

ISSN 2415-7058

Вестник Донецкого национального университета



НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ
*Основан
в 1997 году*

Серия А
**Естественные
науки**

3-4/2018

Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки»

Главный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**

Зам. главного редактора – д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**

Ответственный секретарь: канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**

Члены редколлегии: д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; д-р экон. наук, проф. **В.Н. Андриенко**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Белоусов**; доктор философии, профессор **С.В. Белый** (Тройский университет, США); д-р биол. наук, проф. **М.И. Бойко**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Б.В. Бондарев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Беларуси **С.А. Жданок** (Беларусь); д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**; д-р физ.-мат. наук, доц. **С.А. Мельник** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р техн. наук, проф. **Ф.В. Недопекин**; д-р биол. наук, проф. **В.И. Соболев** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**; д-р биол. наук, проф. **Н.Н. Ярошенко**.

**The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University.
Series A: Natural Sciences”**

The Editor-in-Chief – Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**

The Deputy of the Editor-in-Chief – Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**

Executive Secretary: Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**

The Members of the Editorial Board: Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Dr. of econ., prof. **V.N. Andrienko**; Dr. of tech., prof. **V.V. Belousov**; Dr. of Philosophy, prof. **S.V. Belyi** (Troy University, USA); Dr. of biol., prof. **M.I. Boyko**; Dr. of phys. and math., prof. **B.V. Bondarev**; Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Zhdanok** (Belarus); Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**; Dr. of phys. and math., docent **S.A. Melnik** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of tech., prof. **F.V. Nedopiokin**; Dr. of biol., prof. **V.I. Sobolev** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**; Dr. of biol., prof. **N.N. Jaroshenko**.

Адрес редакции: ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 283001

Тел: (062) 302-92-56, 302-92-93

E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru **URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказы МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г. и № 1468 от 26.12.2017 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 – Математика; 01.02.00 – Механика; 01.04.00 – Физика; 02.00.00 – Химические науки; 03.02.00 – Общая биология.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

*Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Протокол № 10 от 27.12.2018 г.*

© ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», 2018

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. Естественные науки

№ 3-4

Донецк 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Механика

- Авраменко Л.Е. Напряженно-деформированное состояние термоупругих ортотропных оболочек под действием движущегося импульсного локального источника тепла 3
- Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Однородные решения краевых задач трехмерной теории упругости о равновесии и колебаниях изотропных поперечно-неоднородных плит 13
- Горр Г.В., Балаклицкая Т.В., Шенцова В.В. О равномерных вращениях гиригостата, имеющего неподвижную точку, в двух задачах механики 77
- Чехов В.Н., Загора С.В. О влиянии поперечного сдвига на напряженное состояние в сферической оболочке с жестким включением, нагруженным усилиями 92

Физика

- Гмыря В.А., Данилов В.В. Оптические информационные технологии: коэффициент передачи пространства 102
- Сирюк Ю.А., Безус А.В., Бондарь Е.Д., Смирнов В.В. Индуцированные фазовые переходы в доменных границах жесткой решетки цилиндрических магнитных доменов 113

Химические науки

- Кулишова Т.П. Катализ реакций S_NAr молекулами органических оснований в протоинертных неполярных средах. Синергетический эффект совместного катализа нуклеофилом и основанием для реакций с первичными аминами 119
- Сайфутдинова М.В., Михальчук В.М., Савоськин М.В., Берестнева Ю.В. Полимерные композиционные материалы на основе эпоксидной смолы и терморасширенного графита 129

Биологические науки

- Беспалова С.В., Чуфицкий С.В., Романчук С.М., Кривякин А.С. Биомониторинг поверхностных вод в условиях антропогенной нагрузки на примере реки Кальмиус 137
- Кочура Д.А. Влияние антропогенных факторов окружающей среды на функциональное состояние нервной системы студентов 146
- Мирненко Н.С. Качество пыльцы *Diplotaxis muralis* (L.) Dc. в условиях пгт. Новый Свет Старобешевского района 157
- Мирненко Э.И. Токсические *Cyanophyta* в фитопланктоне Нижнекальмиусского водохранилища 162
- Чемерис О.В., Бойко М.И. Влияние способа культивирования на ферментативную активность штамма *Irpex lacteus* 2482 168

Михаил Иванович Бойко (03.03.1940 – 11.10.2018)

175

Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

Series A. Natural Sciences

No 3-4

Donetsk 2018

CONTENTS

Mechanics

- Avramenko L.E.* Stress-strain state of thermoelastic orthotropic shells under the action of a moving im-pulsive local heat source 3
- Altukhov E.V., Fomenko M.V.* Homogeneous solutions of boundary-value problems of the three-dimensional elasticity theory of equilibrium and vibrations of isotropic transverse inhomogeneous plates 13
- Gorr G.V., Balaklitskaya T.V., Shentsova V.V.* About steady rotation of gyrostat, having fixed point, in two problems of mechanics 77
- Chekhov V.N., Zakora S.V.* On influence of the transverse shear on the stress state in a spherical shell with a rigid inclusion loaded by efforts 92

Physics

- Gmyrya V.A., Danilov V.V.* Optical information technologies: transmissivity of space 102
- Siryuk Ju.A., Bezus A.V., Bondar E.D., Smirnov V.V.* Induced phase transitions in domain walls of hard lattice of the cylindrical magnetic domains 113

Chemical sciences

- Kulishova T.P.* Catalysis of S_NAr reactions by organic base molecules in aprotic non-polar media. Synergetic effect participatory catalysis by nucleophiles and the basis for reactions with primary amines 119
- Saifutdinova M.V., Mikhal'chuk V.M., Savoskin M.V., Berestneva Y.V.* Polymer composites based on epoxy resin and expanded graphite 129

Biological sciences

- Bespalova S.V., Chufitsky S.V., Romanchuk S.M., Krivyakin A.S.* Biomonitoring of surface waters under anthropogenic pressure on the example of the Kalmius river 137
- Kochura D.A.* The influence of anthropogenous environmental factors on the functional state of students nervous system 146
- Mirnenko N.S.* Quality of pollen *Diplotaxis muralis* (L.) DC. in the conditions of the village of Novyy Svet of Starobeshevsky district 157
- Mirnenko E.I.* Toxic *Cyanophyta* in the phytoplankton of the Nizhnekalmus reservoir 162
- Chemeris O.V., Boyko M.I.* Influence of cultivation method on enzyme activity of strain *Irpex lacteus* 2482 168
- Mikhail Ivanovich Boyko (03.03.1940 – 11.10.2018) 175

М Е Х А Н И К А

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ
ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕГОСЯ
ИМПУЛЬСНОГО ЛОКАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

© 2018. Л.Е. Авраменко

Решена задача термоупругости тонких ортотропных оболочек неотрицательной гауссовой кривизны, находящегося под действием локального импульсного источника тепла. Рассматривалось линейное распределение температуры по толщине оболочки и конвективный теплообмен по закону Ньютона с боковых поверхностей оболочки. С помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа получено решение задачи в аналитическом виде. Исследовано влияние термомеханических характеристик материала, формы источника тепла и характера импульсного воздействия на распределение усилий в оболочке.

Ключевые слова: ортотропная оболочка, интегральные преобразования, локальный импульсный источник, термоупругость.

Введение. Основные уравнения. В силу широкого распространения оболочечных элементов в сложных конструкциях, актуальным на сегодняшний день является вопрос об исследовании их поведения при различных технологических процессах, а также процессах обработки материалов концентрированными потоками энергии. К таким процессам относится сварка, шлифование, резка линейным инструментом, хонингование, наплавка, механическое упрочнение обкаткой, обработка световым лучом, электронным и ионным лучами, плазменной струей.

Поведение пластин и изотропных оболочек при действии на них различных температурных воздействий изучено достаточно хорошо [1–4]. В меньшей степени, в силу сложности решений, исследовано поведение ортотропных и анизотропных оболочек, в частности распределение напряжений, которые возникают при лазерной и электронно-лучевой обработках материалов [5–8].

Данная работа посвящена решению задачи термоупругости для ортотропной оболочки неотрицательной гауссовой кривизны при действии локального импульсного источника тепла, движущегося по поверхности пологой оболочки по закону

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau). \quad (1)$$

Уравнения теплопроводности имеют вид [9]:

$$\begin{aligned} h^2 \nabla_{\lambda}^2 T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_3 T_2 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= -(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + W_1); \\ h^2 \nabla_{\lambda}^2 T_2 - 3(1 + \mu_1) T_2 - 3\mu_2 T_1 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1 + W_2). \end{aligned} \quad (2)$$

где $T_1(x, y, \tau) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t(x, y, z, \tau) dz$, $T_2(x, y, \tau) = \frac{1}{2h^2} \int_{-h}^h z t(x, y, z, \tau) dz$ – интегральные характеристики температурного поля (средняя температура и температурный момент), $t(x, y, z, \tau)$ – температура оболочки; $\nabla_{\lambda}^2 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, λ_{11} , λ_{22} , λ_{33} – главные коэффициенты

теплопроводности; $\mu_{1,2} = (Bi^+ \pm Bi^-)/2$, где $Bi^\pm = \alpha^\pm h/\lambda_{33}$ – критерий Био, $\alpha^\pm$ – коэффициенты теплообмена на поверхностях $z = \pm h$; $\mu_3 = \mu_2 - 2k_3h$, $k_3 = (k_1 + k_2)/2$ – средняя кривизна срединной поверхности; $k_{1,2} = 1/R_{1,2}$, $R_{1,2}$ – главные радиусы кривизны оболочки; $t_{1,2} = (t_c^+ \pm t_c^-)/2$, $t_c^\pm$ – температура среды на поверхностях $z = \pm h$; c – удельная теплоемкость материала; $a = \lambda_{33}/c\rho$ – коэффициент температуропроводности; ρ – плотность вещества; $W_1 = \frac{h}{2\lambda_{33}} \int_{-h}^h W_0 dz$, $W_2 = \frac{1}{2\lambda_{33}} \int_{-h}^h z W_0 dz$ – плотность источников средней

температуры и температурного момента (W_0 – объемная плотность источников тепла, равная количеству тепла, которое производится в единице объема за единицу времени, [Дж/(м³·с)]). В соответствии с определением W_1 и W_2 являются функциями интегральных характеристик источников тепла и измеряются в градусах.

В качестве закона распределения мощности подаваемой внешней энергии в данной работе принимаем нормально-круговой источник [10–11]. Плотность его удельного теплового потока имеет вид

$$q(x, y, \tau) = q_0 e^{-k_0 [(x-x(\tau))^2 + (y-y(\tau))^2]}, \quad (3)$$

где $q_0 = q(0)$ – наибольший тепловой поток в центре площадки нагрева, k_0 – коэффициент сосредоточенности, характеризующий форму кривой нормального распределения. Данное тепловое воздействие моделируем распределением источников средней температуры W_1 и источников температурного момента W_2 по области нагреваемого участка. Такое моделирование позволяет исследовать воздействие теплового потока сварочной дуги или газовой горелки. Нагреваемый участок поверхности будем называть пятном нагрева.

Постановка задачи теплопроводности для локально нагретых оболочек предполагает, что возмущение, вносимое локальным воздействием, не распространяется до края рассматриваемой оболочки. Справедливость данного предположения проверяется после решения конкретной задачи. Встает вопрос об области пятна нагрева. В этом случае могут быть приняты разные варианты. Например, за границу области пятна принимают координаты тех точек поверхности оболочки, в которых граничная интенсивность потока (поток энергии от внешнего источника на границе пятна) составляет менее 5% от максимального значения в центре пятна нагрева.

Поскольку в работе используется аналитическое обращение функции потока энергии, которая определена во всей области, а модель локального нагрева ограничивает его действие размерами пятна, то в полученное решение вносится погрешность, связанная с учетом потока энергии, действующего на оболочку вне зоны пятна нагрева оболочки. Эта погрешность будет тем меньше, чем меньше принятая граничная интенсивность потока энергии и чем больше коэффициент сосредоточенности. Данную погрешность можно оценить, как отношение количества энергии, вне пятна нагрева и внутри этого пятна.

Так как размер пятна нагрева определяется геометрией потока внешнего источника (3), то предполагаем также, что размеры пятна нагрева намного меньше размеров оболочки.

В начальный момент времени температуру оболочки полагаем равной нулю. Так как в данной постановке задачи температура окружающей среды не зависит от координат, ее можно приравнять к нулю. В противном случае полученное решение будет от-

личаться на константы, которые легко находятся в силу линейности дифференциальных уравнений.

Перейдем к безразмерной системе координат: $x' = x/h$, $y' = y/h$, $z' = z/h$, $\tau' = \tau a/h^2$ и упростим исходные уравнения, приняв температуру окружающей среды равной нулю ($t_c^\pm = 0$). Тогда уравнения (2) примут вид

$$\nabla_{\lambda'}^2 T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_3 T_2 - \frac{\partial T_1}{\partial \tau'} = -W'_1; \quad \nabla_{\lambda'}^2 T_2 - 3(1 + \mu_1)T_2 - 3\mu_2 T_1 - \frac{\partial T_2}{\partial \tau'} = -3W'_2. \quad (4)$$

Действие движущегося импульсного локального источника тепла моделируется с помощью закона распределения теплового потока (3) и функции Хэвисайда [5], стоящих в правой части уравнения теплопроводности. Плотность источников средней температуры и температурного момента в этом случае в безразмерной системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} W'_i(x', y', \tau') &= \sum_{k=0}^{m-1} W_i^0 e^{-k_0[(x'-x'(\tau'))^2 + (y'-y'(\tau'))^2]} [S_+(\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)) - S_+(\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2)] = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} W'_{Li}(x', y', \tau') [S_+(\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)) - S_+(\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $W'_{Li}(x', y', \tau') = W_i^0 e^{-k_0[(x'-x'(\tau'))^2 + (y'-y'(\tau'))^2]}$, W_1^0 – мощность источника (максимальное значение) средней температуры в центре пятна нагрева; W_2^0 – мощность источника температурного момента в центре пятна нагрева; $S_+[\tau] = 1$ при $\tau > 0$ и $S_+[\tau] = 0$ при $\tau \leq 0$ – функция Хэвисайда [5]; τ_1 – продолжительность импульса, τ_2 – продолжительность перерыва (паузы) в работе источника тепла; m – количество пауз.

Для исследования напряженно-деформированного состояния оболочки систему (4) дополним уравнениями равновесия в перемещениях [12]

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + (k_1 + \nu_2 k_2) \frac{\partial w}{\partial x'} \right) + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} \right) = \\ = \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) \frac{\partial T_1}{\partial x'}; \\ \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + (k_1 \nu_1 + k_2) \frac{\partial w}{\partial y'} \right) + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} \right) = \\ = \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \frac{\partial T_1}{\partial y'}; \\ \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \nu_2 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \nu_1 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} \right) + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \frac{4}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \\ + \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 \nu_1 \right) \frac{\partial u}{\partial x'} + \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 \nu_2 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 \right) \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + \\ + \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 (k_1 + k_2 \nu_2) + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 (k_1 \nu_1 + k_2) \right) w = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{1-\nu_1\nu_2} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \right) T_1 - \\
 &- \frac{2}{1-\nu_1\nu_2} \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) \frac{\partial^2 T_2}{\partial x'^2} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \frac{\partial^2 T_2}{\partial y'^2} \right), \quad (6)
 \end{aligned}$$

где u, v, w – перемещения в направлении осей координат x', y', z' ; $E_1, E_2, G_{1,2}$ – модули упругости для поверхностей, параллельных срединной поверхности оболочки; ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона для главных направлений; α_1, α_2 – температурные коэффициенты линейного расширения для главных направлений.

Введем замену:

$$\begin{aligned}
 A &= 2/(1-\nu_1\nu_2), \quad B = 2G_{12}/\sqrt{E_1E_2}, \quad A_1 = A\sqrt{E_1/E_2}, \quad A_2 = A\sqrt{E_2/E_1}, \\
 B_1 &= A_1\nu_2 + B, \quad B_2 = A_2\nu_1 + B, \quad c_1 = (k_1 + \nu_2 k_2), \quad c_2 = (k_1\nu_1 + k_2), \\
 d_1 &= (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2), \quad d_2 = (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2), \quad C_1 = A_1 c_1, \quad C_2 = A_2 c_2, \quad D_1 = A_1 d_1, \quad D_2 = A_2 d_2, \\
 F_1 &= A_1/3, \quad F_2 = A_2/3, \quad P_1 = A_1 k_1 d_1, \quad P_2 = A_2 k_2 d_2, \quad P = P_1 + P_2, \quad O_1 = A_1 k_1 c_1, \\
 O_2 &= A_2 k_2 c_2, \quad O = O_1 + O_2, \quad R_1 = F_1 d_1, \quad R_2 = F_2 d_2, \quad L_1 = A_1 k_1 + A_2 k_2 \nu_1, \\
 L_2 &= A_1 k_1 \nu_1 + A_2 k_2, \quad J = F_1 \nu_2 + F_2 \nu_1 + 4B/3.
 \end{aligned}$$

Тогда уравнения (6) примут вид

$$\begin{aligned}
 A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + B_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + C_1 \frac{\partial w}{\partial x'} &= D_1 \frac{\partial T_1}{\partial x'}; \\
 A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + C_2 \frac{\partial w}{\partial y'} &= D_2 \frac{\partial T_1}{\partial y'}, \quad (7) \\
 F_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + F_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + J \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \left(L_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + L_2 \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + Ow &= PT_1 - R_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x'^2} - R_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y'^2}
 \end{aligned}$$

Уравнение (4), (5), (7) – система уравнений искомой задачи термоупругости ортотропных оболочек в безразмерной системе координат.

