patula* L., *Barbula unguiculata* Hedw., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al., *Bryum argenteum* Hedw., *Bryum caespiticium* Hedw., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Chenopodium album* L., *Convolvulus arvensis* L., *Cynoglossum officinale* L., *Diplotaxis muralis* (L.) DC., *Diplotaxis tenuifolia* (L.) DC., *Erucastrum armoracioides* (Czern. ex Turcz.), *Euphorbia seguieriana* Neck., *Galium mollugo* L., *Grindelia squarrosa* (Purch) Dunal, *Melilotus officinalis* (L.) Pall., *Orthotrichum pallens* Bruch ex Brid.

(*O. paradoxum* Gronvall), *Persicaria maculata* (Rafin.) A. & D. Löve, *Platygyrium repens* (Brid.) Schimp., *Pleurozium schreberi* (Willd. ex Brid.) Mitt, *Polygonum aviculare* L., *Reseda lutea* L., *Rumex crispus* L., *Salsola australis* R. Br., *Senecio vulgaris* L., *Sinapis arvensis* L., *Sisymbrium polymorphum* (Murray) Roth, *Sonchus arvensis* L., *Stenactis annua* Nees, *Xanthium albinum* (Widd.) H. Scholz.

На учетной площадке Енакиевского коксохимзавода встречаются: *Achillea collina* J. Becker ex Rchb., *Agrostis stolonifera* L., *Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Anthoxanthum odoratum* L., *Arrhenaterum elatius* (L.) J. et C. Presl., *Atriplex hortensis* L., *Barbula unguiculata* Hedw., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al., *Bryum argenteum* Hedw., *Bryum caespiticium* Hedw., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Cynoglossum officinale* L., *Elytrigia repens* (L.) Nevski, *Gnaphalium uliginosum* L., *Kochia laniflora* (S. G. Gmel.) Borb., *Melilotus albus* Medik., *Melilotus officinalis* (L.) Pall., *Niphotrichum canescens* (Hedw.) Bednarek-Ochyra & Ochyra *Leptodictium riparium* (Hedw.) Warnst. (*Amblystegium riparium* (Hedw.) Schimp.), *Orthotrichum pallens* Bruch ex Brid., *Otites media* (Litv.) Klokov, *Papaver rhoeas* L., *Polygonum patulum* M. Bieb., *Sinapis arvensis* L.*Thlaspi arvense* L., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip.

Учетная площадка Макеевского коксохимзавода содержит: *Achillea collina* J. Becker ex Rchb., *Agrostis stolonifera* L., *Amaranthus albus* L., *Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Ambrosia artemisiifolia* L., *Artemisia absinthium* L., *Artemisia vulgaris* L., *Barbula unguiculata* Hedw., *Berteroa incana* (L.) DC., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al., *Bromopsis inermis* (Leyss.) Holub, *Bryum argenteum* Hedw., *Bryum caespiticium* Hedw., *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medik., *Centaurea diffusa* Lam., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Cirsium arvense* (L.) Scop., *Chelidonium majus* L., *Dactylis glomerata* L., *Daucus carota* L., *Deschampsia caespitosa* (L.) Beauv., *Digitaria sanguinalis* (L.) Scop., *Diplotaxis tenuifolia* (L.) DC., *Diplotaxis muralis* (L.) DC., *Echium vulgare* L., *Galinsoga parviflora* Cav., *Grindelia squarrosa* (Purch) Dunal,, *Hyoscyamus niger* L., *Kochia laniflora* (S. G. Gmel.) Borb., *Lactuca tatarica* (L.) C. A. Mey., *Orthotrichum pallens* Bruch ex Brid. (*O. paradoxum* Gronvall), *Plantago lanceolata* L., *Plantago major* L., *Platygyrium repens* (Brid.) Schimp., *Pleurozium schreberi* (Willd. ex Brid.) Mitt, *Polygonum aviculare* L., *Reseda lutea* L., *Rumex crispus* L., *Senecio vulgaris* L., *Thlaspi arvense* L., *Tragopogon major* Jacq., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip

На учетной площадке Ясиновского коксохимзавода встречаются: *Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Barbula unguiculata* Hedw., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al., *Brassica campestris* L., *Bryum argenteum* Hedw., *Bryum caespiticium* Hedw., *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medik., *Centaurea diffusa* Lam., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Chelidonium majus* L., *Coniza canadensis* (L.) Crong, *Cyclachaena xanthiifolia* (Nutt.) Fresen., *Cynoglossum officinale* L., *Daucus carota* L., *Digitalis purpurea* L., *Eupatorium cannabinum* L., *Euphorbia seguieriana* Neck., *Galinsoga parviflora* Cav., *Galium mollugo* L., *Gnaphalium uliginosum* L., *Lactuca tatarica* (L.) C. A. Mey., *Melilotus albus* Medik., *Melilotus officinalis* (L.) Pall., *Hyoscyamus niger* L., *Nyholmiella obtusifolia* (Brid.) Holmen & Warncke), *Oberna behen* (L.) Ikonn., *Orthotrichum obtusifolium* Brid. (*Stroemia obtusifolia* (Brid.) J. Hag., *Plantago lanceolata* L., *Plantago major* L., *Polygonum aviculare* L., *Tortula mucronifolia* Schwaegr. (*Syntrichia mucronifolia* (Schwägr.) Brid.), *Salsola australis* R. Br., *Sonchus arvensis* L., *Stenactis annua* Nees, *Syntrichia ruralis* (Hedw.) F. Weber & Mohr (*Tortula ruralis* (Hedw.) P. Gaerth., B. Mey. & Schreb)., *Swida alba* Opiz, *Thlaspi arvense* L., *Xanthium albinum* (Widd.) H. Scholz.

Харцызский трубный завод как пробная площадка для фитомониторинга содержит следующие виды высших растений: *Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Atriplex micrantha* C.A. Mey., *Barbula unguiculata* Hedw., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al., *Bryum argenteum* Hedw., *Bryum caespiticium* Hedw., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Digitalis purpurea* L., *Digitaria sanguinalis* (L.) Scop., *Diplotaxis muralis* (L.) DC., *Ditrichum pussilum* (Hedw.) Hampe (*D. tortile* (Schrad.) Brockm., *Galinsoga parviflora* Cav., *Gnaphalium uliginosum* L., *Grindelia squarrosa* (Purch) Dunal, *Hymenostomum microstomum* (Hedw.) R. Br. ex Nees & Hornsch.), *Hyoscyamus niger* L., *Lactuca tatarica* (L.) C. A. Mey., *Melilotus albus* Medik., *Melilotus officinalis* (L.) Pall., *Otites media* (Litv.) Klokov, *Plantago lanceolata* L., *Plantago major* L., *Polygonum aviculare* L., *Polygonum patulum* M. Bieb., *Reseda lutea* L., *Rumex crispus* L., *Senecio vulgaris* L., *Sinapis arvensis* L.,*Sonchus arvensis* L., *Stenactis annua* Nees, *Tragopogon major* Jacq., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip., *Weissia brachycarpa* (Nees & Hornsch.) Jur (*W. microstoma* (Hedw.) C. Mull.

Учетная площадка Зуевской ТЭС содержит виды растений-индикаторов: *Achillea collina* J. Becker ex Rchb*., Agrostis stolonifera* L., *Amaranthus albus* L., *Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Ambrosia artemisiifolia* L., *Artemisia absinthium* L., *Artemisia vulgaris* L., *Atriplex hortensis* L., *Barbula unguiculata* Hedw., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al., *Bryum argenteum* Hedw., *Bryum caespiticium* Hedw., *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medik., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Cirsium arvense* (L.) Scop., *Daucus carota* L., *Deschampsia caespitosa* (L.) Beauv., *Dicranum polysetum* Sw., *Didymodon rigidulus* Hedw. (*Barbula rigidula* (Hedw.) Milde, *D. mamillosus* (Crundw.) M.O. Hill), *Digitaria sanguinalis* (L.) Scop., *Fallopia convolvulus* (L.) A. Löve, *Grindelia squarrosa* (Purch) Dunal, *Hymenostomum microstomum* (Hedw.) R. Br. ex Nees & Hornsch.), *Nyholmiella obtusifolia* (Brid.) Holmen & Warncke), *Oberna behen* (L.) Ikonn., *Orthotrichum obtusifolium* Brid. (*Stroemia obtusifolia* (Brid.) J. Hag., *Plantago lanceolata* L., *Plantago major* L., *Pleuridium acuminatum* Lindb., *Salsola australis* R. Br., *Senecio vulgaris* L., *Sisymbrium polymorphum* (Murray) Roth, *Sonchus arvensis* L., *Stenactis annua* Nees, *Tragopogon major* Jacq., *Weissia brachycarpa* (Nees & Hornsch.) Jur (*W. microstoma* (Hedw.) C. Mull., *Xanthium albinum* (Widd.) H. Scholz.

На учетной площадке Старобешевской ТЭС произрастают: *Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Ambrosia artemisiifolia* L., *Agrostis stolonifera* L., *Arrhenaterum elatius* (L.) J. et C. Presl., *Artemisia absinthium* L., *Artemisia vulgaris* L., *Barbula unguiculata* Hedw., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al., *Bryum argenteum* Hedw., *Bryum torquescens* Bruch & Schimp. (*B. capilare* subsp*. icodense* (H. Winter) Podp., *B. capillare* subsp. *torquescens* (Bruch & Schimp.) Kindb., *B. capillare* var. *torquescens* (Bruch & Schimp.) Husn., *B. icodense* H. Winter, *B. obconicum* auct. non Hornsch. ex Bruch & Schimp., *Bryum caespiticium* Hedw., *Calamagrostis epigeios* (L.) Roth, *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medik., *Centaurea diffusa* Lam., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Daucus carota* L., *Deschampsia caespitosa* (L.) Beauv., *Dicranum polysetum* Sw., *Diplotaxis tenuifolia* (L.) DC., *Diplotaxis muralis* (L.) DC., *Galium mollugo* L., *Melilotus officinalis* (L.) Pall., *Phascum cuspidatum* Hedw. (*Phascum acaulon* Lindb., *P. cuspidatum* var. *curvisetum* (Dicks.) Nees & Hornsch., *P. cuspidatum* var. *mitraeforme* Limpr., *Plantago lanceolata* L., *Plantago major* L., *Pleuridium acuminatum* Lindb., *Polygonum aviculare* L., *Rosulabryum torquescens* (Bruch & Schimp.), *Senecio vulgaris* L., *Sonchus arvensis* L.*Stenactis annua* Nees, *Swida alba* Opiz, *Tortula acaulon* (With.) R. H. Zander, *T. atherodes* var *cueviseta* (Dicks.) R. H. Zander), *Xanthium albinum* (Widd.) H. Scholz.

Концерн Стирол как пробная площадка для фитомониторинга содержит виды высших растений: *Achillea collina* J. Becker ex Rchb., *Agrostis stolonifera* L., *Amaranthus albus* L.,*Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Amblystegium subtile* (Hedw.) Schimp. (*Platydictiasubtilis* (Hedw.) H. A. Crum, *Amblystegiella subtilis* (Hedw.) Loeske), *Ambrosia artemisiifolia* L., *Artemisia absinthium* L., *Artemisia vulgaris* L., *Barbula unguiculata* Hedw., *Berteroa incana* (L.) DC., *Brachythecium albicans* (Hedw.) Bruch et al., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al., *Brachythecium salebrosum* (F. Weber & D. Mohr) Bruch et al. (var. *capillaceum* (F. Weber & D. Mohr) Lorentz; ssp. *rotaeanum* (De Not.) J. J. Amann), *Bromopsis inermis* (Leyss.) Holub, *Bromus arvensis* L., *Bryum argenteum* Hedw., *Bryum caespiticium* Hedw., *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medik., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Niphotrichum canescens* (Hedw.) Bednarek-Ochyra & Ochyra (*Racomitrium canescens* (Hedw.) Brid.)., *Diplotaxis muralis* (L.) DC., *Echium vulgare* L., *Galinsoga parviflora* Cav., *Grindelia squarrosa* (Purch) Dunal, *Hyoscyamus niger* L., *Lactuca tatarica* (L.) C. A. Mey., *Melilotus albus* Medik., *Melilotus officinalis* (L.) Pall., *Plantago lanceolata* L., *Plantago major* L., *Platygyrium repens* (Brid.) Schimp., *Polygonum aviculare* L., *Rumex crispus* L., *Senecio vulgaris* L., *Serpoleskea subtilis* (Hedw.) Loeske, *Reseda lutea* L., *Sinapis arvensis* L., *Tragopogon major* Jacq.