Выражения для усилий, моментов и перерезывающих сил с учетом замены имеют вид

$$\begin{aligned}
 N_1 &= A_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x'} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial y'} + c_1 w - d_1 T_1 \right]; \quad N_2 = A_2 \left[\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + c_2 w - d_2 T_1 \right]; \\
 M_1 &= -F_1 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} + d_1 T_2 \right]; \quad M_2 = -F_2 \left[\nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} + d_2 T_2 \right]; \\
 S &= B \left[\frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \right]; \quad H = -\frac{2}{3} B \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial y'}; \\
 Q_1 &= -F_1 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x'^3} + \nu_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x' \partial y'^2} + d_1 \frac{\partial T_2}{\partial x'} \right] - \frac{2}{3} B \frac{\partial^3 w}{\partial x' \partial y'^2}; \\
 Q_2 &= -F_2 \left[\nu_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x'^2 \partial y'} + \frac{\partial^3 w}{\partial y'^3} + d_2 \frac{\partial T_2}{\partial y'} \right] - \frac{2}{3} B \frac{\partial^3 w}{\partial x'^2 \partial y'}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Выражения (8) получены с точностью Eh – для усилий и перерезывающих сил, Eh^2 – для моментов, где $E = \sqrt{E_1 E_2}$.

Решение задачи. Применяя к уравнениям (4), (7) преобразование Фурье по (x', y') и Лапласа по τ' [12–15], приходим к системе линейных алгебраических уравнений в пространстве трансформант:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \mu_1 + s) \tilde{T}_1 + \mu_3 \tilde{T}_2 &= \tilde{W}_1'(\xi, \eta, s); \\ (\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 3(1 + \mu_1) + s) \tilde{T}_2 + 3\mu_2 \tilde{T}_1 &= 3\tilde{W}_2'(\xi, \eta, s), \\ (A_1 \xi^2 + B \eta^2) \tilde{u} + B_1 \xi \eta \tilde{v} + C_1 i \xi \tilde{w} &= D_1 i \xi \tilde{T}_1; \quad (A_2 \eta^2 + B \xi^2) \tilde{v} + B_2 \xi \eta \tilde{u} + C_2 i \eta \tilde{w} = D_2 i \eta \tilde{T}_1; \quad (9) \\ L_1 i \xi \tilde{u} - L_2 i \eta \tilde{v} + (F_1 \xi^4 + F_2 \eta^4 + J \xi^2 \eta^2 + O) \tilde{w} &= P \tilde{T}_1 + (R_1 \xi^2 + R_2 \eta^2) \tilde{T}_2. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{W}_i'(\xi, \eta, s) &= \frac{W_i^0}{2\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \{S_+(\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)) - S_+(\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2)\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-k_0 [(x' - x_0 - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y_0 - y'(\tau' - \tau_0))^2]} e^{-s\tau' + i(\xi x' + \eta y')} dx' dy' d\tau' = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \{S_+(\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)) - S_+(\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2)\} \times \tilde{W}_{Li}'(\xi, \eta, s), \\ \lambda_1 &= \lambda_{11}/\lambda_{33}, \quad \lambda_2 = \lambda_{22}/\lambda_{33}, \\ \tilde{W}_{Li}'(\xi, \eta, s) &= \frac{W_i^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-k_0 [(x' - x_0 - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y_0 - y'(\tau' - \tau_0))^2]} e^{-s\tau' + i(\xi x' + \eta y')} dx' dy' d\tau'. \end{aligned}$$

После решения системы (9)–(10) получим выражения трансформант для компонент температурного поля и напряженно-деформированного состояния оболочки:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{1,2}(\xi, \eta, s) &= \sum_{i=1}^2 b'_{i,i+2} \frac{1}{\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + s + a_i}, \quad \tilde{u} = \frac{i}{\Delta} [(P_1 + P_2) \tilde{T}_1 + P_3 \tilde{T}_2]; \\ \tilde{v} &= \frac{i}{\Delta} [(P_4 + P_5) \tilde{T}_1 + P_6 \tilde{T}_2]; \quad \tilde{w} = \frac{1}{\Delta} [P_7 \tilde{T}_1 + P_8 \tilde{T}_2] \end{aligned} \quad (11)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{1}{2} \left\{ (4\mu_1 + 3) \mp \sqrt{(4\mu_1 + 3)^2 - 4\mu_0} \right\}; \quad \mu_0 = 3(\mu_1 + \mu_1^2 - \mu_2\mu_3); \quad \Delta = P_9 + P_{10}; \\ b'_{i,i+2} &= \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \left\{ s_{1,2} \tilde{W}'_{L1}(\xi, \eta, s) - s_{2,2} \tilde{W}'_{L2}(\xi, \eta, s) \right\} \times \sum_{k=0}^{m-1} [S_+(\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)) - S_+(\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2)]; \\ s_{1,2} &= (3(1 + \mu_1) - a_i); \quad s_{2,1} = 3\mu_3; \quad s_{1,2} = (3\mu_1 - a_i); \quad s_{2,2} = 3\mu_2; \\ P_1 &= p_{11}\xi^7 + p_{12}\xi^5\eta^2 + p_{13}\xi^3\eta^4 + p_{14}\xi\eta^6, \quad P_2 = p_{21}\xi^3 + p_{22}\xi\eta^2, \\ P_3 &= p_{31}\xi^5 + p_{32}\xi^3\eta^2 + p_{33}\xi\eta^4, \quad P_4 = p_{41}\xi^6\eta + p_{42}\xi^4\eta^3 + p_{43}\xi^2\eta^5 + p_{44}\eta^7, \\ P_5 &= p_{51}\xi^2\eta + p_{52}\eta^3, \quad P_6 = p_{61}\xi^4\eta + p_{62}\xi^2\eta^3 + p_{63}\eta^5, \\ P_7 &= p_{71}\xi^4 + p_{72}\xi^2\eta^2 + p_{73}\eta^4, \quad P_8 = p_{81}\xi^6 + p_{82}\xi^4\eta^2 + p_{83}\xi^2\eta^4 + p_{84}\eta^6, \\ P_9 &= p_{91}\xi^8 + p_{92}\xi^6\eta^2 + p_{93}\xi^4\eta^4 + p_{94}\xi^2\eta^6 + p_{95}\eta^8, \quad P_{10} = p_{101}\xi^4 + p_{102}\xi^2\eta^2 + p_{103}\eta^4. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= D_1 B F_1, \quad p_{12} = D_1 A_2 F_1 + D_1 B J - B_1 D_2 F_1, \quad p_{13} = D_1 A_2 J + D_1 B F_2 - B_1 D_2 J, \quad p_{14} = D_1 A_2 F_2 - \\
 &- B_1 D_2 F_2, \quad p_{21} = D_1 B O - C_1 B P, \quad p_{22} = D_1 A_2 O + C_1 D_2 L_2 + B_1 C_2 P - C_1 A_2 P - D_1 C_2 L_2 - B_1 D_2 O, \\
 p_{31} &= -C_1 B R_1, \quad p_{32} = B_1 C_2 R_1 - C_1 A_2 R_1 - C_1 B R_2, \quad p_{33} = B_1 C_2 R_2 - C_1 A_2 R_2, \quad p_{41} = D_2 A_1 F_1 - \\
 &- B_2 D_1 F_1, \quad p_{42} = D_2 A_1 J + D_2 B F_1 - B_2 D_1 J, \quad p_{43} = D_2 A_1 F_2 + D_2 B J - B_2 D_1 F_2, \quad p_{44} = D_2 B F_2, \\
 p_{51} &= D_2 A_1 O + C_2 D_1 L_1 + B_2 C_1 P - C_2 A_1 P - D_2 C_1 L_1 - B_2 D_1 O, \quad p_{52} = D_2 B O - C_2 B P, \quad p_{61} = B_2 C_1 R_1 - \\
 &- C_2 A_1 R_1; \quad p_{62} = B_2 C_1 R_2 - C_2 A_1 R_2 - C_2 B R_1, \quad p_{63} = -C_2 B R_2, \quad p_{71} = A_1 B P - D_1 B L_1, \\
 p_{72} &= A_2 A_1 P + B_2 D_1 L_2 + B^2 P + B_1 D_2 L_1 - D_2 A_1 L_2 - D_1 A_2 L_1 - B_2 B_1 P, \quad p_{73} = A_2 B P - D_2 B L_2, \\
 p_{81} &= A_1 B R_1, \quad p_{82} = A_2 A_1 R_1 + B A_1 R_2 + B^2 R_1 - B_2 B_1 R_1, \quad p_{83} = A_2 A_1 R_2 + B A_2 R_1 + B^2 R_2 - B_2 B_1 R_2, \\
 p_{84} &= A_2 B R_2, \quad p_{91} = A_1 B F_1, \quad p_{92} = A_2 A_1 F_1 + B A_1 J + B^2 F_1 - B_2 B_1 F_1, \quad p_{93} = A_2 A_1 J + B A_1 F_2 + \\
 &+ B A_2 F_1 + B^2 J - B_2 B_1 J, \quad p_{94} = A_2 A_1 F_2 + B A_2 J + B^2 F_2 - B_2 B_1 F_2, \quad p_{95} = A_2 B F_2, \quad p_{101} = A_1 B O - C_1 B L_1, \\
 p_{102} &= A_2 A_1 O + B_2 C_1 L_2 + B^2 O + B_1 C_2 L_1 - C_2 A_1 L_2 - C_1 A_2 L_1 - B_2 B_1 O, \quad p_{103} = A_2 B O - C_2 B L_2.
 \end{aligned}$$

Применяя к выражениям (8) преобразования Фурье и Лапласа, получаем трансформанты для усилий, моментов и перерезывающих сил:

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_j &= A_j \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} (P_{Nj1} + P_{Nj2}) - d_j \right] \tilde{T}_1 + \frac{1}{\Delta} P_{Nj3} \tilde{T}_2 \right\}; \quad \tilde{S} = B \frac{1}{\Delta} \{ P_{S1} + P_{S2} \} \tilde{T}_1 + P_{S3} \tilde{T}_2 \}; \\
 \tilde{M}_j &= F_j \left\{ \frac{1}{\Delta} P_{Mj1} \tilde{T}_1 + \left[\frac{1}{\Delta} P_{Mj2} - d_j \right] \tilde{T}_2 \right\}; \quad \tilde{H} = B \frac{2}{3\Delta} \{ P_{H1} \tilde{T}_1 + P_{H2} \tilde{T}_2 \}; \\
 \tilde{Q}_j &= (-i) \left\{ F_j \left[\frac{1}{\Delta} P_{Qj1} \tilde{T}_1 + \left[\frac{1}{\Delta} P_{Qj2} - d_j \left(\frac{\xi}{\eta} \right) \right] \tilde{T}_2 \right] + B \frac{2}{3\Delta} \{ P_{Qj3} \tilde{T}_1 + P_{Qj4} \tilde{T}_2 \} \right\}, \quad j = \overline{1,2},
 \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 P_{N11} &= \xi P_1 + v_2 \eta P_4, \quad P_{N12} = \xi P_2 + v_2 \eta P_5 + c_1 P_7, \quad P_{N13} = \xi P_3 + v_2 \eta P_6 + c_1 P_8, \\
 P_{N21} &= v_1 \xi P_1 + \eta P_4, \quad P_{N22} = v_1 \xi P_2 + \eta P_5 + c_2 P_7, \quad P_{N23} = v_1 \xi P_3 + \eta P_6 + c_2 P_8, \quad P_{S1} = \xi P_4 + \eta P_1, \\
 P_{S2} &= \xi P_5 + \eta P_2, \quad P_{S3} = \xi P_6 + \eta P_3, \quad P_{M11} = (\xi^2 + v_2 \eta^2) P_7, \quad P_{M12} = (\xi^2 + v_2 \eta^2) P_8, \\
 P_{M21} &= (v_1 \xi^2 + \eta^2) P_7, \quad P_{M22} = (v_1 \xi^2 + \eta^2) P_8, \quad P_{H1} = \xi \eta P_7, \quad P_{H2} = \xi \eta P_8, \\
 P_{Q11} &= \xi (\xi^2 + v_2 \eta^2) P_7, \quad P_{Q12} = \xi (\xi^2 + v_2 \eta^2) P_8, \quad P_{Q13} = \xi \eta^2 P_7, \quad P_{Q14} = \xi \eta^2 P_8, \\
 P_{Q21} &= \eta (v_1 \xi^2 + \eta^2) P_7, \quad P_{Q22} = \eta (v_1 \xi^2 + \eta^2) P_8, \quad P_{Q23} = \xi^2 \eta P_7, \quad P_{Q24} = \xi^2 \eta P_8.
 \end{aligned}$$

Выражения (11)–(12) – решение искомой задачи в пространстве трансформант. Применяя к (11)–(12) формулы обращения для преобразований Фурье и Лапласа, находим выражения для оригиналов исходных функций.

Методика вычисления оригиналов для температуры и температурного момента, а также компонент напряженно-деформированного состояния оболочки детально описана в работах [1, 8].

Приведем лишь полученные оригиналы для температуры, температурного момента, мембранных усилий и изгибающих моментов. Они имеют вид

$$T_{1,2}(x', y', \tau') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \sum_{i=1}^2 b'_{i,i+2} \sum_{k=0}^{m-1} [S_+(\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)) \int_0^{\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)} \text{Int} \, d\tau_0 - S_+(\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2) \int_0^{\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2} \text{Int} \, d\tau_0],$$

$$\begin{aligned}
N_j(x', y', \tau') &= -A_j \left\{ \sum_{i=1}^2 b_i [\operatorname{Im}(G(N_{j3}) - G(N_{j1})) - GT(N_{j3})] + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \operatorname{Re}(G(N_{j2})) + d_j T_1 \right\}; \\
M_j(x', y', \tau') &= -F_j \left\{ \sum_{i=1}^2 b_i \operatorname{Re}(G(M_{j2})) + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} [\operatorname{Im}G(M_{j3}) - GT(M_{j3})] + d_j T_1 \right\}, \quad j = \overline{1, 2}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\varphi \cdot L(z, 0); \\
L(z, \beta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i)^{(n+l)}}{4^{(n+l)} l! (2n+l+\beta)!} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \left([(c + \ln i) \tau_{1\beta} + \tau_{2\beta}] t_1(z) + \tau_{1\beta} t_2(z) + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-i)^q}{qq!} \tau_{3\beta} t_3(z) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{n+l} \frac{(m-1)!}{(-i)^m} \tau_{4\beta} t_4(z) \right\}; \\
GT(z) &= \frac{1}{2} \int_0^{\tau'} e^{-a_i \tau_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} e^{-\frac{r^2}{4\tau_0 t}} \frac{d\theta d\tau_0}{\tau_0} - 4 \cos 2\varphi \int_0^{\tau'} \frac{e^{-a_i \tau_0}}{r^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} \gamma \left(2, \frac{r^2}{4\tau_0 t} \right) \cos 2\theta d\theta d\tau_0 - \\
&\quad - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cos 2n\varphi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{4^{(n+l)} l! (2n+l)!} \int_0^{\tau'} \ln \tau_0 \frac{d^{n+l+1} (r^{2(n+l)} e^{-a_i \tau_0})}{d\tau_0^{n+l+1}} d\tau_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} t^{-(n+l+1)} \cos 2n\theta d\theta; \\
t_1(z) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+l+p+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+l+p+k}{2}} \theta(z) t^p d\theta; \quad t_2(z) = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} t \right) \theta_{10}^{\frac{n+l+p+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+l+p+k}{2}} \theta(z) t^p d\theta; \\
t_3(z) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+l+p+q+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+l+p+q+k}{2}} \theta(z) t^{p+q} d\theta; \quad t_4(z) = \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+l-m+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+l-m+k}{2}} \theta(z) t^{-m} d\theta; \\
\tau_{1\beta} &= \int_0^{\tau'} r^{2(n+l)+\beta} \tau_0^p e^{-a_i \tau_0} d\tau_0; \quad \tau_{2\beta} = \int_0^{\tau'} \ln(\tau_0) r^{2(n+l)+\beta} \tau_0^p e^{-a_i \tau_0} d\tau_0; \\
\tau_{3\beta} &= \int_0^{\tau'} r^{2(n+l)+\beta} \tau_0^{p+q} e^{-a_i \tau_0} d\tau_0; \quad \tau_{4\beta} = \int_0^{\tau'} r^{2(n+l)+\beta} \tau_0^{-m} e^{-a_i \tau_0} d\tau_0; \\
\theta(N_{j1}) &= [(\sigma_{1j} p_{21} + c_j p_{71}) \cos^4 \theta + (\sigma_{1j} p_{22} + \sigma_{2j} p_{51} + c_j p_{72}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad + (\sigma_{2j} p_{52} + c_j p_{73}) \sin^4 \theta] \cos 2n\theta, \\
\theta(N_{j2}) &= [(\sigma_{1j} p_{31} + c_j p_{81}) \cos^6 \theta + (\sigma_{1j} p_{32} + \sigma_{2j} p_{61} + c_j p_{82}) \cos^4 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad + (\sigma_{1j} p_{33} + \sigma_{2j} p_{62} + c_j p_{83}) \cos^2 \theta \sin^4 \theta + (\sigma_{2j} p_{63} + c_j p_{84}) \sin^6 \theta] \cos 2n\theta, \\
\theta(M_{j2}) &= [\sigma_{1j} p_{71} \cos^6 \theta + (\sigma_{1j} p_{72} + \sigma_{2j} p_{71} 7) \cos^4 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad + (\sigma_{1j} p_{73} + \sigma_{2j} p_{72}) \cos^2 \theta \sin^4 \theta + \sigma_{2j} p_{73} \sin^6 \theta] \cos 2n\theta, \\
\theta(M_{j3}) &= [\sigma_{1j} p_{81} \cos^8 \theta + (\sigma_{1j} p_{82} + \sigma_{2j} p_{81}) \cos^6 \theta \sin^2 \theta + (\sigma_{1j} p_{83} + \sigma_{2j} p_{82}) \cos^4 \theta \sin^4 \theta + \\
&\quad + (\sigma_{1j} p_{84} + \sigma_{2j} p_{83}) \cos^2 \theta \sin^6 \theta + \sigma_{2j} p_{84} \sin^8 \theta] \cos 2n\theta, \\
r^2 &= (x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y'(\tau' - \tau_0))^2,
\end{aligned}$$

$$Int = \exp \left(-k_0 \left[\frac{(x' - x'(\tau' - \tau_0))^2}{4k_0\tau_0\lambda_1 + 1} + \frac{(y' - y'(\tau' - \tau_0))^2}{4k_0\tau_0\lambda_2 + 1} \right] \right) \frac{\exp(-a_i\tau_0)}{\sqrt{(1 + 4k_0\lambda_1\tau_0)(1 + 4k_0\lambda_2\tau_0)}};$$

$$b'_i = \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \{s_{11}W_1^0 - s_{21}W_2^0\}; \quad b'_{i+2} = \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \{s_{12}W_2^0 - s_{22}W_1^0\}$$

$$s_{11} = (3(1 + \mu_1) - a_i); \quad s_{21} = 3\mu_3; \quad s_{12} = (3\mu_1 - a_i); \quad s_{22} = 3\mu_2.$$

Выражения (13) – оригиналы для усилий и моментов оболочки.