Выводы.

1. Фитокомплексы промышленных зон и территорий предприятий-загрязнителей Донбасса формируются преимущественно спонтанно-стихийным способом, представляют собой открытые экспериментальные площадки для проведения адекватного фитоиндикационного эксперимента мониторингового назначения. Инвентаризационные работы в таком целевом направлении представляют собой перспективно значимые базы данных для дальнейшей оценки и проведения диагностических мероприятий экспертного характера.

2. По степени ипмакта на природные среды наибольшее значение оказывают предприятия металлургической и коксохимической промышленности. Для всех предприятий мониторингового эксперимента составлен ранжированный список по степени воздействия на растительные индикаторы.

3. Из зафиксированных видов высших растений особую группу занимают мохообразные, чья роль в экологическом мониторинге и фитоиндикационное значение требуют дальнейшего детального рассмотрения. Выделены виды для пассивного мониторинга: *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid, *Bryum argenteum* Hedw., *Bryum caespiticium* Hedw., *Amblystegium serpens* (Hedw.) Schimp., *Brachythecium campestre* (Müll. Hal.) Bruch et al. и *Barbula unguiculata* Hedw.

Работа реализована в рамках инициативной и госбюджетной тем "Функциональная ботаника: экологический мониторинг, ресурсные технологии, фитодизайн" № 0117D000192 и "Диагностика природных и трансформированных экотопов по состоянию фитокомпонентов" № 0118D000017, выполняющихся в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khondhodjaeva N.B. Bioindication and its importance in the conducting of ecological monitoring / N.B. Khondhodjaeva, K.B. Ismillaeva, N.T. Ruzimbayeva // European Science. – 2018. – № 4 (36). – P. 68-70.
2. Ибрагимова Э.Э. Мониторинг состояния окружающей среды методами фитоиндикации техногенного химического загрязнения / Э.Э. Ибрагимова // Человек – Природа – Общество: Теория и практика безопасности жизнедеятельности, экологии и валеологии. – 2018. – № 4 (11). – С. 57-61.
3. Сафонов А.И. Спорово-пыльцевой метод в Донбассе на основе научных рекомендаций ученых России / А.И. Сафонов, Н.С. Мирненко // Донецкие чтения 2017: Русский мир как цивилизационная

основа научно-образовательного и культурного развития Донбасса: Матер. Междунар. научн. конф. студентов и молодых ученых (Донецк, 17-20 октября 2017 г.). – Том 2: Химико-биологические науки. – С. 97-99.
4. Сафонов А.И. Сорно-рудеральная фракция урбанофлоры Донецкой агломерации как показатель трансформации локальных экосистем / А.И. Сафонов // Трансформация экосистем под воздействием природных и антропогенных факторов: Матер. Междунар. научн. конф. (Киров, 16-18 апреля 2019 г.). – Киров: ВятГУ, 2019. – С. 13-16.
5. Сафонов А.И. Стратегическая потенциализация фитоиндикаторов техногенных загрязнений / А.И. Сафонов // Аграрная Россия. – 2009. – № 51. – С. 58-59.
6. Сафонов А.И. Структурная разнокачественность эмбриональных структур фитоиндикаторов в Донбассе / А.И. Сафонов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2016. – № 3-4. – С. 23-29.
7. Сафонов А.И. Фитоэмбриональный скрининг в экологическом мониторинге Донбасса / А.И. Сафонов // Зеленый журнал – бюллетень ботанического сада Тверского государственного университета. – 2017. – Вып. 3. – С. 6-14.
8. Сафонов А.И. Функциональная ботаника в Донбассе: экологический мониторинг, информационные ресурсные технологии, фитодизайн / А.И. Сафонов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2017. – № 1-2. – С. 8-14.
9. Сафонов А. И. Экспертиза промышленных предприятий Донбасса по состоянию фитокомпонентов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2019. – № 1-2. – С. 35-43.
10. Safonov A.I. Phyto-qualimetry of toxic pressure and the degree of ecotopes transformation in Donetsk region / A.I. Safonov // Problems of ecology and nature protection of technogenic region. – 2013. – N 1 (13). – P. 52-59.
11. Safonov A.I. Phytoindicational monitoring in Donetsk / A.I. Safonov // A science. Thought: Scientific journal. – 2016. – N 4. – P. 58-70.
12. Сафонов А. И. Чек-лист индикаторных признаков сорно-рудеральной фракции урбанофлоры г. Донецка (1998-2018 гг.) / А.И. Сафонов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2018. – № 3-4. – С. 67-72.
13. Душкова Д.О. Применение биоиндикационных методов при проведении мониторинговых исследований окружающей среды / Д.О. Душкова, А.Г. Горецкая, А.В. Евсеев // Проблемы региональной экологии. – 2017. – № 2. – С. 10-15.

Поступила в редакцию 06.05.2019 г.

INVENTORY OF INDUSTRIAL OBJECTS OF DONBASS USING PHYTOINDICATION CRITERIA

A.I. Safonov

The results of works on phytoindication in the areas of direct impact of polluting enterprises have been presented. Lists of species and their structural features relevant for environmental monitoring in the region and environmental impact assessment in the system for diagnosing the degree of transformation of ecotopes of Donbass have been compiled.

Keywords: phytoindication, Donbass, environmental monitoring, industrial facility expertise

Сафонов Андрей Иванович
кандидат биологических наук, доцент;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), заведующий кафедрой ботаники и экологии.
E -mail: andey_safonov@mail.ru

Safonov Andrey
Candidate of Biological Sciences, Docent;
Donetsk National University, Donetsk, Head of the Department of Botany and Ecology

УДК 577.0; 57.042; 57.033

ВЛИЯНИЕ СОЛЕЙ ТЯЖЕЛЫХ МЕТАЛЛОВ НА ФЛУОРЕСЦЕНЦИЮ КЛЕТОК *CHLORELLA SOROKINIANA* И *PLEUROCHLORIS MAGNA*

© 2019. *С.В. Чуфицкий, А.С. Ляшова*

Проведен ряд исследований по воздействию ионов Mn^{2+} и Pb^{2+} в диапазоне концентраций от 0,1 до 1,0 мг/л на флуоресценцию хлорофилла а культур зеленых микроводорослей *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna*. Получены и проанализированы кривые индукции флуоресценции исследуемых культур микроводорослей. Показано, что исследуемые концентрации Mn^{2+} оказывают либо стимулирующее действие, либо не оказывают значимого воздействия на флуоресценцию клеток, тогда как ионы Pb^{2+} вызывают снижение содержания хлорофилла в исследуемых пробах. а основании анализа кривых индукции флуоресценции выделен ряд тест-функций, отражающих негативное воздействие ионов Mn^{2+} и Pb^{2+} на клетки фитопланктона.