Числовые результаты. Рассмотрим случай, когда источник тепла движется вдоль оси x' с постоянной скоростью v' (c^{-1}). Введем подвижную систему координат: $x'_1 = x' - v'\tau'$, $y'_1 = y'$. Тогда в выражениях (13) – $r^2 = (x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y'(\tau' - \tau_0))^2 = (x'_1 + v'\tau_0)^2 + y_1'^2$.

Для численных исследований влияния ортотропии на напряженно-деформированное состояние оболочки рассматривался стеклопластик косоугольной намотки, имеющий сильную анизотропию. Он имеет такие термомеханические свойства: $E_1 = 3,673 \cdot 10^3$ МПа, $E_2 = 9,807 \cdot 10^2$ МПа, $G_{12} = 3,923 \cdot 10^2$ МПа, $\nu_1 = 0,2798$, $\nu_2 = 0,0747$, $\alpha_1 = 0,7 \cdot 10^{-5} K^{-1}$, $\alpha_2 = 3,8 \cdot 10^{-5} K^{-1}$, $a_{11} = 2,79 \cdot 10^{-7} m^2/c$, $a_{22} = 1,21 \cdot 10^{-7} m^2/c$, где $a_{ii} = \lambda_{ii}/c\rho$ – коэффициенты температуропроводности вдоль главных направлений. Пусть $\lambda_{33} = \lambda_{22}$, тогда $\lambda_1 = 2,306$, $\lambda_2 = 1$.

При проведении численных расчетов в качестве изотропного материала рассматривался свинец: $E_1 = E_2 = 6,3 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = E_1/(2(1 + \nu_1))$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,42$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2,9 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

На рис. 1–3 представлены графики зависимости мембранных усилий N_1 и N_2 от координаты x' , ($y' = 0$) для момента времени $\tau' = 1$ при действии на оболочку движущегося со скоростью $v' = 1$ импульсного локального источника средней температуры ($W_1^0 = 1$, $W_2^0 = 0$). Сплошные линии соответствуют N_1 , штриховые – N_2 . Рассматривалась сферическая оболочка ($k_1 = k_2 = 0,025$), симметричный теплообмен ($Bi^\pm = 0,1$). Мембранные усилия представлены в масштабе $N_1 \cdot 10^7$ и $N_2 \cdot 10^7$.

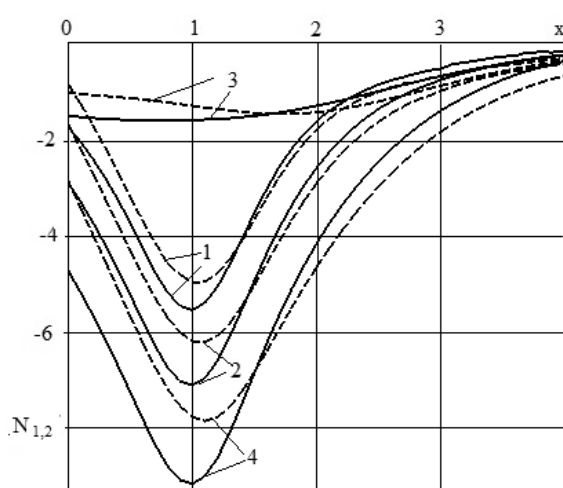


Рис. 1

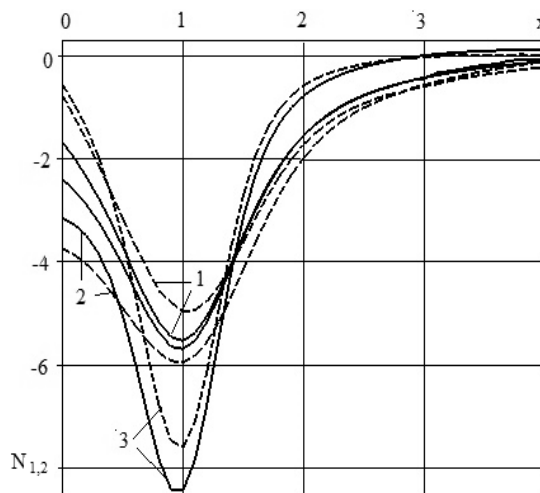


Рис. 2

На рис. 1 представлены графики зависимости мембранных усилий N_1 и N_2 для ортотропного материала при $\varphi=0$ (вдоль оси x) (кривые 1) и $\varphi=\pi/2$ (вдоль оси y) (кривые 2). Кривые 3 соответствуют изотропному материалу. Рассматривался случай действия импульсного локального источника тепла: $\tau_1=0,1$, $\tau_2=0,2$, $m=4$, $k_0=10$.

Из рисунка видно, что распределение усилий существенно зависит от ортотропных свойств материала оболочки.

На рис. 2 приведены графики распределения мембранных усилий N_1 и N_2 для ортотропного материала при $\varphi=0$ и $k_0=10$ в зависимости от характера импульсного воздействия. Кривые 1 соответствуют случаю $\tau_1=0,1$, $\tau_2=0,2$, $m=4$, кривые 2 – $\tau_1=0,2$, $\tau_2=0,2$, $m=3$, кривые 3 – $\tau_1=0,2$, $\tau_2=0,3$, $m=2$. Кривые 4 соответствуют действию непрерывного локального источника тепла.

Из рис. 2 видно, что распределение усилий существенно зависит от характера нагрева оболочки. При импульсном нагреве – от продолжительности импульса, продолжительности паузы и количества пауз.

На рис. 3 приведены графики распределения мембранных усилий N_1 и N_2 для ортотропного материала при $\varphi=0$ и $\tau_1=0,1$, $\tau_2=0,2$, $m=4$ в зависимости от формы локального источника. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют случаям $k_0=10$, 50 и 100.

Из рис. 3 видно, что форма локального источника тепла оказывает существенное влияние на распределение усилий в оболочке.

Таким образом, исследования показали, что при определении мембранных усилий в ортотропных оболочках, находящихся под действием импульсного локального источника тепла, необходимо учитывать форму источника тепла, характер импульсного воздействия (т. е. продолжительность действия импульса, продолжительность паузы и количество пауз), а также ортотропные свойства материала оболочки.

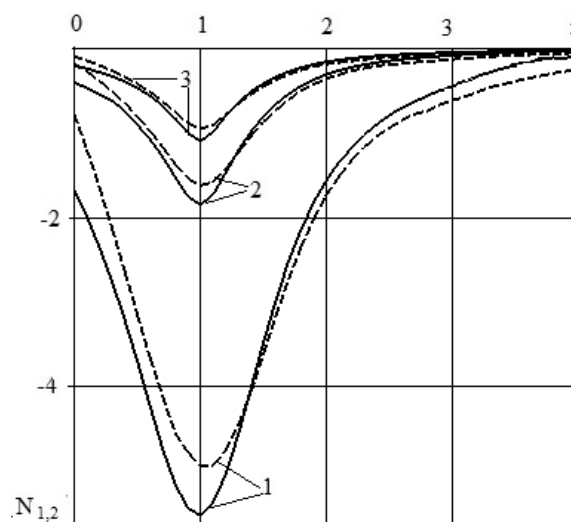


Рис. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авраменко Л. Е. Теплопроводность и термоупругость тонких изотропных оболочек при импульсном нагреве движущимся источником тепла / Л. Е. Авраменко, В. П. Шевченко // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, № 11. – С. 85–92.
2. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – К.: Наук. думка. 1975. – 302 с.
3. Подстригач Я. С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
4. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. – К.: Наук. думка, 1978. – 343 с.
5. Levin P. A general solution 3-D quasi – steady – state problem of a moving heat source on a semi – infinite solid / P. Levin // Mechanics research communications. – USA, 2007. – P. 151–157.
6. Температурные напряжения и деформации в оболочках вращения средней толщины из функционально-градиентного материала при термическом импульсном нагружении / Takezono Shigeo, Tao Katsumi, Inamura Eijiroh, Ozawa Yoshihiro // Nihon Kikai gakkai ronbunshu. A. – 2000. – Vol. 66, N 645. – P. 1060–1067.

7. Коляно Ю. М. Температурные напряжения от объемных источников / Ю. М. Коляно, А. Н. Кулик – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
8. Авраменко Л. Е. Термопружність ортотропних оболонок під дією рухомого зосередженого джерела тепла / Л. Е. Авраменко, В. П. Шевченко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – Т. 52, № 2. – С. 138–151.
9. Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
10. Рыкалин Н.Н. Тепловые процессы при сварке / Н.Н. Рыкалин. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – № 2. – 290 с.
11. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963. – 253 с.
12. Шевченко В.П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек / В.П. Шевченко // Концентрация напряжений – К.: А.С.К., 1998. – 387 с.
13. Шевченко В. П. Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек: учебное пособие. – Донецк: Изд-во Донецкого ун-та, 1977. – 114 с.
14. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Учебное пособие. / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
15. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Иностранная литература, 1955. – 667 с.

Поступила в редакцию 22.08.2018 г.

STRESS-STRAIN STATE OF THERMOELASTIC ORTHOTROPIC SHELLS UNDER THE ACTION OF A MOVING IMPULSIVE LOCAL HEAT SOURCE.

L.E. Avramenko

The problem of thermoelasticity for a thin orthotropic shells non-negative curvature is solved at action moving on a surface of a shell of the local impulsive source of heat. Linear distribution of temperature on thickness of a shell and convection heat exchange under the law of Newton from its lateral surfaces was supposed. With the help of integrated transformations Fourier and Laplace the decision in an analytical kind is received. The influence of thermomechanical characteristics of the material, the shape of the heat source and the nature of the impulsive effect on the distribution of forces in the shell is studied.

Keywords: orthotropic shell, integrated transformations, impulsive source, thermoelasticity.

Авраменко Лилия Евгеньевна

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной механики
и компьютерных технологий ГОУ ВПО
«Донецкий национальный университет»
e-mail: liliya.avramenko@list.ru

Avramenko Liliya Evgenievna

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Applied
Mechanics and Computer Technologies,
Donetsk National University

УДК 539.3:534.1

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О РАВНОВЕСИИ И КОЛЕБАНИЯХ ИЗОТРОПНЫХ ПОПЕРЕЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ ПЛИТ

© 2018. *Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко*

Анализу метода однородных решений в краевых задачах трехмерной теории упругости однородных плит посвящена первая часть обзора. Вторая часть данной работы содержит обзор исследований выполненных для неоднородных по толщине плит с применением метода однородных решений.

Ключевые слова: неоднородные по толщине плиты, функционально-градиентные материалы, двухслойные и трехслойные плиты, краевые задачи трехмерной теории упругости, метод однородных решений, спектральные задачи, дисперсионные уравнения, спектры нормальных волн.

Введение. Функционально-градиентные материалы (ФГМ, FGM – functionally graded materials) отличаются от однородных резким изменением физических свойств и благодаря этому находят широкое применение. Пластины из ФГМ часто используются в качестве деталей машин и механизмов, элементов современных конструкций. Модели многослойных оснований применяются, например, в механике композитов и горных пород, геофизике и сейсмологии. Слоистые покрытия защищают конструкции от тепловых воздействий и коррозии, демпфируют колебания, обеспечивают звукоизоляцию. Широкое применение неоднородных пластин требует создания новых и развитие известных методов их расчета. В обзорных статьях [1–39] и монографиях [40–87] отражены исследования в области создания ФГМ с заданными свойствами и развития методов расчета элементов конструкций из неоднородных материалов на прочность и устойчивость. Данные и другие публикации, например, [88–174] свидетельствуют о том, что большинство научных результатов получено с помощью приближенных теорий.

В настоящее время развиваются приближенные теории поперечно-неоднородных пластин, каждая из которых основывается на определенной системе гипотез. Однако область применения приближенных теорий ограничена, и для плит произвольной толщины они не позволяют описать с достаточной точностью картину напряженно-деформированного состояния. Поэтому актуальным является построение точных аналитических решений пространственных задач о равновесии и колебаниях упругих плит из ФГМ (поперечно-неоднородных, слоистых) на основе уравнений трехмерной теории упругости.

В связи со сложностью использования трехмерных теорий расчета слоистых конструкций возникла необходимость построения приближенных теорий, развитых в работах [40, 42, 45, 49, 52, 54, 55, 57, 60, 61, 63–66, 71, 73, 74, 77–87, 93, 94, 96, 100–103, 108, 109, 116–144, 148–153, 155–161, 165–168, 170, 171] и других авторов. Общая идея методов построения приближенных теорий неоднородных пластин заключается в аппроксимации некоторых из величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние, в виде конечных рядов по поперечной координате. При этом построенные приближенные теории не содержат регулярного процесса уточнения, а просто заменяют решение трехмерной задачи решением некоторой двумерной.

Для построения двумерных моделей теории слоистых пластин широкое применение нашел метод гипотез [40, 42, 45, 66, 71, 94, 100, 101, 123, 159]. При использовании метода гипотез к решению уравнений многослойных пластин существует два направления: кинематические гипотезы применяются для каждого слоя в отдельности [55, 71, 100, 101, 103, 138, 156] (обобщение этого направления дано в монографии [45]), гипотезы вводятся для всего пакета слоев в целом [159 и др.].

Применение метода гипотез для слоистых плит дает значительные погрешности и не позволяет адекватно описать картину напряженно-деформированного состояния, поэтому, наряду с методом гипотез, применяются другие, например, асимптотический метод [102, 108, 109, 132]. Преимущество асимптотического метода перед методом гипотез заключается в

возможности последовательно повышать точность решения рассматриваемых задач. В работе [132] применялись итерационные процессы асимптотического интегрирования к уравнениям равновесия слоистых пластин. Асимптотическим методом в работах [108, 109] исследуются колебания трехслойных пластин.

Наряду с указанными методами построения двумерных моделей применяется метод И.Н. Векуа, который заключается в разложении искомым величин, в частности, перемещений в ряды по полиномам А.М. Лежандра. Он отражен в работах [7, 49, 93, 137, 142] и др. В работе [142] метод полиномов А.М. Лежандра применяется для моделирования волн в многослойных пластинах.

Для решения задач равновесия и колебаний многослойных пластин с произвольной формой плана и различными способами закрепления применяется приближенный аналитический метод R-функций, который базируется на вариационной постановке задачи. С помощью этого метода система базисных функций, точно удовлетворяющих всем необходимым граничным условиям, строится в аналитическом виде для любого вида заданной области и любого типа граничных условий. В монографиях [57, 72] при помощи метода R-функций были исследованы задачи о колебаниях многослойных пластин.

Количество приближенных теорий чрезвычайно велико и невозможно построить универсальную прикладную теорию, которая давала бы приемлемые результаты для всех характеристик напряженно-деформированного состояния тела. Результаты, полученные на основе приближенных теорий, требуют обоснования и оценки. Это может быть сделано на основе точного решения трехмерных задач теории упругости.

Различные вопросы развития пространственной теории упругости неоднородного тела и решение конкретных задач нашли отражение в монографиях [41, 43, 44, 48, 50, 51, 53, 56, 58, 61, 62, 67, 70, 73, 75, 76, 78, 81] и других. Основные результаты научных исследований, относящиеся к проблемам равновесия и установившихся колебаний поперечно-неоднородных трехмерных тел, систематизированы в обзорных статьях [1, 13, 20, 21, 24, 29, 38].

К распространенным аналитическим методам решения трехмерных задач теории упругости неоднородных пластин относятся следующие: однородных решений [13, 24, 41, 51, 56, 75, 91, 95, 97, 107, 110–115, 172–174], начальных функций [48, 88, 90, 92, 97], интегральных уравнений и преобразований [44, 62, 64, 89], рекуррентных соотношений [62, 76, 104–106, 149], функций податливости [68, 69, 89], матричный [61, 76, 144], вариационные [145, 161].

Важную роль в приведении пространственных задач статики и динамики поперечно-неоднородных пластин к двумерным сыграли однородные решения [13, 41, 56, 75, 91, 95, 97, 107, 110–115, 172–174].

Впервые однородные решения в задаче изгиба трехслойной плиты симметричного строения были получены в работе [174]. Предполагалось, что внешние плоские грани пластины свободны от усилий, а на границе раздела слоев выполняются условия идеального контакта. Как и в случае однородной плиты, показано, что однородные решения состоят из бигармонического, потенциального и вихревого состояний. Установлено, что потенциальное и вихревое решения носят характер краевого эффекта, который зависит от физических и геометрических параметров трехслойной пластины. На основе полученного решения дан анализ точности некоторых прикладных теорий и установлены пределы их применимости. В работах [56, 114] получены однородные решения в задаче растяжения-сжатия трехслойной пластины в случае свободных от усилий плоских граней.

Применению однородных решений для определения напряженного состояния многосвязных трехслойных пластин посвящены работы [95, 97, 112–114]. С использованием однородных решений в работе [95] изучена концентрация напряжений в трехслойной пластине средней толщины с круговым отверстием. Задачи изгиба трехслойных плит, ослабленных различным количеством цилиндрических полостей, рассмотрены в работах [97, 112]. В статье [114] однородные решения применяются к исследованию концентрации напряжений в трехслойной неограниченной пластине с поперечной цилиндрической полостью.