Ключевые слова: биотестирование, марганец, свинец, *Chlorella sorokiniana*, *Pleurochloris magna*, флуориметрия, фотосинтез.

Введение. Среди наиболее распространенных загрязнителей водных объектов выделяют отдельную группу поллютантов – тяжелые металлы [1–4], которые являются биологически активными микроэлементами [5]. Одной из приоритетных задач биомониторинга является организация контроля состояния природной среды, а также быстрая регистрация изменений, вызванных как естественными причинами, так и антропогенными факторами, что создает потребность в развитии информативных экспресс-методов, не требующих длительной пробоподготовки и сложных последующих измерений [6]. Для выполнения таких задач подходит метод флуориметрии [7–10], основывающийся на регистрации свечения фотосинтетических пигментов. Чувствительными к действию тяжелых металлов являются микроводоросли, способные к биосорбции и биоаккумуляции поллютантов [11–15], а также обладающие способностью к флуоресценции, что дает возможность использовать данные организмы в качестве биоиндикатора [16–18].

Целью исследования являлось изучение воздействия различных концентраций ионов Mn^{2+} и Pb^{2+} на фотосинтетический аппарат микроводорослей *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna* с помощью метода флуориметрии [7].

Материал и методы исследования. Проведение биомониторинга и состояния одноклеточных микроводорослей включало в себя решение нескольких задач.

1. Изучение воздействия различных концентраций ионов свинца (II) и марганца (II) на содержание хлорофилла в клетках микроводорослей.
2. Оценка состояния клеток микроводорослей *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna* при воздействии различных концентраций ионов свинца (II) и марганца (II) с помощью OJIP-теста.

Объектами исследования являлись культуры микроводорослей *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna.* Культуры выращивали на 50%-ой среде Тамия (Владимирова) [19]. Культивирование микроводорослей проводили при комнатной температуре. Колбы освещали светодиодными лампами полного спектра А60 фирмы «Uniel» в течение 12 часов в сутки, периодически перемешивая.

В качестве источников металлов использовали хлорид марганца в концентрациях от 0,1 до 1 мг/л (что соответствует от 1 до 10 ПДК согласно нормативам), а также ацетат свинца в сходных концентрациях [20, 21].

В качестве контрольной группы использовали разбавленные суспензии культур микроводорослей без добавления тяжелых металлов. Для каждого эксперимента контрольную группу составляло не менее 10 образцов для каждой из исследуемых культур. В качестве опытных проб выступали разбавленные суспензии микроводорослей с заданным количеством загрязнителя, добавленного в питательную среду. Экспериментальная группа для каждой из исследуемых концентраций составляла 15 проб. С момента добавления металлов, исследуемые пробы оставляли на 2 часа при интенсивном освещении и постоянной температуре. Параметры флуоресценции контрольных образцов измеряли до и после начала двухчасового промежутка. Выбор данного временного промежутка обусловлен литературными данными. Например, в работе Серегина И.В. [22] указано, что поглощение ионов металла клетками микроводоросли происходит в первые часы взаимодействия культуры с микроэлементами и на более ранних этапах воздействие может не проявляться.

С помощью импульсного флуориметра PhytoPAM проводили регистрацию максимальной, минимальной и вариабельной флуоресценции для адаптированного к свету образца, а также квантового выхода и содержания хлорофилла в пробе[23]. Регистрацию кривых индукции флуоресценции хлорофилла (ИФХ) выполняли с помощью флуориметра ФС-2 при предварительной пятиминутной темновой адаптации образца. На основании полученных кривых и параметров OJIP-теста [24, 25] проводили анализ состояния микроводорослей.

Статистическую обработку полученных результатов исследования проводили с помощью программ «Statistica 8» (StatSoft Inc.) и «Excel 2007» (Microsoft Corporation). Достоверность отличий средних значений полученных данных определяли с использованием t-теста и критерия Вилкоксона.

Анализ результатов. Изменение параметров флуоресценции клеток *Chlorella sorokiniana* при воздействии различных концентраций марганца представлены в табл. 1.

Таблица 1

Изменение содержания хлорофилла и интенсивности флуоресценции клеток *Chlorella sorokiniana* при различных концентрациях Mn^{2+}

Содержание Mn^{2+}, мг/л	F_0, отн.ед.	F_{max}, отн.ед.	F_v, отн.ед.	φ_0, отн.ед.	Chl, мг/л
0,0*	1086±20	1857±49	771±42	0,41±0,01	7,64±0,20
0,1	1044±24	1805±53	754±41	0,42±0,01	7,35±0,16
0,2	1047±38	1825±103	778±68	0,42±0,02	7,39±0,27
0,3	1033±45	1722±134	689±94	0,40±0,02	7,27±0,31
0,4	1057±37	1769±111	720±90	0,40±0,03	7,43±0,24
0,5	1092±25	1880±80	788±63	0,42±0,02	7,68±0,18
0,6	1073±36	1872±114	780±119	0,43±0,02	7,57±0,28
0,7	1076±52	1729±271	676±207	0,38±0,06	7,59±0,37
0,8	1015±43	1588±159	573±117	0,36±0,04	7,14±0,31
0,9	1070±40	1689±245	656±174	0,38±0,06	7,26±0,55
1,0	1108±24	1868±77	760±57	0,41±0,02	7,82±0,16

Примечание: * – контрольная группа.

Изменение параметров флуоресценции клеток *Pleurochloris magna* при воздействии различных концентраций марганца представлены в табл. 2.

Как видно из табл. 1 и 2, содержание ионов марганца, в 10 раз превышающее предельно допустимую концентрацию для природных вод, не приводило к достоверному изменению базовых параметров флуоресценции клеток *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna*. Изменение содержания Mn^{2+} также не приводило к изменению содержания хлорофилла в исследуемых пробах.