В работах [91, 110] дается обобщение метода однородных решений на непрерывно-неоднородные по толщине плиты (многослойные плиты рассматриваются как частный случай). Считается, что материал плиты определяется упругими параметрами Г. Ляме, которые являются

кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты. В данных работах получены и исследованы однородные решения. Показано, что внутреннее напряженное состояние пластины определяется двумя бигармоническими функциями, одна из которых эквивалентна обобщенной плоской задаче теории упругости, вторая – задаче изгиба. Напряженное состояние краевого эффекта определяется потенциальным и вихревым решениями. Рассмотрена задача для неоднородной плиты при заданных на цилиндрической поверхности напряжениях. Асимптотическим методом задача сведена к решению двух последовательностей бигармонических проблем. Показано, что на границе плиты напряженное состояние краевого эффекта имеет тот же порядок, что и бигармоническое. В первом приближении сформулирована асимптотически точная прикладная теория. Исследованию полноты однородных решений неоднородных по толщине плит, обобщенной ортогональности собственных функций и дискретности собственных значений посвящены работы [75, 110, 111, 172].

В работах [51, 75, 173] исследованы спектры вихревого и потенциального состояний однородных решений в задачах о гармонических колебаниях пластины, упругие характеристики которой являются кусочно-непрерывными функциями. Дано математическое описание множества мод, соответствующих кратному волновому числу. Показано, что наряду с вихревым и потенциальным решениями на критических частотах существует присоединенное.

Анализ опубликованных к настоящему времени научных результатов показывает, что в рамках метода однородных решений большинство выполненных исследований соответствует случаю, когда плоские грани пластины свободны от усилий. Наряду с этим в поперечно-неоднородных (слоистых) пластинах исследования ограничены идеальным контактом слоев.

Данная работа является продолжением обзорной статьи [3] и содержит краткий анализ результатов, полученных в работах [41, 175–202] для неоднородных плит на основе метода однородных решений.

1. Колебания двухслойных пластин. В работах [41, 184, 187, 188, 192, 193, 201] рассмотрены краевые задачи пространственной теории упругости о колебаниях упругих двухслойных плит. Методом однородных решений трехмерные задачи приведены к счетному множеству двумерных. Многообразие рассматриваемых здесь задач обусловлено видом граничных условий на плоских гранях и контактирующих плоскостях слоев пластины. Особое внимание уделено численному исследованию характеристик волнового процесса на основе исследования полученных дисперсионных уравнений.

1.1. Постановка и однородные решения краевых задач для двухслойных пластин с неоднородными слоями. Рассматриваются гармонические колебания пластины, состоящей из двух изотропных слоев толщиной h_m ($m=1,2$ – номер слоя). Упругие характеристики материалов слоев $\nu_m(\tilde{x}_3)$, $\tilde{G}_m(\tilde{x}_3)$ и плотности $\tilde{\rho}_m(\tilde{x}_3)$ являются кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты $\tilde{x}_3$. Система уравнений движения каждого слоя в безразмерных величинах имеет вид

$$G_m \nu_{m0} \partial_j \theta_m + G_m \nabla^2 u_{mj} + \frac{1}{\lambda} G'_m \left(\partial_j u_{m3} + \frac{1}{\lambda} \partial_3 u_{mj} \right) + \frac{\Omega_m^2}{\lambda^2} \rho_m u_{mj} = 0 \quad (j=1,2),$$

$$\frac{1}{\lambda} G_m \nu_{m0} \partial_3 \theta_m + G_m \nabla^2 u_{m3} + \frac{2}{\lambda^2} G'_m \partial_3 u_{m3} + \frac{2}{\lambda} \nu_{m0} (\nu'_m \nu_{m0} G_m + \nu_m G'_m) \theta_m + \frac{\Omega_m^2}{\lambda^2} \rho_m u_{m3} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь используются обозначения принятые в монографии [41].

Слой пластины находится в условиях идеального

$$u_{mi}(x_1, x_2, 0) = u_{mi}(x_1, x_2, 0) \quad (i=\overline{1,3}), \quad \sigma_{1i3}(x_1, x_2, 0) = \sigma_{2i3}(x_1, x_2, 0), \quad (1.2)$$

или скользящего контакта

$$u_{13}(x_1, x_2, 0) = u_{23}(x_1, x_2, 0), \quad \sigma_{133}(x_1, x_2, 0) = \sigma_{233}(x_1, x_2, 0),$$

$$\sigma_{m13}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \sigma_{m23}(x_1, x_2, 0) = 0. \quad (1.3)$$

На плоских гранях пластины ($x_3 = \lambda_1$ и $x_3 = -\lambda_2$) имеет место одно из следующих однородных граничных условий:

$$\sigma_{1i3}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad \sigma_{2i3}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \quad (1.4) \quad u_{1i}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad u_{2i}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \quad (1.5)$$

$$u_{13}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad \sigma_{1j3}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad u_{23}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0, \quad \sigma_{2j3}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \quad (1.6)$$

$$\sigma_{133}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad u_{1j}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad \sigma_{233}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0, \quad u_{2j}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \quad (1.7)$$

$$\sigma_{1i3}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad u_{2i}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \quad (1.8)$$

$$\sigma_{1i3}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad u_{23}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0, \quad \sigma_{2j3}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \quad (1.9)$$

$$\sigma_{1i3}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad \sigma_{233}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0, \quad u_{2j}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \quad (1.10)$$

$$u_{13}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad \sigma_{1j3}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad u_{2i}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \quad (1.11)$$

$$\sigma_{133}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad u_{1j}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad u_{2i}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \quad (1.12)$$

$$\sigma_{133}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad u_{1j}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0, \quad u_{23}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0, \quad \sigma_{2j3}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0. \quad (1.13)$$

Построение однородных решений сводится к интегрированию системы уравнений движения (1.1) в каждом слое с учетом сочетания одного из условий контакта слоев (1.2), (1.3) с одним из условий на плоских гранях (1.4)–(1.13).

В соответствии с полуобратным методом [203, 204] однородные решения системы уравнений (1.1) представляются в виде суммы вихревого и потенциального состояний

$$\begin{Bmatrix} u_{m1}(x_1, x_2, x_3) \\ u_{m2}(x_1, x_2, x_3) \\ u_{m3}(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_m(x_3) \partial_2 B(x_1, x_2) \\ -p_m(x_3) \partial_1 B(x_1, x_2) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n_m(x_3) \partial_1 C(x_1, x_2) \\ n_m(x_3) \partial_2 C(x_1, x_2) \\ q_m(x_3) C(x_1, x_2) \end{Bmatrix}. \quad (1.14)$$

В выражениях (1.14) функции $B(x_1, x_2)$, $C(x_1, x_2)$ удовлетворяют метагармоническим уравнениям

$$D^2 B(x_1, x_2) - (\delta/\lambda)^2 B(x_1, x_2) = 0, \quad D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma/\lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0. \quad (1.15)$$

После подстановки выражений (1.14) в системы уравнений (1.1) получаем следующие дифференциальные уравнения относительно функций $p_m(x_3)$ и $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$

$$(G_m p'_m)' + (\delta^2 G_m + \rho_m \Omega_m^2) p_m = 0; \quad (1.16)$$

$$(G_m n'_m)' + (\rho_m \Omega_m^2 + (1 + \nu_{m0}) \gamma^2 G_m) n_m + \lambda (G'_m q_m + G_m \nu_{m0} q'_m) = 0,$$

$$((1 + \nu_{m0}) G_m q'_m)' + (\rho_m \Omega_m^2 + \gamma^2 G_m) q_m + \frac{\gamma^2}{\lambda} (2(\nu_{m0} \nu_{m0} G'_m)' n_m + G_m \nu_{m0} n'_m) = 0. \quad (1.17)$$

где δ , γ – константы разделения переменных.

С целью получения краевых условий для функций $p_m(x_3)$ подставим выражения (1.14) в граничные условия (1.2), (1.3) и (1.4)–(1.13). Из условий контакта слоев (1.2), (1.3) следует:

$$p_1(0) = p_2(0), \quad G_1(0) p'_1(0) = G_2(0) p'_2(0); \quad (1.18) \quad p'_1(0) = 0, \quad p'_2(0) = 0. \quad (1.19)$$

Граничные условия на плоских гранях (1.4)–(1.13) эквивалентны следующим

$$p'_1(\lambda_1) = 0, \quad p'_2(-\lambda_2) = 0; \quad (1.20) \quad p_1(\lambda_1) = 0, \quad p_2(-\lambda_2) = 0; \quad (1.21)$$

$$p'_1(\lambda_1) = 0, \quad p_2(-\lambda_2) = 0; \quad (1.22) \quad p_1(\lambda_1) = 0, \quad p_2(-\lambda_2) = 0; \quad (1.23)$$

$$p'_1(\lambda_1) = 0, \quad p'_2(-\lambda_2) = 0; \quad (1.24) \quad p'_1(\lambda_1) = 0, \quad p'_2(-\lambda_2) = 0; \quad (1.25)$$

$$p'_1(\lambda_1) = 0, \quad p_2(-\lambda_2) = 0; \quad (1.26) \quad p'_1(\lambda_1) = 0, \quad p_2(-\lambda_2) = 0; \quad (1.27)$$

$$p_1(\lambda_1) = 0, \quad p_2(-\lambda_2) = 0; \quad (1.28) \quad p_1(\lambda_1) = 0, \quad p'_2(-\lambda_2) = 0. \quad (1.29)$$

Аналогично получаются краевые условия для функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$. Из условий контакта слоев (1.2), (1.3) следует

$$n_1(0) = n_2(0), \quad q_1(0) = q_2(0), \quad N_1(0) = N_2(0), \quad M_1(0) = M_2(0); \quad (1.30)$$

$$q_1(0) = q_2(0), \quad N_1(0) = N_2(0), \quad M_1(0) = 0; \quad M_2(0) = 0. \quad (1.31)$$

Граничные условия на плоских гранях (1.4)–(1.13) будут удовлетворены, если

$$N_1(\lambda_1) = 0, \quad M_1(\lambda_1) = 0, \quad N_2(-\lambda_2) = 0, \quad M_2(-\lambda_2) = 0, \quad (1.32)$$

$$n_1(\lambda_1) = 0, \quad q_1(\lambda_1) = 0, \quad n_2(-\lambda_2) = 0, \quad q_2(-\lambda_2) = 0, \quad (1.33)$$

$$q_1(\lambda_1) = 0, \quad M_1(\lambda_1) = 0, \quad q_2(-\lambda_2) = 0, \quad M_2(-\lambda_2) = 0, \quad (1.34)$$

$$N_1(\lambda_1) = 0, \quad n_1(\lambda_1) = 0, \quad N_2(-\lambda_2) = 0, \quad n_2(-\lambda_2) = 0, \quad (1.35)$$

$$N_1(\lambda_1) = 0, \quad M_1(\lambda_1) = 0, \quad n_2(-\lambda_2) = 0, \quad q_2(-\lambda_2) = 0, \quad (1.36)$$

$$N_1(\lambda_1) = 0, \quad M_1(\lambda_1) = 0, \quad q_2(-\lambda_2) = 0, \quad M_2(-\lambda_2) = 0, \quad (1.37)$$

$$N_1(\lambda_1) = 0, \quad M_1(\lambda_1) = 0, \quad N_2(-\lambda_2) = 0, \quad n_2(-\lambda_2) = 0, \quad (1.38)$$

$$q_1(\lambda_1) = 0, \quad M_1(\lambda_1) = 0, \quad n_2(-\lambda_2) = 0, \quad q_2(-\lambda_2) = 0, \quad (1.39)$$

$$N_1(\lambda_1) = 0, \quad n_1(\lambda_1) = 0, \quad n_2(-\lambda_2) = 0, \quad q_2(-\lambda_2) = 0, \quad (1.40)$$

$$N_1(\lambda_1) = 0, \quad n_1(\lambda_1) = 0, \quad q_2(-\lambda_2) = 0, \quad M_2(-\lambda_2) = 0. \quad (1.41)$$

Здесь

$$M_m(x_3) = \frac{G_m}{2} \left(\frac{1}{\lambda} n'_m + q_m \right), \quad N_m(x_3) = \frac{1}{\lambda^2} G_m v_{m0} \left(\lambda(1 - v_m) q' + \gamma^2 v_m n_m \right). \quad (1.42)$$

Таким образом, вихревое и потенциальное решения описаны в терминах спектральных задач (1.16), (1.18)–(1.29) и (1.17), (1.30)–(1.41). В общем случае изменения упругих параметров для решения спектральных задач можно использовать численные методы. Это позволит приближенно найти собственные функции $p_m(x_3)$, $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ и собственные значения δ , γ и исследовать полные спектры SH и P-SV волн. Исследования общих свойств собственных функций и значений спектральных задач и полноты однородных решений могут быть выполнены на основании результатов работ [75, 110].

Рассмотрим случай, когда упругие параметры пластины являются постоянными ($G_m, v_m, \rho_m = \text{const}$). Тогда можно в явном аналитическом виде найти собственные функции $p_m(x_3)$, $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$.

1.2. Однородные решения краевых задач для двухслойных плит с идеальным контактом однородных слоев [41, 187, 188, 192]. Для однородных изотропных слоев ($G_m, v_m, \rho_m = \text{const}$) уравнения вихревого (1.16) и потенциального (1.17) состояний примут соответственно вид

$$p_m''(x_3) + l_m^2 p_m(x_3) = 0, \quad l_m^2 = \Omega_m^2 + \delta^2; \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} n_m''(x_3) + \left[\Omega_m^2 + (1 + v_{m0}) \gamma^2 \right] n_m(x_3) + \lambda v_{m0} q'_m(x_3) &= 0, \\ q_m''(x_3) + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + v_{m0}} q_m(x_3) + \frac{\gamma^2 v_{m0}}{\lambda(1 + v_{m0})} n'_m(x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Уравнение (1.43) необходимо дополнить одним из граничных условий на плоских гранях пластины (1.20)–(1.29) и контактирующих плоскостях (1.18), а систему уравнений (1.44) – условиями (1.32)–(1.41) и (1.30).

Общее решение системы уравнений (1.43) относительно функций $p_m(x_3)$ выглядит следующим образом:

$$p_1(x_3) = a_{11} \cos l_1 x_3 + a_{12} \sin l_1 x_3, \quad p_2(x_3) = a_{21} \cos l_2 x_3 + a_{22} \sin l_2 x_3. \quad (1.45)$$

Общее решение систем дифференциальных уравнений (1.44) имеет вид

$$n_m(x_3) = H_{m1} \cos \gamma_{m1} x_3 + H_{m2} \sin \gamma_{m1} x_3 + H_{m3} \cos \gamma_{m2} x_3 + H_{m4} \sin \gamma_{m2} x_3, \\ q_m(x_3) = \frac{1}{\lambda} \left[\gamma_{m1} (H_{m2} \cos \gamma_{m1} x_3 - H_{m1} \sin \gamma_{m1} x_3) + \frac{\gamma^2}{\gamma_{m2}} (H_{m4} \cos \gamma_{m2} x_3 - H_{m3} \sin \gamma_{m2} x_3) \right]. \quad (1.46)$$

где

$$\gamma_{m1}^2 = \gamma^2 + k_m^2 \Omega_m^2, \quad k_m^2 = (1 - 2\nu_m)/(2 - 2\nu_m), \quad \gamma_{m2}^2 = \gamma^2 + \Omega_m^2. \quad (1.47)$$

Неизвестные коэффициенты a_{m1} , a_{m2} , H_{m1} , ..., H_{m4} в функциях (1.45), (1.46) и параметры δ , γ определяются из граничных условий при $x_3 = \lambda_1$, $x_3 = -\lambda_2$, $x_3 = 0$.

В случае жестко заземленных плоских граней пластины собственные функции спектральной задачи (1.43), (1.21), (1.18) вихревого решения получаются такими [41, 192]

$$p_{1k}(x_3) = \sin l_{1k}(\lambda_1 - x_3), \quad p_{2k}(x_3) = \sin l_{1k} \lambda_1 \cos l_{2k} x_3 - \frac{G l_{1k}}{l_{2k}} \cos l_{1k} \lambda_1 \sin l_{2k} x_3, \quad (1.48)$$

а собственные значения δ_k находим из трансцендентного дисперсионного уравнения

$$V_{11}(\delta, \Omega) = G l_1 \cos l_1 \lambda_1 \sin l_2 \lambda_2 + l_2 \sin l_1 \lambda_1 \cos l_2 \lambda_2 = 0. \quad (1.49)$$

Дисперсионное уравнение вихревого решения (1.49) позволяет описать полный частотный спектр SH волн и имеет счетное множество решений δ_k . В результате однородные решения вихревого состояния принимают вид

$$u_{m1}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2), \quad u_{m2}^{(1)} = -\sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), \quad u_{m3}^{(1)} = 0. \quad (1.50)$$

Для нахождения решения спектральной задачи (1.44), (1.30), (1.33) потенциального состояния необходимо подставить выражения (1.46) в граничные условия (1.33). В результате получим однородную систему линейных алгебраических уравнений восьмого порядка относительно неизвестных [41]. Из условия равенства нулю определителя этой системы имеем дисперсионное уравнение

$$P_{11}(\gamma, \Omega) = r_1 \left(d_1(G-1)^2 + e_1(G-1) + f_1 \right) C_{11} C_{12} C_{21} C_{22} + \\ + r_2 \left(d_2(G-1)^2 + e_2(G-1) + f_2 \right) C_{11} C_{12} S_{21} S_{22} + r_3 e_3 G C_{11} S_{12} C_{21} S_{22} + r_4 e_4 G C_{11} S_{12} S_{21} C_{22} + \\ + r_5 e_5 G S_{11} C_{12} C_{21} S_{22} + r_6 e_6 G S_{11} C_{12} S_{21} C_{22} + r_7 \left(d_7(G-1)^2 + e_7(G-1) + f_7 \right) S_{11} S_{12} C_{21} C_{22} + \\ + r_8 \left(d_8(G-1)^2 + e_8(G-1) + f_8 \right) S_{11} S_{12} S_{21} S_{22} + r_9 \left(d_9(G-1)^2 + e_9(G-1) + f_9 \right) C_{11} C_{12} + \\ + r_{10} \left(d_{10}(G-1)^2 + e_{10}(G-1) + f_{10} \right) S_{11} S_{12} + r_{11} \left(d_{11}(G-1)^2 + e_{11}(G-1) + f_{11} \right) C_{21} C_{22} + \\ + r_{12} \left(d_{12}(G-1)^2 + e_{12}(G-1) + f_{12} \right) S_{21} S_{22} + r_{13} \left(d_{13}(G-1)^2 + e_{13}(G-1) + f_{13} \right) = 0. \quad (1.51)$$

Дисперсионное уравнение потенциального решения (1.51) описывает частотный спектр P-SV волн и имеет счетное множество решений γ_p . Следовательно, потенциальное решение примет вид

$$u_{m1}^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_{mp}(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2), \quad u_{m2}^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_{mp}(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2), \\ u_{m3}^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} q_{mp}(x_3) C_p(x_1, x_2). \quad (1.52)$$

Однородные решения в задаче равновесия двухслойной пластины могут быть получены при частоте $\Omega = 0$. В этом случае собственные функции $p_{mk}(x_3)$ из выражений (1.48)

и дисперсионное уравнение (1.49) вихревого решения примут вид

$$\begin{aligned} p_{1k}(x_3) &= \sin \delta_k (\lambda_1 - x_3), \quad p_{2k}(x_3) = \sin \delta_k \lambda_1 \cos \delta_k x_3 - G \cos \delta_k \lambda_1 \sin \delta_k x_3; \\ (G-1) \sin \delta_k (\lambda_1 - \lambda_2) + (G+1) \sin \delta_k &= 0. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Для получения потенциального решения задачи статики необходимо в соотношениях (1.47)–(1.51) частоту устремить к нулю ($\Omega \rightarrow 0$). Тогда собственные функции $n_{mp}(x_3)$, $q_{mp}(x_3)$ спектральной задачи (1.44) при $\Omega = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} n_m(x_3) &= (H_{m1} + x_3 H_{m1}) \cos \gamma x_3 + (H_{m3} + x_3 H_{m4}) \sin \gamma x_3, \\ q_m(x_3) &= (Q_{m1} + x_3 Q_{m2}) \cos \gamma x_3 + (Q_{m3} + x_3 Q_{m4}) \sin \gamma x_3. \end{aligned}$$

Уравнение (1.51) при $\Omega \rightarrow 0$ преобразуется к виду [183]

$$\begin{aligned} E_1 r_1 r_2 s_1^2 s_2^2 - E_2 g_2^2 r_1 s_1^2 - E_3 g_1^2 r_2 s_2^2 + E_4 (g_1^2 - r_1^2 s_1^2) + \\ + E_5 (g_2^2 - r_2^2 s_2^2) + E_6 (g_1 g_2 - r_1 r_2 s_1 c_1 s_2 c_2) + E_7 g_1^2 g_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

В монографии [41] представлены в порядке возрастания модулей первые десять корней γ_p уравнения (1.54) в зависимости от изменения параметров G , ν_1 , ν_2 , λ_1 , λ_2 . Значения данных корней, например, может быть использовано в качестве начальных приближений при решении дисперсионного уравнения (1.51) при малых значениях частоты Ω .

В приведенных выше соотношениях переход от двухслойной пластины к однослойной можно осуществить несколькими способами за счет выбора параметров G , ρ , ν_1 , ν_2 , λ_1 , λ_2 :

- 1) принять одинаковыми упругие параметры $G=1$, $\nu_1=\nu_2$, $\rho=1$, а величины λ_1 и λ_2 остаются произвольными;
- 2) толщина верхнего слоя $\lambda_1=0$ ($\lambda_2=1$) – однородная пластина с упругими параметрами $\tilde{G}_2$, ν_2 ;
- 3) толщина нижнего слоя $\lambda_2=0$ ($\lambda_1=1$) – однородная пластина с упругими параметрами $\tilde{G}_1$, ν_1 .

Численно-аналитические решения дисперсионных уравнений (1.49) и (1.51) позволяют исследовать следующие характеристики волнового процесса: частоты запираания, дисперсионные спектры, фазовые и групповые скорости.

Для нахождения частот запираания SH волн положим $\delta=0$ в уравнении (1.49) и получим

$$V_{11}(0, \Omega) = G \Omega_1 \cos \Omega_1 \lambda_1 \sin \Omega_2 \lambda_2 + \Omega_2 \sin \Omega_1 \lambda_1 \cos \Omega_2 \lambda_2 = 0. \quad (1.55)$$

При $\gamma=0$ из (1.51) получаем уравнение для определения частот запираания P-SV волн

$$P_{11}(0, \Omega) = (G \Omega_1 c_{12} s_{22} + \Omega_2 s_{12} c_{22}) (G k_2 \Omega_1 c_{11} s_{21} + k_1 \Omega_2 s_{11} c_{21}) = 0, \quad (1.56)$$

$$\text{где } s_{m1} = \sin(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad s_{m2} = \sin(\Omega_m \lambda_m), \quad c_{m1} = \cos(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad c_{m2} = \cos(\Omega_m \lambda_m). \quad (1.57)$$

Из трансцендентного уравнения (1.56) определяются две независимые серии частот запираания. Частоты первой серии не зависят от значений коэффициентов С.Д. Пуассона ν_1 , ν_2 , в отличие от частот запираания, образующих второе семейство. При некоторых ν_1 , ν_2 частоты из соседних семейств могут совпадать.

В случае свободных от усилий плоских граней пластины (1.4) собственные функции $p_{mk}(x_3)$ и собственные значения δ_k вихревого решения определяются из спектральной задачи (1.16), (1.18), (1.20). Собственные функции $p_{mk}(x_3)$ получаются такими

$$p_{1k}(x_3) = \cos l_{1k} (\lambda_1 - x_3), \quad p_{2k}(x_3) = \cos l_{1k} \lambda_1 \cos l_{2k} x_3 + \frac{G l_{1k}}{l_{2k}} \sin l_{1k} \lambda_1 \sin l_{2k} x_3,$$

а собственные значения δ_k находим из дисперсионного уравнения

$$V_{12}(\delta, \Omega) = G l_1 \sin l_1 \lambda_1 \cos l_2 \lambda_2 + l_2 \sin l_2 \lambda_2 \cos l_1 \lambda_1 = 0. \quad (1.58)$$

В случае упругого равновесия пластины ($\Omega = 0$) уравнение (1.58) преобразуется к известному [107]

$$(G+1) \sin \delta = (G-1) \sin \delta (2\lambda_1 - 1).$$

С целью определения собственных значений γ_p и собственных функций $n_{mp}(x_3)$, $q_{mp}(x_3)$ потенциального решения подставим выражения (1.46) в граничные условия (1.30), (1.32) и получим однородную систему из восьми линейных алгебраических уравнений относительно H_{mi} ($m=1,2; i=\overline{1,4}$) [41, 188]. Из условия равенства нулю определителя этой системы имеем дисперсионное уравнение

$$P_{12}(\gamma, \Omega) = \det\{A_{ij}\}_{i,j=\overline{1,8}} = 0. \quad (1.59)$$

Положим $\delta=0$ в соотношении (1.58) и получим уравнение для нахождения частот записания SH волн

$$V_{12}(0, \Omega) = G\Omega_1 s_{12} c_{22} + \Omega_2 c_{12} s_{22} = 0. \quad (1.60)$$

Частоты записания P-SV волн находятся из уравнения (1.59) при $\gamma=0$. В результате с учетом обозначений (1.57) получим

$$P_{12}(0, \Omega) = (G\Omega_1 s_{12} c_{22} + \Omega_2 c_{12} s_{22})(Gk_2 \Omega_1 s_{11} c_{21} + k_1 \Omega_2 c_{11} s_{21}) = 0. \quad (1.61)$$

Из (1.61) следуют уравнения для определения двух независимых серий частот записания. Частоты первой серии не зависят от значений коэффициентов С.Д. Пуассона ν_1, ν_2 , в отличие от частот записания, образующих второе семейство. При некоторых значениях величин ν_1, ν_2 могут появляться кратные частоты.

Для двухслойной изотропной пластины, верхняя плоская грань которой свободна от напряжений, а нижняя жестко закреплена (1.8), из спектральной задачи (1.16), (1.18), (1.24) вихревого решения находим собственные функции $p_{mk}(x_3)$ и получаем дисперсионное уравнение для определения собственных значений δ_k

$$p_{1k}(x_3) = \cos l_{1k}(\lambda_1 - x_3) \sin l_{2k} \lambda_2, \quad p_{2k}(x_3) = \cos l_{1k} \lambda_1 \sin l_{2k}(\lambda_2 + x_3);$$

$$V_{13}(\delta, \Omega) = G l_1 \sin l_1 \lambda_1 \sin l_2 \lambda_2 - l_2 \cos l_1 \lambda_1 \cos l_2 \lambda_2 = 0. \quad (1.62)$$

На основе спектральной задачи (1.44), (1.30), (1.36) и выражений (1.46) находим собственные функции $n_{mk}(x_3)$, $q_{mk}(x_3)$ и собственные значения γ_p потенциального решения [41, 187]. Для определения собственных значений γ_p имеем дисперсионное уравнение

$$P_{13}(\gamma, \Omega) = 64G^2 (\xi_1 C_{11} S_{12} - \tau_1 S_{11} C_{12}) (\xi_1 S_{11} C_{12} - \tau_1 C_{11} S_{12}) \times (t_2 C_{21} S_{22} - \gamma^2 S_{21} C_{22}) \times$$

$$\times (t_2 S_{21} C_{22} - \gamma^2 C_{21} S_{22}) + 2G \left[(2t_1 \xi_1 (\xi_1 + 2\gamma^2) (C_{11} C_{12} - 1) + (\xi_1^3 + 2t_1 \tau_1) S_{11} S_{12}) \times \right.$$

$$\times (\tau_2 (\xi_2 + 2\gamma^2) (1 - C_{21} C_{22}) + 2(2t_2^2 + \gamma^2 \xi_2) S_{21} S_{22}) -$$

$$- 2\Omega_1^2 \Omega_2^2 \gamma_{11} \gamma_{22} (\xi_1 C_{11} S_{12} - \tau_1 S_{11} C_{12}) (t_2 C_{21} S_{22} - \gamma^2 S_{21} C_{22}) -$$

$$- 2\Omega_1^2 \Omega_2^2 \gamma_{12} \gamma_{21} (\xi_1 S_{11} C_{12} - \tau_1 C_{11} S_{12}) (t_2 S_{21} C_{22} - \gamma^2 C_{21} S_{22}) \left. \right] +$$

$$+ ((t_1 - \gamma^2) (\xi_1 - \tau_1) \cos \lambda_1 (\gamma_{11} + \gamma_{12}) + (t_1 + \gamma^2) (\xi_1 + \tau_1) \cos \lambda_1 (\gamma_{11} - \gamma_{12}) - 2\tau_1 \xi_1) \times$$

$$\times ((t_2 - \gamma^2) (\xi_2 - \tau_2) \cos \lambda_2 (\gamma_{21} + \gamma_{22}) + (t_2 + \gamma^2) (\xi_2 + \tau_2) \cos \lambda_2 (\gamma_{21} - \gamma_{22}) - 2\tau_2 \xi_2) = 0. \quad (1.63)$$

В монографии [41] рассмотрены частные случаи дисперсионных уравнений (1.62), (1.63) и получены соответствующие предельные соотношения.

Численно-аналитические решения уравнений (1.62) и (1.63) позволяют исследовать дисперсионные кривые, фазовые и групповые скорости, частоты запираания. Полагая в соотношениях (1.62), (1.63) $\delta=0$ и $\gamma=0$, с учетом обозначений (1.57) получим уравнения для частот запираания

$$V_{13}(0, \Omega) = G\Omega_1 s_{12} s_{22} - \Omega_2 c_{12} c_{22} = 0, \quad (1.64)$$

$$P_{13}(0, \Omega) = (G\Omega_1 s_{12} s_{22} - \Omega_2 c_{12} c_{22})(Gk_2 \Omega_1 s_{11} s_{21} - k_1 \Omega_2 c_{11} c_{21}) = 0. \quad (1.65)$$

Как и для рассмотренных выше граничных условий, здесь также множество частот запираания P-SV волн состоит из двух серий.

Исследование характеристик волнового процесса в двухслойной пластине. С целью проведения численных исследований характеристик волнового процесса для определенности полагаем, что верхний слой пластины изготовлен из алюминия и характеризуется физико-механическими параметрами среды

$$\tilde{\rho}_1 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \tilde{G}_1 = 2,61 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \nu_1 = 0,35; c_{S1} = 3110 \text{ м/с},$$

а нижний – из вольфрама:

$$\tilde{\rho}_2 = 18,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \tilde{G}_2 = 15,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \nu_2 = 0,29; c_{S2} = 2860 \text{ м/с}.$$

Расчеты проведены для таких основных вариантов соотношения относительных толщин: *вариант I* – $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$; *вариант II* – $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 2/3$; *вариант III* – $\lambda_1 = 2/3$, $\lambda_2 = 1/3$; *вариант IV* – однородная пластина из вольфрама ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$). Наряду с этим исследовалось влияние относительной жесткости слоев, коэффициентов С.Д. Пуассона и относительных толщин слоев пластины на изменение характеристик волнового процесса.

В монографии [41] и статьях [187, 188, 192] для *вариантов I–III* приведены значения частот запираания SH волн ($\delta=0$) и P-SV волн ($\gamma=0$), определяемых на основе уравнений (1.55), (1.60), (1.64) и (1.56), (1.61), (1.65). Эти данные позволяют судить о влиянии граничных условий на плоских гранях и неоднородности ее материала на изменение частот запираания. При различных граничных условиях на торцах пластины нет одинаковых частот запираания. Нулевая частота запираания означает, что первая мнимая дисперсионная кривая выходит из нуля. Для каждого вида граничных условий множество частот запираания SH волн является подмножеством частот запираания P-SV волн, т.е. такие частоты являются в совокупности двукратным корнем. Данный факт в последующем необходимо учитывать при решении конкретных задач. В длинноволновом диапазоне вид граничных условий на торцах пластины приводит к изменению значений и количества частот запираания, например, на интервале $0 \leq \Omega \leq 30$ и оказывает значительное влияние на характер волнового процесса.

Поведение первой частоты запираания при непрерывном изменении λ_1 от 0 до 1 отражено на рис. 1.1. Кривые 1–3 на данном рисунке соответствуют: 1 – жесткому защемлению торцов, 2 – свободным от усилий торцам пластины, 3 – свободному от усилий верхнему и жестко защемленному нижнему торцам. При $\lambda_1 = 0$ значения Ω , равные π и $\pi/2$, соответствуют однородной пластине. Данные таблиц и рис. 1.1 свидетельствуют о немонотонном изменении частот запираания, в частности первой, с увеличением относительной толщины верхнего слоя. В монографии [41] также исследовано влияние коэффициента С.Д. Пуассона ν_2 и относительной жесткости G слоев.

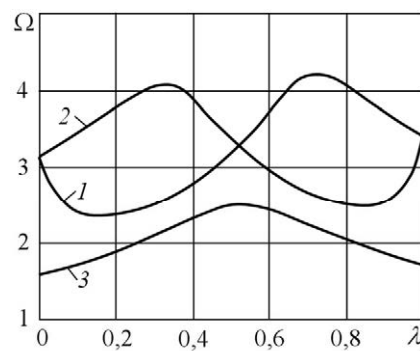


Рис. 1.1

На рис. 1.2 в полулогарифмической шкале изображены графики изменения первой ненулевой частоты записания в зависимости от изменения относительной жесткости слоев G от 1 до 10^3 . Нумерация кривых здесь соответствует принятой на рис. 1.1. Значения Ω при $G=1$ соответствуют однородной пластине. При $G=10^3$ для кривых 1–3 соответственно имеем $\Omega = 6,2769$; $\Omega = 4,0566$; $\Omega = 1,7205$. Данные значения частот с высокой степенью точности ($\approx 0,1\%$) можно считать предельными. Изменение относительной жесткости на величину Ω наиболее заметно сказывается в случае жесткого защемления торцов пластины (кривая 1) и менее заметно в случае свободной верхней и жестко защемленной нижней плоских граней (кривая 3).

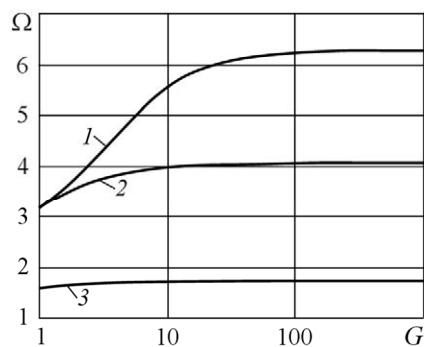


Рис. 1.2

Наряду с частотами записания важными характеристиками волнового процесса являются дисперсионные спектры и связанные с ними фазовые и групповые скорости распространяющихся мод.

Уравнения (1.49), (1.58), (1.62) вихревого и (1.51), (1.59), (1.63) потенциального решений определяют счетное множество дисперсионных кривых – зависимостей параметра δ или γ от частоты Ω . На рис. 1.3 и рис. 1.4 для *варианта II* изображены спектральные кривые зависимостей параметра δ от частоты Ω , соответствующие дисперсионным уравнениям (1.49), (1.58) вихревого состояния.