Таблица 2

Изменение содержания хлорофилла и интенсивности флуоресценции клеток *Pleurochloris magna* при различных концентрациях Mn^{2+}

Содержание Mn^{2+}, мг/л	F_0, отн.ед.	F_{max}, отн.ед.	F_v, отн.ед.	φ_0, отн.ед.	Chl, мг/л
0,0*	1216±50	2331±85	1115±36	0,48±0,01	8,50±0,25
0,1	1164±29	2485±112	1321±92	0,53±0,01	8,20±0,22
0,2	1188±34	2504±96	1316±67	0,53±0,01	8,40±0,25
0,3	1188±58	2431±118	1243±63	0,52±0,01	8,40±0,42
0,4	1183±27	2438±92	1255±70	0,52±0,01	8,30±0,15
0,5	1164±66	2387±137	1223±74	0,51±0,01	8,20±0,47
0,6	1214±14	2501±36	1287±37	0,52±0,01	8,50±0,11
0,7	1226±19	2468±83	1242±72	0,50±0,02	8,70±0,16
0,8	1225±28	2393±32	1169±32	0,49±0,01	8,60±0,22
0,9	1227±20	2303±39	1076±19	0,47±0,00	8,60±0,04
1,0	1239±94	2322±221	1059±113	0,46±0,01	8,90±0,71

Примечание: * – контрольная группа.

Однако, согласно литературным данным, в частности, исследованиям Каменец А.Ф. [26] на клетках *Scenedesmus quadricauda* установлено, что при инкубировании микроводорослей в растворах $MnCl_2$ в концентрации 0.05–10 мг/л численность клеток уменьшилась на 24–46 %. В работе отмечено, что ионы марганца не проявляют острой токсичности по отношению к фитопланктону, а пробы воды, содержащие ионы марганца в концентрациях 0,001–0,1 мг/л являются не токсичными [27]. Полученные экспериментальные данные согласуются с литературными.

Поскольку в результате анализа базовых параметров флуоресценции не было выявлено значимых отличий от контроля, для оценки степени негативного воздействия тяжелых металлов на фотосинтетический аппарата микроводорослей проводили OJIP-тест.

Согласно литературным данным, одним из наиболее информативных параметров является PI – интегральный индекс функциональной активности, отражающий эффективность функционирования ФС 2 [25, 27, 28].

Рост показателя PI (рис. 1) указывает на стимулирующее действие марганца на клетки микроводорослей. Согласно многочисленным литературным данным, данный металл играет важную роль в обеспечении нормального функционирования фотосинтетического аппарата растений [19, 29, 30].

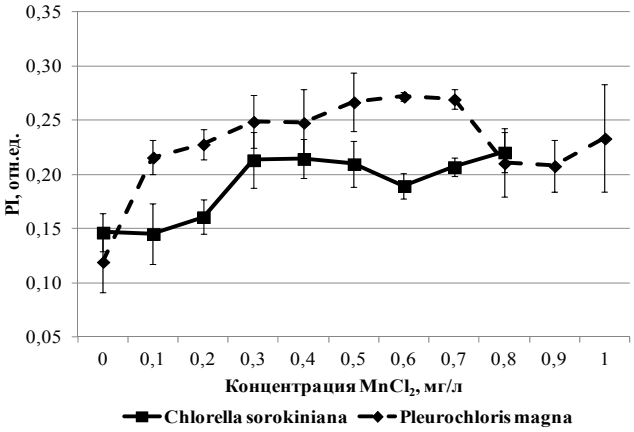


Рис. 1. Изменение параметра PI в пробах с клетками *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna* в присутствии ионов Mn^{2+}

На рис. 2 представлено изменение параметра S_M, согласно кривым ИФХ, полученным для клеток *Chlorella sorokiniana*. Видно значительное снижение показателя при внесении ионов марганца в питательную среду, что отражает снижение емкости пула электронных акцепторов [25]. Примечательно, что изменения показателя S_M согласно кривым ИФХ клеток *Pleurochloris magna* не наблюдалось.

Согласно литературным данным, свинец препятствует многим физиологическим процессам, включая фотосинтез и транспирацию, но стимулирует дыхание. Основным объектом воздействия ионов металла в интактных системах является непосредственно фотосинтетический транспорт электронов, а также протекание цикла Кальвина-Бенсона. В изолированных хлоропластах происходит взаимодействие Pb с реакционными центрами ФС 1, принимая во внимание, что ФС 1 более толерантна к воздействию металла, чем ФС 2 [25, 31]. Таким образом, наибольшее воздействие ионы свинца оказывают на ФС 1. Однако, основные механизмы воздействия данного металла на ФС 2 раскрыты недостаточно.

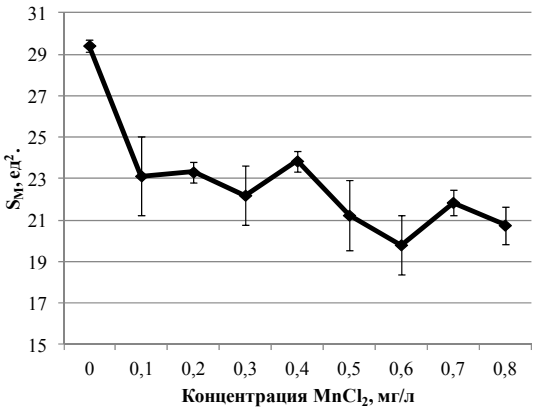


Рис. 2. Изменение параметра S_M для клеток *Chlorella sorokiniana*

Изменение параметров флуоресценции клеток *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna* при воздействии различных концентраций свинца представлены в табл. 3 и 4 соответственно.

Таблица 3

Изменение содержания хлорофилла и интенсивности флуоресценции клеток *Chlorella sorokiniana* при различных концентрациях Pb^{2+}

Содержание Pb^{2+}, мг/л	F_0, отн.ед.	F_{max}, отн.ед.	F_v, отн.ед.	φ_0, отн.ед.	Chl, мг/л
0,0*	1004±17	1736±53	732±40	0,42±0,01	7,10±0,13
0,1	968±40	1853±57	885±19	0,48±0,01	6,80±0,29
0,2	981±11	1452±21	897±12	0,48±0,00	6,90±0,06
0,3	979±41	1855±65	876±37	0,47±0,01	6,90±0,3
0,4	964±21	1803±59	839±55	0,47±0,02	6,80±0,13
0,5	953±34	1776±79	824±65	0,47±0,01	6,70±0,23
0,6	928±27	1747±81	820±56	0,47±0,01	6,50±0,18
0,7	916±21	1732±69	815±76	0,47±0,02	6,50±0,15
0,8	931±33	1727±45	796±32	0,46±0,01	6,40±0,08
0,9	890±42	1645±99	756±64	0,46±0,01	6,30±0,30
1,0	954±44	1750±58	796±18	0,46±0,01	6,30±0,23

Примечание: * – контрольная группа.

Таблица 4

Изменение содержания хлорофилла и интенсивности флуоресценции клеток *Pleurochloris magna* при различных концентрациях Pb^{2+}

Содержание Pb^{2+}, мг/л	F_0, отн.ед.	F_{max}, отн.ед.	F_v, отн.ед.	φ_0, отн.ед.	Chl, мг/л
0,0*	1115±35	2273±124	1158±106	0,51±0,02	7,83±0,25
0,1	1053±60	2141±45	1089±34	0,51±0,02	7,47±0,11
0,2	1068±43	2254±72	1187±36	0,53±0,01	7,54±0,29
0,3	1076±19	2246±89	1170±77	0,52±0,02	7,61±0,14
0,4	1089±77	2257±170	1168±95	0,52±0,01	7,70±0,42
0,5	954±26	2013±31	1058±9	0,53±0,01	6,74±,19
0,6	985±23	2052±35	1067±44	0,52±0,01	6,82±0,11
0,7	928±10	1947±29	1019±21	0,53±0,01	6,48±0,07
0,8	985±39	2002±114	1017±75	0,51±0,01	6,94±0,25
0,9	943±60	1908±133	964±74	0,50±0,01	6,63±0,42
1,0	985±41	1958±81	974±46	0,50±0,01	6,85±0,36

Примечание: * – контрольная группа.

Из табл. 3 и 4 видно, что для клеток *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna* характерно снижение уровней минимальной и максимальной флуоресценции. Кроме того, с ростом концентрации свинца в питательной среде микроводорослей, происходит снижение содержания хлорофилла. Также отмечено, что значения квантового выхода флуоресценции клеток не отличаются от контрольных.

Согласно результатам, представленным в табл. 3 и 4, происходит негативное воздействие на реакционные центры ФС 2. Наибольшие изменения с ростом концентрации металла регистрировали для содержания хлорофилла, что может свидетельствовать о гибели клеток микроводорослей. Достоверное снижение концентрации фотосинтетических пигментов в клетках исследуемых культур происходило при содержании ионов свинца в питательной среде равного 0,4 мг/л. Повышение концентрации металла приводило к большему снижению содержания хлорофилла (рис. 3).

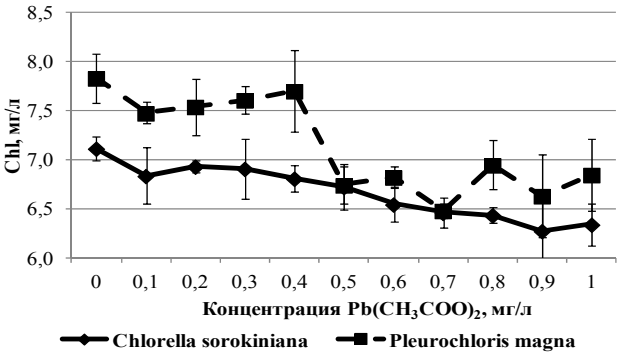


Рис. 3. Изменение содержания хлорофилла в пробах в присутствии ионов Pb^{2+}

Анализ кривых ИФХ клеток исследуемых культур позволил выявить ряд тест-функций, отражающих воздействие свинца.

На рис. 4 представлены результаты изменения общего показателя эффективности функционирования ФС 2 для исследуемых культур микроводорослей. Показатель PI клеток *Pleurochloris magna* возрастает при внесении металла в водную среду, тогда как для клеток *Chlorella sorokiniana* было характерно снижение данного показателя. Полученный результат может свидетельствовать об устойчивости клеток *Pleurochloris magna* к воздействию данного металла.

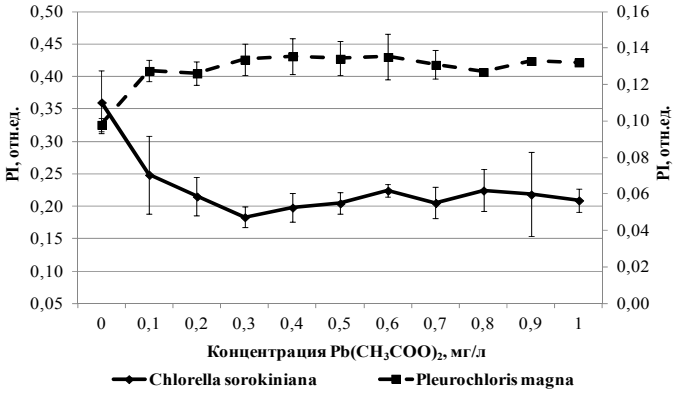


Рис. 4. Изменение параметра PI в пробах в присутствии ионов Pb^{2+}

Однако, согласно некоторым литературным данным, повышение содержания растворенного CO_2 в водной среде способствует связыванию ионов Pb^{2+} [2, 29, 32, 33]. Поскольку клетки микроводорослей в процессе своей жизнедеятельности выделяют углекислый газ, то при длительном культивировании возможно накопление данного продукта в водной среде [19].

Кроме уровней минимальной и максимальной флуоресценции определяли интенсивность свечения клеток в каждой из фаз OJIP-кривой. Было зарегистрировано повышение интенсивности флуоресценции F_J, т.е. в фазе OJ для клеток *Chlorella sorokiniana* при внесении свинца в концентрации 0,1 мг/л (рис. 5). Повышение содержания ионов металла в пробах до 1 мг/л к значительным изменениям данного параметра, относительно концентрации 0,1 мг/л, не приводили.

Изменение параметра M_0, отражающего скорость закрывания реакционных центров ФС 2 и представляющего максимальную скорость восстановления переносчика Q_A [25], для клеток *Chlorella sorokiniana* представлено на рис. 6. Видно, что происходит возрастание данного показателя. Принимая во внимание, снижение числа активных РЦ ФС 2, а также учитывая, что интенсивность освещенности образцов во время экспозиции, а также интенсивность возбуждающего и измерительного света оставались постоянными при различных концентрациях свинца, интенсификация процессов электронного переноса на участке Хлорофилл–Феофитин–Q_a (или P_{680}–Pheo–Q_a) может быть связанна с компенсаторными механизм ами: при повреждении части реакционных центров, оставшиеся начинают работать более интенсивно до момента репарации поврежденных пигмент-белковых комплексов.