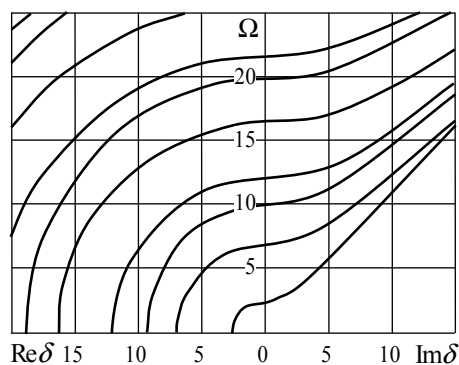


Рис. 1.3

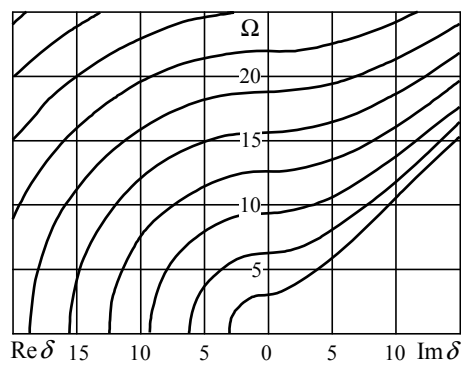


Рис. 1.4

На рис. 1.5–1.7 для *варианта II* представлены спектральные кривые зависимостей параметра γ от частоты Ω , соответствующие дисперсионным уравнениям (1.51), (1.59), (1.63). На диаграммах дисперсионных кривых сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей на действительную ($\text{Re } \gamma, \Omega$) и мнимую ($\text{Im } \gamma, \Omega$) плоскости. Уравнения (1.51), (1.59), (1.63) при фиксированной частоте имеют конечное число действительных и чисто мнимых корней и счетное множество комплексных корней. Действительные и комплексные моды характеризуют стоячие волны. Мнимые корни спектра соответствуют распространяющимся модам.

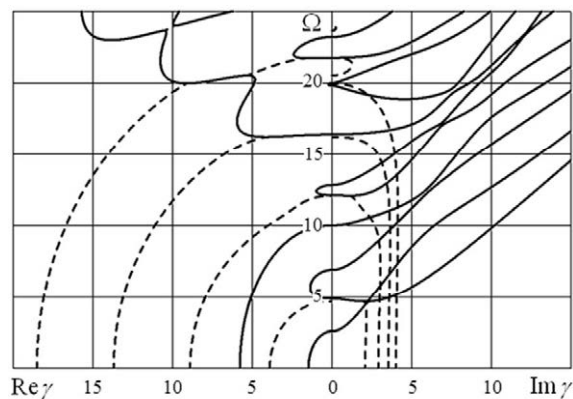


Рис. 1.5

На рис. 1.8 для *варианта II* представлены графики изменения безразмерных фазовых v_p скоростей первых двух распространяющихся P-SV мод в зависимости от безразмерной частоты Ω для различных граничных условий на торцах двухслойной пластины. Нумерация кривых

соответствует принятой на рис. 1.1. Сплошные кривые относятся к первой моде, а штриховые – ко второй.

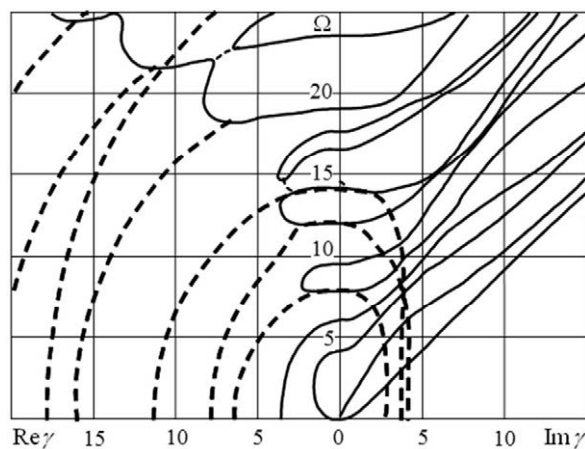


Рис. 1.6

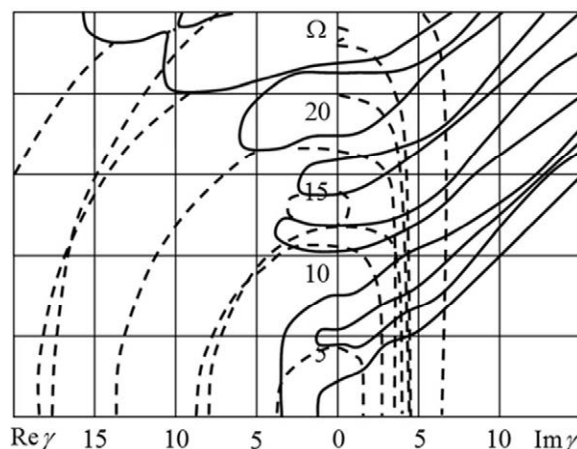


Рис. 1.7

Как видно из рис. 1.8, поведение фазовых скоростей носит монотонный характер. В случае свободных от напряжений торцов пластины скорости первой и второй мод на нулевой частоте записания принимают конечные или нулевые значения (кривые 2). Это обусловлено наличием двух мод, выходящих из нуля. Иное качество поведения кривых 1 и 3. В частности, при приближении к первой частоте записания, которая отлична от нуля, скорость стремится к бесконечности. В зависимости от вида граничных условий на торцах пластины в области высоких частот ($\Omega \gg 1$) асимптотами для фазовой скорости первой моды являются следующие значения: 0,926 – скорость поверхностной волны Дж. Рэлея (случай свободных от напряжений торцов, кривая 2), 0,968 – скорость распространения волны Р. Стоунли (другие граничные условия, кривые 1, 3). Асимптотами второй моды являются: 0,968 – для случая свободных от напряжений торцов, единица – для остальных граничных условий. Таким образом, неоднородность пластины приводит к новому характеру локализации фазовой скорости первой моды, а вид граничных условий сказывается в широком диапазоне изменения частот колебаний.

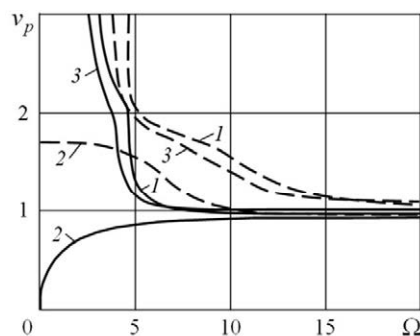


Рис. 1.8

На рис. 1.9–1.11 (вариант II) приведены графики изменения безразмерных групповых v_g скоростей первых трех распространяющихся P-SV мод (соответственно кривые 1–3) в зависимости от безразмерной частоты Ω . Рис. 1.9 относится к жестким плоскими гранями, рис. 1.10 – свободным от усилий торцам, рис. 1.11 – смешанным граничным условиям на торцах.

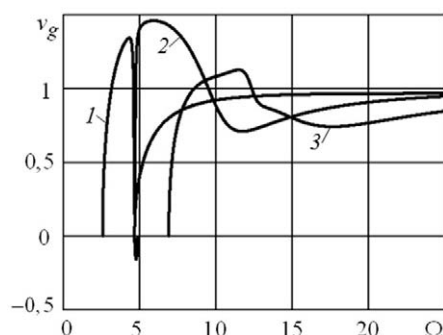


Рис. 1.9

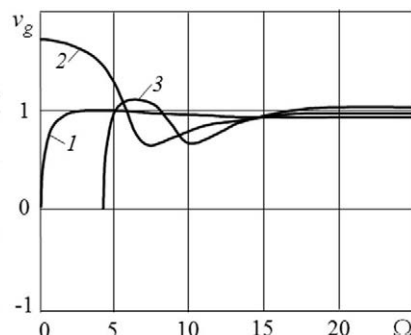


Рис. 1.10

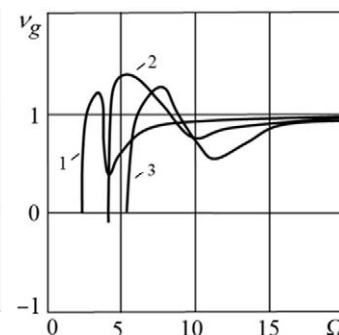


Рис. 1.11

Влияние неоднородности плиты можно, в частности, проследить на основе изменения фазовых и групповых скоростей. На рис. 1.12–1.13 представлены графики изменения безразмерных фазовых v_p и групповых v_g скоростей первых двух мод для варианта I (сплошные линии – кривые 1 и 2 соответственно), а также первой симметричной (штриховая линия – кривая 3) и антисимметричной (штрихпунктирная линия – кривая 4) моды в однослойной пластине, изготовленной из вольфрама.

Как видно из рис. 1.12–1.13, первая мода в двухслойной пластине вначале (при длинных волнах) приближается к первой симметричной моде, а затем к антисимметричной моде однослойной пластины. Поведение второй моды носит противоположный характер. Вначале вторая мода приближается к антисимметричной, а затем к симметричной моде однослойной пластины. Наибольшее отклонение от однородной пластины в значениях фазовой скорости имеет место в диапазоне средних частот $3,18 < \Omega < 15$. Важным отличием является то, что первая мода в двухслойной плите (кривая 1) асимптотически с увеличением Ω приближается к 0,968, а остальные моды (кривые 2–4) – к единице. Это свидетельствует о существовании волны Р. Стоунли (R. Stoneley).

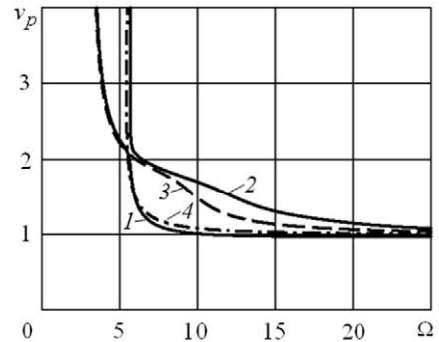


Рис. 1.12

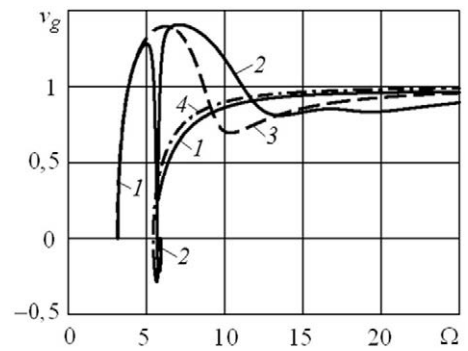


Рис. 1.13

1.3. Однородные решения краевых задач для двухслойных плит с несовершенным контактом однородных слоев. В данном случае уравнение (1.43) дополняется одним из граничных условий на плоских гранях пластины (1.20)–(1.29) и контактирующих плоскостях (1.19), а система уравнений (1.44) – условиями (1.32)–(1.41) и (1.31). В работах [41, 193, 201] получены однородные решения некоторых сформулированных задач.

В случае жестко заземленных плоских граней пластины [41, 201] решение спектральной задачи вихревого решения (1.43), (1.19), (1.21) имеет вид

$$p_{1k} = \cos l_{1k} x_3, \quad p_{2k} = \cos l_{2k} x_3, \quad l_{mk} = \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_m}.$$

Собственные значения δ_k определяются явно:

$$\delta_{km} = \sqrt{l_{mk}^2 - \Omega_m^2}, \quad \{\delta_k\} = \{\delta_{k1}\} \cup \{\delta_{k2}\}. \quad (1.66)$$

Выражения (1.66) позволяют исследовать частотные спектры SH волн в двухслойной пластине. Счетное множество действительных и мнимых собственных значений δ_k зависит только от величин G , ρ , λ_m .

Безразмерные фазовые $v_p = i\Omega/\delta$ и групповые $v_g = id\Omega/d\delta$ скорости распространяющихся мод SH волн определяются из выражений (1.66) в явном виде [41].

Для нахождения собственных функций и собственных значений потенциального состояния подставим выражения (1.46) в граничные условия (1.31), (1.33). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений восьмого порядка для определения неизвестных коэффициентов H_{mi} ($i = 1, \dots, 4$, $m = 1, 2$). Нетривиальное решение данной системы получено в статье [201]. Из условия равенства нулю определителя системы имеем дисперсионное уравнение для нахождения собственных значений γ :

$$P_{14}(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \rho \gamma_{11} \Delta_{11} \Delta_{24} + G^2 \gamma_{12} \Delta_{14} \Delta_{21} = 0. \quad (1.67)$$

В отличие от выражений (1.66) для вихревого состояния, в дисперсионном уравнении (1.67) присутствуют дополнительно коэффициенты С.Д. Пуассона ν_m . Уравнение (1.67) может быть использовано для описания частотных спектров Р-SV волн.

Рассмотрим случай соотношения упругих параметров слоев пластины $G=1$, $\rho=1$, $\nu_1=\nu_2=\nu$, $\lambda_1=\lambda_2=1/2$ (однородная пластина с «расслоением»). Тогда уравнение (1.67) примет вид

$$(tS_1C_2 - \gamma^2 C_1S_2) \left(\gamma^2 (\xi + 4t^2) S_1S_2 + t(\xi + 4\gamma^4) C_1C_2 - 4\tau\xi \right) = 0. \quad (1.68)$$

Уравнение (1.68) отличается от аналогичных для однородной пластины [41]

$$P^+(\gamma, \Omega) = \gamma_1\gamma_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - \gamma^2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0, \quad P^-(\gamma, \Omega) = \gamma_1\gamma_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma^2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0.$$

Представляют интерес случаи, когда один из слоев более жесткий по сравнению с другим. При $G \rightarrow 0$ (верхний слой абсолютно мягкий) дисперсионное уравнение (1.67) преобразуется к виду

$$(\gamma_{11}\gamma_{12} \sin \gamma_{11}\lambda_1 \cos \gamma_{21}\lambda_1 - \gamma^2 \cos \gamma_{11}\lambda_1 \sin \gamma_{12}\lambda_1) \left((3 - 4\nu_2) \cos^2 \gamma_{22} - (\gamma_{22})^2 + (1 - 2\nu_2)^2 \right) = 0 \quad (1.69)$$

и описывает колебания верхнего и равновесие нижнего слоев. В случае $G \rightarrow \infty$ (нижний слой абсолютно мягкий) имеем

$$\left((3 - 4\nu_1) \cos^2 \gamma_{21} - (\gamma_{21})^2 + (1 - 2\nu_1)^2 \right) (\gamma_{21}\gamma_{22} \sin \gamma_{21}\lambda_2 \cos \gamma_{22}\lambda_2 - \gamma^2 \cos \gamma_{21}\lambda_2 \sin \gamma_{22}\lambda_2) = 0. \quad (1.70)$$

Здесь верхний слой находится в состоянии равновесия, а нижний совершает гармонические колебания.

Для перехода к однослойной пластине в уравнении (1.67) необходимо принять толщину одного из слоев равной нулю. Если $\lambda_1 = 0$, тогда

$$\gamma_{21}\gamma_{22} \sin \gamma_{21} \cos \gamma_{22} - \gamma^2 \cos \gamma_{21} \sin \gamma_{22} = 0.$$

В случае $\lambda_2 = 0$ получим уравнение

$$\gamma_{11}\gamma_{12} \sin \gamma_{11} \cos \gamma_{12} - \gamma^2 \cos \gamma_{11} \sin \gamma_{12} = 0.$$

Эти уравнения совпадают с известными для однослойной пластины с жестко заземленными плоскими гранями [41].

Для определения частот записания Р-SV волн полагаем $\gamma=0$ в соотношении (1.67) и получаем трансцендентное уравнение

$$P_{14}(0, \Omega) \equiv c_{12}c_{22} (G\Omega_1 k_2 c_{11}s_{21} + \Omega_2 k_1 s_{11}c_{21}) = 0. \quad (1.71)$$

Из уравнения (1.71) определяются три серии частот записания. Две из них находятся в явном виде и не зависят от коэффициентов С.Д. Пуассона ν_m , в отличие от частот третьей серии, которые определяются из трансцендентного уравнения

$$G\Omega_1 k_2 c_{11}s_{21} + \Omega_2 k_1 s_{11}c_{21} = 0.$$

Кроме того, частоты второй серии также не зависят от относительной жесткости G . При некоторых сочетаниях физико-механических характеристик материалов слоев и их толщин частоты разных серий могут совпадать.

Важным является исследование поведения мнимых корней дисперсионного уравнения (1.67) и, как следствие, оценка предельного значения фазовой скорости $v_p = \Omega/\gamma$ в высокочастотном коротковолновом диапазоне ($\Omega \gg 1$, $\gamma \gg 1$, $\gamma > \Omega_1$, $\gamma > \Omega_2$, $\gamma = \text{Im } \gamma$). С этой целью в соотношении (1.67) устремим $\gamma \rightarrow \infty$ и получим [201]

$$(\gamma_1 s_1 - 1)(\gamma_2 s_2 - 1) \left[\gamma_1 \Omega_1^2 \left((1 + s_2^2)^2 - 4\gamma_2 s_2 \right) + G\gamma_2 \Omega_2^2 \left((1 + s_1^2)^2 - 4\gamma_1 s_1 \right) \right] = 0.$$

Множитель $(r_1 s_1 - 1)(r_2 s_2 - 1)$ не дает дополнительных корней в рассматриваемой области. Это уравнение относительно неизвестной величины фазовой скорости $v_p = v_2$ преобразуется с точностью до обозначений к известному [207, 208] для нахождения скорости v_{St} волны Р. Стоунли вблизи поверхности раздела двух упругих полупространств с условиями проскальзывания по поверхности контакта

$$\rho r_1 \left((1 + s_2^2)^2 - 4r_2 s_2 \right) + G^2 r_2 \left((1 + s_1^2)^2 - 4r_1 s_1 \right) = 0. \quad (1.72)$$

При $y \rightarrow \infty$ для мнимых корней в области высоких частот уравнение (1.68) для низшей распространяющейся моды сводится к уравнению для нахождения скорости волны Дж. Рэлея [209]

$$(1 + s^2)^2 - 4rs = 0. \quad (1.73)$$

Для проведения численных исследований предположим, что верхний слой пластины изготовлен из алюминия, а нижний – из вольфрама (характеристики материалов указаны выше). Рассмотрены такие варианты [41]: *вариант I* – $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 2/3$; *вариант II* – $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$; *вариант III* – $\lambda_1 = 2/3$, $\lambda_2 = 1/3$; *вариант IV* – $\lambda_1 = 0,9$, $\lambda_2 = 0,1$. Указанные здесь варианты носят локальный характер.

В монографии [41] показано влияние относительных толщин λ_1 и λ_2 , относительной жесткости G , коэффициента С.Д. Пуассона и условий контакта слоев на изменение частот запираания, определяемых уравнением (1.71).