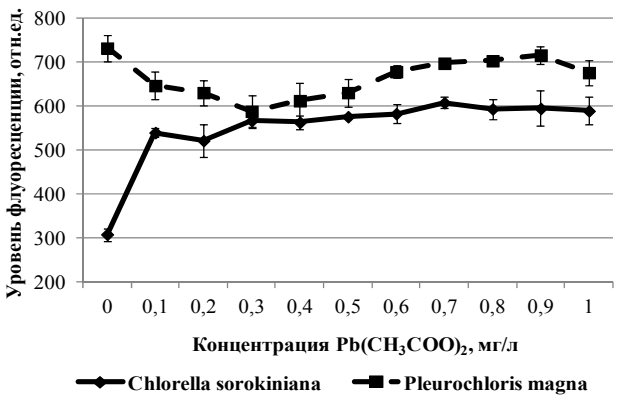


Рис. 5. Изменение уровня флуоресценции в момент фазы F_J в пробах в присутствии ионов Pb^{2+}

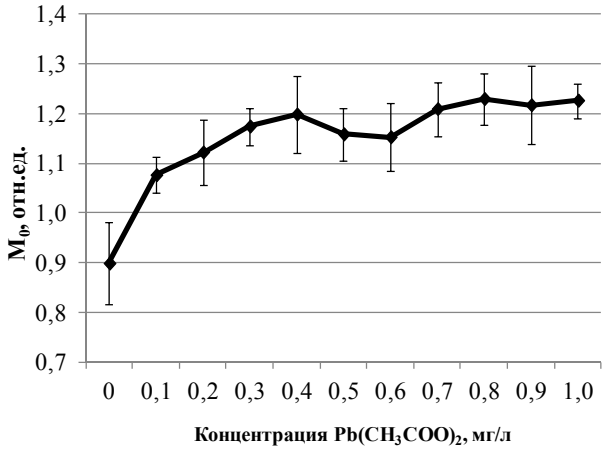


Рис. 6. Изменение параметра M_0 клеток *Chlorella sorokiniana* при различных концентрациях Pb^{2+}

Выводы. Таким образом, согласно флуориметрическому анализу ионы в Mn^{2+} в концентрациях от 0,1 до 1,0 мг/л не оказывают негативного воздействия на клетки микроводорослей *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna*. Кроме того, для некоторых концентраций данного металла – 0,3 мг/л для *Chlorella sorokiniana* и 0,1 мг/л для *Pleurochloris magna,* характерно стимулирующее действие, которое проявляется в повышении функциональной активности ФС 2.

Воздействие свинца в концентрациях 0,1–1 мг/л приводит к снижению содержания хлорофилла в исследуемых пробах, что может быть связано гибелью части клеток культуры микроводорослей. Согласно результатам анализа кривых ИФХ, полученных для живых клеток *Chlorella sorokiniana* и *Pleurochloris magna*, происходило возрастание показателя M_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Папина Т.С. Транспорт и особенности распределения тяжелых металлов в речных экосистемах / Т.С. Папина. – Новосибирск: СО РАН. – 2001. – 58 с.
2. Попов А.Н. Исследование трансформации соединений металлов в поверхностных водах / А.Н. Попов, О.В. Беззапонная // Водные ресурсы. – 2004. – Т. 31, № 1. – С. 46-50.
3. Тихонова И.О. Экологический мониторинг водных объектов: учебное пособие / И.О. Тихонова, Н.Е. Кручинина, А.В. Десятов. – М.: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2016. – 151 с.
4. Филенко О.Ф. Основы водной токсикологии: учебное пособие / О.Ф. Филенко, И.В. Михеева. – М.: Колос. – 2007. –144 с.
5. Моисеенко Т.И. Водная экотоксикология / Т.И. Моисеенко. – М.: Наука, 2009.– 400 с.

6. Мидоренко Д.А. Мониторинг водных ресурсов: учебное пособие / Д.А. Мидоренко, В.С. Краснов. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2009. – С. 45-49, 51-52.
7. Применение флуориметрического метода для биоиндикации качества вод / А.В. Кузнецова, И.Ю. Винокуров, С.И. Погосян // Вода: химия и экология. – 2011. – № 3. – С. 58-65.
8. Смуров А.В. Экологические нормативы и биологические методы диагностики среды обитания / А.В. Смуров. – Москва, 2011. – 197 с.
9. Флуоресценция хлорофилла растений как показатель экологического стресса: теоретические основы применения метода / В.С. Лысенко, Т.В. Вардуни, В.Г. Сойер и др. – Ростов-на-Дону, 2013. – С. 112-120.
10. Маторин Д.Н. Определение состояния растений и водорослей по флуоресценции хлорофилла: учебно-методическое пособие / Д.Н. Маторин. – Москва, 2010. – 368 с.
11. Меженский В.Н. Растения-индикаторы / В.Н. Меженский. – М.: ООО «Издательство АСТ»; Донецк: «Сталкер», 2004. – 276 с.
12. Применимость разных типов водных сообществ для экспресс-оценки качества воды малых водотоков / Д.В. Ростанец, К.П. Хазанова, В.М. Храмов // Естественные и технические науки. – 2011. – № 4. – С. 196-198.
13. Спиркина Н.Е. Исследование культуры зеленой микроводоросли *Monoraphidium arcuatum* как нового тест-объекта для оценки качества водной среды / Н.Е. Спиркина. – Москва, 2016. – 172 с.
14. Шарапова И. Э. Исследование и использование микроводорослей для биоремедиации водных сред / И.Э. Шарапова, А.А. Шубаков, Е.А. Михайлова // Инновации в науке: сб. ст. по матер. XIII междунар. науч.-практ. конф. – Новосибирск: СибАК, 2012. – С. 38-45.
15. Joshi M.K. Chlorophyll a fluorescence as a probe of heavy metal ion toxicity in plants. In: Chlorophyll a Fluorescence: A Signature of Photosynthesis / M.K. Joshi, P. Mohanty // Advances in Photosynthesis and Respiration. – 2004. – Vol. 19. – P. 637-661.
16. Использование флуоресценции хлорофилла «а» для биотестирования водной среды / В.А. Осипов, Г.М. Абдурахманов, А.А. Гаджиев и др. // Юг России: экология, развитие. – 2012. – Т. 7, вып. 2. – С. 93-100.
17. Осипов В.А. Зависимость флуоресцентных параметров микроводорослей от факторов среды, включая антропогенные загрязнения: автореф. дис. канд. биол. наук / В.А. Осипов. – М., 2006. – 22 с.
18. Maxwell K. Chlorophyll fluorescence – a practical guide / K. Maxwell, N. Giles // Johnson Journal of Experimental Botany. – 2000. – Vol. 51, No 345. – P. 659–668.
19. Перспективы использования микроводорослей в биотехнологии / О.К. Золотарева, Е.И. Шнюкова, О.О. Сиваш, Н.Ф. Михайленко. – Киев: «Альтерпрес», 2014. – 234 с.
20. ГН 2.1.5.1315-03 Предельно допустимые концентрации (ПДК) химических веществ в воде водных объектов хозяйственно-питьевого и культурно-бытового водопользования. Зарегистрированы Минюстом России № 4550 от 19.05.2003 г. Нефтяник. – 2003. – 94 с.
21. О содержании разных форм свинца и кадмия в абиотических компонентах экосистемы волгоградского водохранилища / В.В. Новиков, В.П. Зволинский, М.Ю. Пучков, Е.Г. Локтионова // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 6. – С. 361-365.
22. Серегин И.В. Распределение тяжелых металлов в растениях и их действие на рост : автореф. дис. докт. биол. наук / И.В. Серегин. – М., 2009. –53 с.
23. Анализатор фитопланктона PHYTO-PAM и программное обеспечение Phyto-Win вер. 1.45: Компоненты системы и принципы работы – Германия: Heinz Walz GmbH, 2003. – 167 с.
24. Беспалова С.В. Использование метода флуорометрии в биомониторинге водного объекта / С.В. Беспалова, С.М. Романчук, С.В. Чуфицкий // V Съезд биофизиков России. Материалы докладов: в 2 т. – Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2015. – Т. 2. – С. 344.
25. Переменная и замедленная флуоресценция хлорофилла *a* – теоретические основы и практическое приложение в исследовании растений / В.Н. Гольцев, М.Х. Каладжи, М.А. Кузманова, С.И. Аллахвердиев. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. – 220 с.
26. Каменец А. Ф. Влияние ионов марганца (II) на *Scenedesmus quadricauda* / А.Ф. Каменец // Вестник ВГУ, Серия: Химия. Биология. Фармация. – 2017. – № 1. – С. 67-70.
27. Маторин Д.Н. Флуоресценция хлорофилла для биодиагностики растений / Д.Н. Маторин, А.А. Алексеев – М.: ООО «ПКЦАльтекс», 2013. – 364 с.
28. Brack W. Chlorophyll a fluorescence: a tool for the investigation of toxic effects in the photosynthetic apparatus / W. Brack, H. Frank // Ecotoxicology and Environmental Safety. – 1998. – Vol. 40, No l–2. – P. 34-41.
29. Левина Э.Н. Общая токсикология металлов / Э.Н. Левина. – Л.: Медицина, 1972. –184 с.
30. Шилова Н.А. Влияние тяжелых металлов на представителей пресноводного фито- и зоопланктона в условиях засоления / Н.А. Шилова. – Саратов, 2014. – 133 с.

31. Полынов В.А. Флуоресцентные методы в биотестировании токсичности природных и сточных вод: авторефер. дисс. канд. наук / В.А. Полынов. – М.: МГУ, 1993. – 22 с.
32. Двуокись углерода в природных водах: Методические указания / Сост. Кузьмина И.А. – Великий Новгород; НовГУ, 2007. – 12 с.
33. Chmielewska E. Bioaccumulation of Heavy Metals by Green Algae Cladophora glomerata in a Refinery Sewage Lagoon / E. Chmielewska, J. Medved // Croatica chemica Acta. – 2001. – Vol. 74 (1). – P. 135-145.

Поступила в редакцию 06.05.2019 г.

INFLUENCE OF SALTS OF HEAVY METALS ON FLUORESCENCE OF *CHLORELLA SOROKINIANA* AND *PLEUROCHLORIS MAGNA* CELLS

S.V. Chufitsky, A. S. Lyashova

The effect of Mn^{2+} and Pb^{2+} ions in the concentration range from 0.1 to 1.0 mg/l on the chlorophyll a fluorescence of cultures of green microalgae Chlorella sorokiniana and Pleurochloris magna was studied. The fluorescence induction curves of the studied microalgae cultures were obtained and analyzed. It was shown that the studied concentrations of Mn^{2+} have either a stimulating effect or do not have a significant effect on the fluorescence of the cells, whereas the Pb^{2+} ions cause a decrease in the chlorophyll content in the studied samples. Based on the analysis of fluorescence induction curves, a number of test functions were selected, that reflects the negative effect of Mn^{2+} and Pb^{2+} ions on phytoplankton cells.

Keywords: biotesting, manganese, lead, *Chlorella Sorokiniana*, *Pleurochloris Magna*, fluorimetry, photosynthesis.

Чуфицкий Сергей Викторович
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк; старший преподаватель кафедры биофизики
E-mail: ChufitskyiSergey@yandex.ru

Chufitskiy Sergey V.,
Donetsk National University, Donetsk;
Senior Lecturer

Ляшова Арина Сергеевна
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк; студентка 4 курса биологического факультета
E-mail: arina_lyashova@mail.ru

Lyashova Arina S.,
Donetsk National University, Donetsk
4th year student of the Faculty of Biology

Научное издание

Вестник Донецкого национального университета.
Серия А: Естественные науки

2019. – № 1

Технический редактор: *М.В. Фоменко*

Свидетельство о регистрации СМИ Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

Адрес редакции:
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
ул. Университетская, 24,
283001, г. Донецк
Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: http://donnu.ru/vestnikA

Подписано в печать 01.06.2019 г.
Формат 60×84/8. Бумага офсетная.
Печать – цифровая. Усл. печ. л. 15,86.
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24.
Тел.: (062) 302-92-27.
Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности
в Государственный реестр
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.