На основании дисперсионного уравнения (1.67) определяется счетное множество спектральных кривых – зависимостей параметра γ от частоты Ω при заданных величинах G , ρ , v_1 , v_2 , λ_1 , λ_2 . На рис. 1.14 для *варианта I* представлены дисперсионные спектры P-SV волн в пластине (а), фазовые (б) и групповые (в) скорости мод. Сплошные линии на диаграммах (а) соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей на действительную ($\text{Re } \gamma, \Omega$) и мнимую ($\text{Im } \gamma, \Omega$) плоскости. С увеличением относительной толщины верхнего слоя пластины количество действительных корней не изменяется и равно двум в области низких частот, что также характерно и для идеального контакта слоев пластины. Мнимые корни спектра соответствуют распространяющимся или бегущим модам. В области низких частот, $\Omega \ll 1$, отсутствуют мнимые корни и, как следствие, распространяющиеся моды. С увеличением частоты Ω изменяется число мнимых корней. Дисперсионные кривые обладают свойством: участки мнимых ветвей для определенных частот запираания опускаются ниже частоты запираания, что объясняется наличием обратной волны. Это характерно для второй (рис. 1.14, а) моды. Вблизи частот запирааний фазовая скорость $v_p \rightarrow \infty$ (рис. 1.14, б), а групповая скорость v_g равна нулю (рис. 1.14, в). Это объясняется тем, что в стоячей волне при $\gamma = 0$ энергия не переносится. В высокочастотном диапазоне все

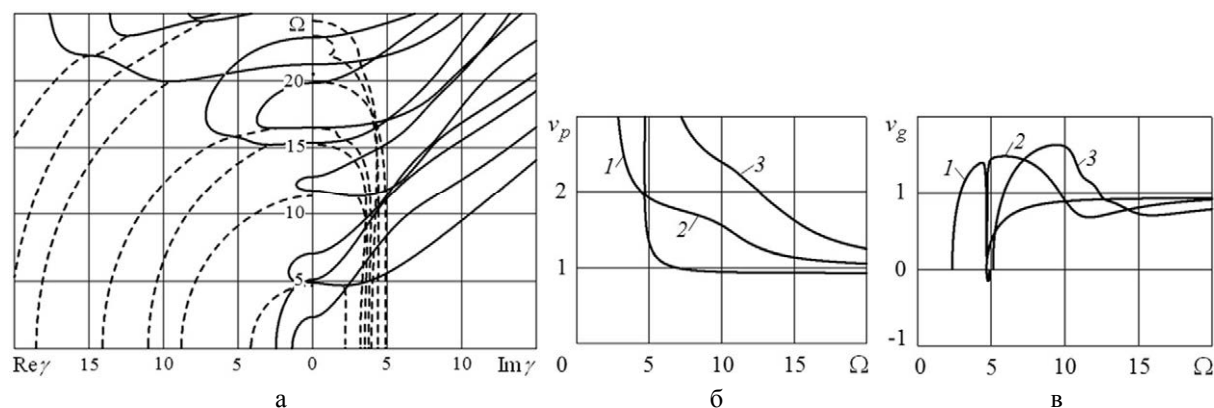


Рис. 1.14

распространяющиеся моды в двухслойной пластине становятся бездисперсными, а значения их групповых скоростей мало отличается от значений фазовых скоростей. Поведение групповых скоростей носит более сложный характер, чем фазовых. Здесь четко выражены локальные экстремумы каждой моды. На графиках изменения групповых скоростей (рис. 1.14, в) присутствуют отрицательные участки, что соответствует эффекту обратной волны.

Данные рис. 1.15 и рис. 1.16 иллюстрируют изменение фазовой скорости первой распространяющейся моды в зависимости от изменения коэффициента С.Д. Пуассона ν_1 (рис. 1.15) и относительной жесткости G (рис. 1.16) слоев пластины [201]. В первом случае (рис. 1.15) предполагалось, что значение коэффициента С.Д. Пуассона $\nu_2 = 0,3$, а изменяется только ν_1 . Кривые 1–5 соответствуют значениям $\nu_1 = 0,01; 0,1; 0,25; 0,4; 0,49$. Следует отметить, что фазовая скорость равна единице (кривые 1–5) при частотах $\Omega \approx 7,0; \Omega \approx 7,3; \Omega \approx 7,8; \Omega \approx 8,5; \Omega \approx 8,9$ соответственно. В случае приближения частоты Ω к частоте запираия, равной 3,14, фазовая скорость первой моды неограниченно растет.

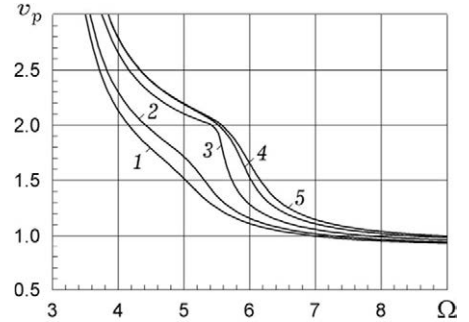


Рис. 1.15

На рис. 1.16 кривые 1–5 соответствуют значениям относительной жесткости $G = 1,0; 1,5; 2,0; 10; 100$. Оставшиеся параметры выбирали такими: $\rho = 1; \nu_1 = \nu_2 = 0,35; \lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$. Особый интерес представляет случай, когда $G = 1$ (кривая 1). Предельным значением фазовой скорости первой распространяющейся моды однородной пластины с расслоением является $v_p = 0,935$, что соответствует скорости волны Дж. Рэлея (1.73). Значение фазовой скорости для этого случая равно единице при $\Omega \approx 8,4$. Для других случаев при указанных наборах данных уравнение (1.72) не имеет вещественного корня, поэтому кривые 2–5 на рис. 1.16 асимптотически приближаются к единице. Вертикальной асимптотой для кривых 1–5 является прямая $\Omega = \pi$ – значение первой частоты запираия. Данные рис. 1.15 и рис. 1.16 свидетельствуют о том, что изменение относительной жесткости оказывает более значительное влияние на фазовые скорости первой моды, чем коэффициент С.Д. Пуассона.

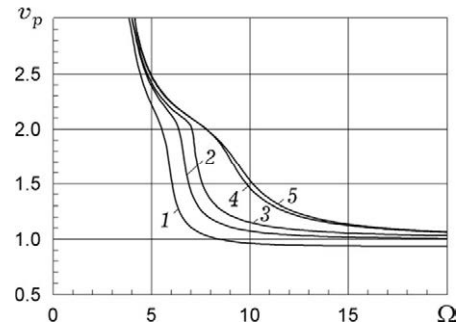


Рис. 1.16

В случае свободных от усилий торцов пластины [41, 193] собственные функции $p_{mk}(x_3)$ и собственные значения δ_k в данном случае определяются из спектральной задачи (1.43), (1.19), (1.20). Функции $p_{mk}(x_3)$ получаются такими

$$p_{1k}(x_3) = \cos l_{1k} x_3, \quad p_{2k}(x_3) = \cos l_{2k} x_3, \quad l_{mk} = \pi k / \lambda_1,$$

а счетное множество собственных значений δ_k , в отличие от идеального контакта, определяется в явном виде

$$\delta_{k1} = \sqrt{(\pi k / \lambda_1)^2 - \Omega_1^2}, \quad \delta_{k2} = \sqrt{(\pi k / \lambda_2)^2 - \Omega_2^2}, \quad \{\delta_k\} = \{\delta_{k1}\} \cup \{\delta_{k2}\}. \quad (1.74)$$

Как видно, собственные значения δ_k не зависят от коэффициентов С.Д. Пуассона, являются вещественными или чисто мнимыми. Выражения (1.74) позволяют исследовать частотные спектры SH волн в двухслойной пластине.

Для определения частот запираия в выражении (1.74) полагаем $\delta = 0$, тогда получаем

$$\Omega_{k1} = \frac{\pi k}{\lambda_1} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad \Omega_{k2} = \frac{\pi k}{\lambda_2} \quad k = 1, 2, \dots$$

Из выражений (1.74) безразмерные фазовые v_p и групповые v_g скорости распространяющихся мод SH волн определяются в явном виде.

В потенциальном решении подстановкой выражений (1.46) в граничные условия (1.31), (1.32) получаем дисперсионное уравнение для нахождения собственных значений γ

$$P_{15}(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) = G^2 \Delta_{14} \gamma_{21} \Omega_2^2 \Delta_{21} + \rho \gamma_{11} \Omega_1^2 \Delta_{11} \Delta_{24} = 0. \quad (1.75)$$

Корни уравнения (1.75) потенциального состояния, в отличие от корней уравнения (1.74) вихревого состояния, зависят от коэффициентов С.Д. Пуассона ν_m . Дисперсионное уравнение (1.75) может быть использовано для описания частотных спектров P-SV волн.

Рассмотрим случай соотношений параметров упругости слоев пластины $G=1$, $\rho=1$, $\nu_1=\nu_2=\nu$, $\lambda_1=\lambda_2=1/2$ (однородная пластина с «расслоением»). Тогда дисперсионное уравнение (1.75) упрощается

$$(\xi C_1 S_2 - \tau S_1 C_2)(\xi \bar{C}_1 \bar{S}_2 - \tau \bar{S}_1 \bar{C}_2)(\xi \bar{S}_1 \bar{C}_2 - \tau \bar{C}_1 \bar{S}_2) = 0, \quad (1.76)$$

Второй и третий множитель левой части данного уравнения соответствуют дисперсионным функциям для симметричных и кососимметричных колебаний однородной пластины со свободными от усилий торцами и безразмерной толщиной, равной $1/2$, а первый множитель – симметричным колебаниям однородной пластины толщиной 1 .

Представляют интерес случаи, когда жесткость одного из слоев пластины намного превосходит жесткость другого слоя. Если $G \rightarrow 0$, тогда уравнение (1.75) имеет вид

$$(\xi C_{11} S_{12} - \tau_1 S_{11} C_{12})(\sin \gamma \lambda_2 + \gamma \lambda_2)(\sin \gamma \lambda_2 - \gamma \lambda_2) = 0. \quad (1.77)$$

Из данного уравнения следует, что верхний слой совершает гармонические колебания [207], а нижний находится в состоянии равновесия [205].

При $G \rightarrow \infty$ уравнение (1.75) преобразуется к такому

$$(\sin \gamma \lambda_1 + \gamma \lambda_1)(\sin \gamma \lambda_1 - \gamma \lambda_1)(\xi^2 C_{21} S_{22} - \tau_2 S_{21} C_{22}) = 0. \quad (1.78)$$

В данном случае верхний слой находится в состоянии равновесия [205], а нижний совершает гармонические колебания [207].

Переход к однослойной пластине можно осуществить, если в уравнении (1.75) устремить толщину одного из слоев к нулю. В результате получим уравнение

$$\left(\Omega_1^2 + 4(1-k_1^2) \gamma^2 \right) \left(\xi_2 \cos \frac{\gamma_{21}}{2} \sin \frac{\gamma_{22}}{2} - \tau_2 \sin \frac{\gamma_{21}}{2} \cos \frac{\gamma_{22}}{2} \right) \left(\xi_2 \sin \frac{\gamma_{21}}{2} \cos \frac{\gamma_{22}}{2} - \tau_2 \cos \frac{\gamma_{21}}{2} \sin \frac{\gamma_{22}}{2} \right) = 0. \quad (1.79)$$

Из (1.79) имеем дисперсионное уравнение, описывающее частотный спектр колебаний нижнего слоя со свободными от напряжений плоскими гранями [207], и бездисперсную моду $\Omega_1 = -i\gamma\sqrt{2/(1-\nu_1)}$, которая зависит только от коэффициента С.Д. Пуассона верхнего слоя. Аналогичные для $\lambda_2 \rightarrow 0$ из уравнения (1.75) следует

$$\left(\xi_1 \cos \frac{\gamma_{11}}{2} \sin \frac{\gamma_{12}}{2} - \tau_1 \sin \frac{\gamma_{11}}{2} \cos \frac{\gamma_{12}}{2} \right) \left(\xi_1 \sin \frac{\gamma_{11}}{2} \cos \frac{\gamma_{12}}{2} - \tau_1 \cos \frac{\gamma_{11}}{2} \sin \frac{\gamma_{12}}{2} \right) \left(\Omega_2^2 + 4(1-k_2^2) \gamma^2 \right) = 0. \quad (1.80)$$

В данном случае полный спектр колебаний состоит из спектра колебаний верхнего слоя со свободными от напряжений плоскими гранями [207] и бездисперсной моды $\Omega_2 = -i\gamma\sqrt{2/(1-\nu_2)}$.

Для определения частот записания полагаем в уравнении (1.75) $\gamma=0$ и получаем с учетом обозначений (1.57) следующее трансцендентное уравнение

$$P_{15}(0, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) = s_{12} s_{22} (G k_2 \Omega_1 s_{11} c_{21} + k_1 \Omega_2 c_{11} s_{21}) = 0, \quad (1.81)$$

Из уравнения (1.81) определяются три независимые серии частот записания, определяемых выражениями

$$\Omega_{p1} = \frac{\pi p}{\lambda_1} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad \Omega_{p2} = \frac{\pi p}{\lambda_2} \quad p=1,2,\dots, \quad (1.82)$$

$$Gk_2\Omega_1s_{11}c_{21} + k_1\Omega_2c_{11}s_{21} = 0. \quad (1.83)$$

Частоты (1.82) получены в явном виде и не зависят от коэффициентов С.Д. Пуассона ν_1, ν_2 в отличие от корней уравнения (1.83). Частоты записания SH волн определяются по формулам (1.82).

На основе соотношений (1.82), (1.83) получаем в явном виде два множества частот записания P-SV волн в однородной пластине с «расслоением»: $\pi p \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$ и $2\pi p$ ($p = \overline{1, \infty}$). Здесь вторая серия частот является двукратной.

В особом положении оказываются первые три распространяющиеся моды, которые проходят через начало координат $\gamma=0$, $\Omega=0$ и распространяются при любой частоте Ω . Для анализа скоростей этих мод при малых частотах раскладываем дисперсионную функцию $P_{15}(\gamma, \Omega)$ в ряд Б.Тейлора в окрестности точки (0, 0) и упрощаем уравнение (1.75) за счет малости величин γ и Ω . В итоге безразмерные фазовые скорости первых трех мод при $y \ll 1$ определяются по формулам

$$v_{p1}(y) = y \sqrt{\frac{\lambda_2^3(1-k_2^2) - 16G\lambda_1^3(1-k_1^2)}{3\lambda_2 - 48\lambda_1\rho}}, \quad v_{p2} = 2\sqrt{(1-k_1^2)G/\rho}, \quad v_{p3} = 2\sqrt{1-k_2^2}. \quad (1.84)$$

Из приведенных формул следует, что в низкочастотном диапазоне первая мода обладает дисперсией, а вторая и третья являются бездисперсными.

Для исследования поведения мнимых корней дисперсионного уравнения (1.75) в высокочастотной коротковолновой области ($\Omega \gg 1$, $y \gg 1$, $y > \Omega_1$, $y > \Omega_2$) устремим $y \rightarrow \infty$ и получим уравнение

$$\left((1+s_1^2)^2 - 4r_1s_1 \right) \left((1+s_2^2)^2 - 4r_2s_2 \right) \left[\rho r_1 \left((1+s_2^2)^2 - 4r_2s_2 \right) + G^2 r_2 \left((1+s_1^2)^2 - 4r_1s_1 \right) \right] = 0. \quad (1.85)$$

Левая часть уравнения (1.85) состоит из трех множителей. Из равенства нулю первых двух из них получаем уравнения для нахождения скоростей c_R волн Дж. Рэлея. Из условия равенства нулю третьего множителя имеем уравнение (1.72) для нахождения скорости c_{St} волны Р. Стоунли.

Предельные соотношения, описывающие асимптотические значения фазовой скорости в области низких (1.84) и высоких (1.85) частот, в случае однородной пластины с «расслоением» преобразуются к виду

$$v_{p1}(0) = 0, \quad v_{p2}(0) = v_{p3}(0) = 2\sqrt{1-k^2}; \quad \left((1+s^2)^2 - 4rs \right)^3 = 0. \quad (1.86)$$

Трехкратный корень уравнения (1.86) свидетельствует о том, что в однородной пластине с расслоением скорость первой моды при $\Omega \rightarrow \infty$ стремится к значению корня уравнения Дж. Рэлея снизу, а скорости второй и третьей мод – сверху. Таким образом, уравнение для волны Р. Стоунли трансформируется в уравнение для волны Дж. Рэлея.

Для проведения численных исследований характеристик волнового процесса предположим, что верхний слой пластины изготовлен из алюминия, а нижний – из вольфрама (характеристики материалов указаны выше).

Рассмотрены следующие варианты [41]: *вариант I* – $\lambda_1 = 0,1$; *вариант II* – $\lambda_1 = 1/3$; *вариант III* – $\lambda_1 = 0,5$; *вариант IV* – $\lambda_1 = 2/3$; *вариант V* – $\lambda_1 = 0,9$. Указанные варианты носят локальный характер.

В работе [41] проиллюстрировано влияние относительных толщин слоев и условий контакта на изменение частот записания мод P-SV волн, определяемых на основе дисперсионного уравнения (1.81).

На рис. 1.17 приведены дисперсионные спектры P-SV волн в пластине (а), фазовые (б) и групповые (в) скорости распространяющихся мод (*вариант II*).

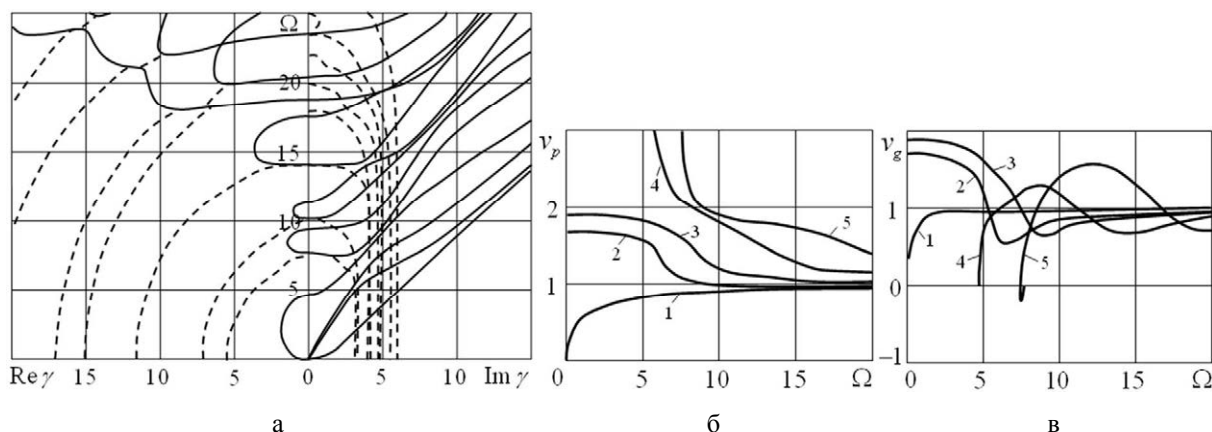


Рис. 1.14

Таким образом, с помощью метода однородных решений рассмотренные выше трехмерные задачи о колебаниях двухслойных изотропных пластин приведены к счетному множеству двумерных задач. Полученные результаты могут быть использованы для исследования напряженного состояния трехмерных тел и применены для оценки погрешности приближенных теорий.

2. Упругое равновесие трехслойных пластин. В работах [41, 175, 182, 185, 190, 191, 197, 198] рассматриваются краевые задачи пространственной теории упругости о равновесии трехслойных плит. Методом однородных решений трехмерные задачи приведены к соответствующим двумерным. В случае произвольной неоднородности слоев плиты вихревое и потенциальное решения описываются спектральными задачами для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. В явном аналитическом виде однородные решения краевых задач получены для трехслойной пластины симметричного по толщине строения. Исследовано влияние видов граничных условий на плоских гранях и контактирующих плоскостях пластины на структуру однородных решений, а также физико-механических свойств материала и геометрии на характер проявления краевого эффекта.

2.1. Постановка и решение краевых задач для трехслойных пластин с неоднородными слоями. Рассматривается упругое равновесие плиты, составленной из трех изотропных слоев толщинами $h_1, 2h_2, h_3$, где $m=1,2,3$ – номер слоя. Обозначим через $2h$ ($2h=h_1+2h_2+h_3$) толщину всей пластины. Упругие характеристики материалов слоев $\tilde{G}_m(\tilde{x}_3)$, $\nu_m(\tilde{x}_3)$ и плотности $\tilde{\rho}_m(\tilde{x}_3)$ являются кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты. Отнесем пластину к размерным прямоугольным декартовым координатам $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. Координатную плоскость $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ совместим со срединной плоскостью внутреннего слоя.

Уравнения равновесия пластины с учетом безразмерных характеристик в рамках трехмерной теории упругости имеют вид

$$G_m \nu_{m0} \partial_j \theta_m + G_m \nabla^2 u_{mj} + \frac{1}{\lambda} G'_m \left(\partial_j u_{m3} + \frac{1}{\lambda} \partial_3 u_{mj} \right) = 0 \quad (j=1, 2),$$

$$\frac{1}{\lambda} G_m \nu_{m0} \partial_3 \theta_m + G_m \nabla^2 u_{m3} + \frac{2}{\lambda^2} G'_m \partial_3 u_{m3} + \frac{2}{\lambda} \nu_{m0} (\nu'_m \nu_{m0} G_m + \nu_m G'_m) \theta_m = 0, \quad (2.1)$$

где $G_m(x_3) = \tilde{G}_m(\tilde{x}_3) / \tilde{G}_{20}$, $m=1,2,3$.

Предполагается, что на плоских гранях пластины ($x_3=d_1, x_3=-d_3$) задан один из следующих типов граничных условий:

– жесткое защемление торцов

$$u_{1i}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad u_{3i}(x_1, x_2, -d_3) = 0; \quad (2.2)$$

– торцы свободные от усилий

$$\sigma_{1i3}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad \sigma_{3i3}(x_1, x_2, -d_3) = 0; \quad (2.3)$$

– скользящая заделка торцов (условия плоского торца)

$$u_{13}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad \sigma_{1j3}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad u_{33}(x_1, x_2, -d_3) = 0, \quad \sigma_{3j3}(x_1, x_2, -d_3) = 0; \quad (2.4)$$

– торцы покрыты диафрагмой

$$\sigma_{133}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad u_{1j}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad \sigma_{333}(x_1, x_2, -d_3) = 0, \quad u_{3j}(x_1, x_2, -d_3) = 0; \quad (2.5)$$

– их комбинации

$$\sigma_{1i3}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad u_{3i}(x_1, x_2, -d_3) = 0; \quad (2.6)$$

$$\sigma_{1i3}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad u_{33}(x_1, x_2, -d_3) = 0, \quad \sigma_{3j3}(x_1, x_2, -d_3) = 0; \quad (2.7)$$

$$\sigma_{1i3}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad \sigma_{333}(x_1, x_2, -d_3) = 0, \quad u_{3j}(x_1, x_2, -d_3) = 0; \quad (2.8)$$

$$u_{13}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad \sigma_{1j3}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad u_{3i}(x_1, x_2, -d_3) = 0; \quad (2.9)$$

$$\sigma_{133}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad u_{1j}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad u_{3i}(x_1, x_2, -d_3) = 0; \quad (2.10)$$

$$\sigma_{133}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad u_{1j}(x_1, x_2, d_1) = 0, \quad u_{33}(x_1, x_2, -d_3) = 0, \quad \sigma_{3j3}(x_1, x_2, -d_3) = 0. \quad (2.11)$$

Здесь

$$i = \overline{1, 3}; \quad j = \overline{1, 2}; \quad d_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad d_3 = \lambda_2 + \lambda_3, \quad \lambda_i = h_i/h.$$

На границах раздела ($x_3 = \pm \lambda_2$) слоев выполняется одно из следующих четырех условий их сопряжения:

– непрерывность смещений и напряжений

$$\begin{aligned} u_{1i}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{2i}(x_1, x_2, \lambda_2), \quad \sigma_{1i3}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{2i3}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ u_{2i}(x_1, x_2, -\lambda_2) &= u_{3i}(x_1, x_2, -\lambda_2), \quad \sigma_{2i3}(x_1, x_2, -\lambda_2) = \sigma_{3i3}(x_1, x_2, -\lambda_2); \end{aligned} \quad (2.12)$$

– проскальзывание слоев без отрыва

$$\begin{aligned} u_{13}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{23}(x_1, x_2, \lambda_2), \quad \sigma_{133}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{233}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{113}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{123}(x_1, x_2, \lambda_2) = 0, \quad \sigma_{213}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{223}(x_1, x_2, \lambda_2) = 0, \\ u_{23}(x_1, x_2, -\lambda_2) &= u_{33}(x_1, x_2, -\lambda_2), \quad \sigma_{233}(x_1, x_2, -\lambda_2) = \sigma_{333}(x_1, x_2, -\lambda_2), \\ \sigma_{213}(x_1, x_2, -\lambda_2) &= \sigma_{223}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0, \quad \sigma_{313}(x_1, x_2, -\lambda_2) = \sigma_{323}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \end{aligned} \quad (2.13)$$

– их сочетания

$$\begin{aligned} u_{1i}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{2i}(x_1, x_2, \lambda_2), \quad \sigma_{1i3}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{2i3}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ u_{23}(x_1, x_2, -\lambda_2) &= u_{33}(x_1, x_2, -\lambda_2), \quad \sigma_{233}(x_1, x_2, -\lambda_2) = \sigma_{333}(x_1, x_2, -\lambda_2), \\ \sigma_{213}(x_1, x_2, -\lambda_2) &= \sigma_{223}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0, \quad \sigma_{313}(x_1, x_2, -\lambda_2) = \sigma_{323}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} u_{13}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{23}(x_1, x_2, \lambda_2), \quad \sigma_{133}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{233}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{113}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{123}(x_1, x_2, \lambda_2) = 0, \quad \sigma_{213}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{223}(x_1, x_2, \lambda_2) = 0, \\ u_{2i}(x_1, x_2, -\lambda_2) &= u_{3i}(x_1, x_2, -\lambda_2), \quad \sigma_{2i3}(x_1, x_2, -\lambda_2) = \sigma_{3i3}(x_1, x_2, -\lambda_2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Элементарные решения уравнений (2.1), удовлетворяющие одному из краевых условий на торцах пластины (2.2)–(2.11) и одному из условий контакта слоев (2.12)–(2.15), по-прежнему будем называть однородными. При получении однородных решений поставленных задач использован полуобратный метод [203, 204]. Компоненты вектора перемещений $u_{mi}(x_1, x_2, x_3)$ представим в виде суммы трех групп независимых решений уравнений теории упругости (2.1): вихревого, потенциального и, в отдельных случаях, гармонического или бигармонического решений (с индексом 3 сверху)

$$\begin{Bmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ u_{m3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_m(x_3) \partial_2 B(x_1, x_2) \\ -p_m(x_3) \partial_1 B(x_1, x_2) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n_m(x_3) \partial_1 C(x_1, x_2) \\ n_m(x_3) \partial_2 C(x_1, x_2) \\ q_m(x_3) C(x_1, x_2) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_{m1}^{(3)} \\ u_{m2}^{(3)} \\ u_{m3}^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (2.16)$$

Неизвестные функции $p_m(x_3)$, $B(x_1, x_2)$, $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$, $C(x_1, x_2)$, $u_{mi}^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$ в выражениях (2.16) определяются из систем уравнений равновесия (2.1) с учетом одного из граничных условий на плоских гранях плиты (2.2)–(2.11) в сочетании с одним из условий контакта (2.12)–(2.15). Метагармонические функции $B(x_1, x_2)$, $C(x_1, x_2)$ удовлетворяют уравнениям

$$D^2 B(x_1, x_2) - (\delta/\lambda)^2 B(x_1, x_2) = 0, \quad (2.17) \quad D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma/\lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0. \quad (2.18)$$

После подстановки выражений (2.16) в системы уравнений (2.1) приходим к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций $p_m(x_3)$

$$(G_m p'_m)' + G_m \delta^2 p_m = 0. \quad (2.19)$$

и функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$

$$\begin{aligned} (G_m n'_m)' + (1 + \nu_{m0}) \gamma^2 G_m n_m + \lambda (G'_m q_m + G_m \nu_{m0} q'_m) &= 0, \\ ((1 + \nu_{m0}) G_m q'_m)' + \gamma^2 G_m q_m + \frac{\gamma^2}{\lambda} (2(\nu_{m0} G_m)' n_m + G_m \nu_{m0} n'_m) &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

где δ , γ – константы разделения переменных. Системы уравнений (2.19), (2.20) совместно с граничными условиями (2.2)–(2.15) описывают краевые эффекты в задачах упругого равновесия поперечно-неоднородных изотропных пластин.

С целью получения граничных условий для функций $p_m(x_3)$ подставим выражения (2.16) в граничные условия (2.2)–(2.11) и (2.12)–(2.15).

Из условий (2.2)–(2.11) следует

$$p_1(d_1) = 0, \quad p_2(-d_3) = 0; \quad (2.21) \quad p'_1(d_1) = 0, \quad p'_2(-d_3) = 0; \quad (2.22)$$

$$p'_1(d_1) = 0, \quad p'_2(-d_3) = 0; \quad (2.23) \quad p_1(d_1) = 0, \quad p_2(-d_3) = 0; \quad (2.24)$$

$$p'_1(d_1) = 0, \quad p_2(-d_3) = 0; \quad (2.25) \quad p'_1(d_1) = 0, \quad p'_2(-d_3) = 0; \quad (2.26)$$

$$p'_1(d_1) = 0, \quad p_2(-d_3) = 0; \quad (2.27) \quad p'_1(d_1) = 0, \quad p_2(-d_3) = 0; \quad (2.28)$$

$$p_1(d_1) = 0, \quad p_2(-d_3) = 0; \quad (2.29) \quad p_1(d_1) = 0, \quad p'_2(-d_3) = 0. \quad (2.30)$$

Граничные условия (2.12)–(2.15) эквивалентны следующим

$$\begin{aligned} p_1(\lambda_2) &= p_2(\lambda_2), \quad G_1(\lambda_2) p'_1(\lambda_2) = G_2(\lambda_2) p'_2(\lambda_2), \\ p_2(-\lambda_2) &= p_3(-\lambda_2), \quad G_2(-\lambda_2) p'_2(-\lambda_2) = G_3(-\lambda_2) p'_3(-\lambda_2); \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$p'_1(\lambda_2) = 0, \quad p'_2(\lambda_2) = 0, \quad p'_2(\lambda_2) = 0, \quad p'_3(\lambda_2) = 0; \quad (2.32)$$

$$p_1(\lambda_2) = p_2(\lambda_2), \quad G_1(\lambda_2) p'_1(\lambda_2) = G_2(\lambda_2) p'_2(\lambda_2), \quad p'_2(-\lambda_2) = 0, \quad p'_3(-\lambda_2) = 0; \quad (2.33)$$

$$p'_1(\lambda_2) = 0, \quad p'_2(\lambda_2) = 0, \quad p_2(-\lambda_2) = p_3(-\lambda_2), \quad G_2(-\lambda_2) p'_2(-\lambda_2) = G_3(-\lambda_2) p'_3(-\lambda_2). \quad (2.34)$$

Аналогично получаются краевые условия для функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$. Граничные условия на плоских гранях (2.2)–(2.11) будут удовлетворены, если:

$$n_1(d_1) = 0, \quad q_1(d_1) = 0, \quad n_2(-d_3) = 0, \quad q_2(-d_3) = 0, \quad (2.35)$$

$$N_1(d_1) = 0, \quad M_1(d_1) = 0, \quad N_2(-d_3) = 0, \quad M_2(-d_3) = 0, \quad (2.36)$$

$$q_1(d_1)=0, \quad M_1(d_1)=0, \quad q_2(-d_3)=0, \quad M_2(-d_3)=0, \quad (2.37)$$

$$N_1(d_1)=0, \quad n_1(d_1)=0, \quad N_2(-d_3)=0, \quad n_2(-d_3)=0, \quad (2.38)$$

$$N_1(d_1)=0, \quad M_1(d_1)=0, \quad n_2(-d_3)=0, \quad q_2(-d_3)=0, \quad (2.39)$$

$$N_1(d_1)=0, \quad M_1(d_1)=0, \quad q_2(-d_3)=0, \quad M_2(-d_3)=0, \quad (2.40)$$

$$N_1(d_1)=0, \quad M_1(d_1)=0, \quad N_2(-d_3)=0, \quad n_2(-d_3)=0, \quad (2.41)$$

$$q_1(d_1)=0, \quad M_1(d_1)=0, \quad n_2(-d_3)=0, \quad q_2(-d_3)=0, \quad (2.42)$$

$$N_1(d_1)=0, \quad n_1(d_1)=0, \quad n_2(-d_3)=0, \quad q_2(-d_3)=0, \quad (2.43)$$

$$N_1(d_1)=0, \quad n_1(d_1)=0, \quad q_2(-d_3)=0, \quad M_2(-d_3)=0. \quad (2.44)$$

Здесь

$$M_m(x_3) = \frac{G_m}{2} \left(\frac{1}{\lambda} n'_m + q_m \right), \quad N_m(x_3) = \frac{1}{\lambda^2} G_m \nu_{m0} \left(\lambda(1 - \nu_m) q' + \gamma^2 \nu_m n_m \right).$$

Из условий контакта слоев (2.12)–(2.15) имеем

$$n_1(\lambda_2) = n_2(\lambda_2), \quad q_1(\lambda_2) = q_2(\lambda_2), \quad M_1(\lambda_2) = M_2(\lambda_2), \quad N_1(\lambda_2) = N_2(\lambda_2), \\ n_2(-\lambda_2) = n_3(-\lambda_2), \quad q_2(-\lambda_2) = q_3(-\lambda_2), \quad M_2(-\lambda_2) = M_3(-\lambda_2), \quad N_2(-\lambda_2) = N_3(-\lambda_2); \quad (2.45)$$

$$q_1(\lambda_2) = q_2(\lambda_2), \quad N_1(\lambda_2) = N_2(\lambda_2), \quad M_1(\lambda_2) = 0, \quad M_2(\lambda_2) = 0, \\ q_1(-\lambda_2) = q_3(-\lambda_2), \quad N_2(-\lambda_2) = N_3(-\lambda_2), \quad M_2(-\lambda_2) = 0, \quad M_3(-\lambda_2) = 0; \quad (2.46)$$

$$n_1(\lambda_2) = n_2(\lambda_2), \quad q_1(\lambda_2) = q_2(\lambda_2), \quad M_1(\lambda_2) = M_2(\lambda_2), \quad N_1(\lambda_2) = N_2(\lambda_2), \\ q_1(-\lambda_2) = q_3(-\lambda_2), \quad N_2(-\lambda_2) = N_3(-\lambda_2), \quad M_2(-\lambda_2) = 0, \quad M_3(-\lambda_2) = 0; \quad (2.47)$$

$$q_1(\lambda_2) = q_2(\lambda_2), \quad N_1(\lambda_2) = N_2(\lambda_2), \quad M_1(\lambda_2) = 0, \quad M_2(\lambda_2) = 0, \\ n_2(-\lambda_2) = n_3(-\lambda_2), \quad q_2(-\lambda_2) = q_3(-\lambda_2), \quad M_2(-\lambda_2) = M_3(-\lambda_2), \quad N_2(-\lambda_2) = N_3(-\lambda_2). \quad (2.48)$$

В результате вихревое и потенциальное решения описаны в терминах спектральных задач (2.19), (2.21)–(2.34) и (2.20), (2.35)–(2.48). Решения вида (2.16), соответствующие счетным множествам собственных значений $\{\delta_k\}$ вихревого и $\{\gamma_p\}$ потенциального состояний образуют систему однородных решений. Поэтому вихревое и потенциальное решения на основании соотношений (2.16) примут вид

$$u_{m1}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2), \quad u_{m2}^{(1)} = - \sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), \quad u_{m3}^{(1)} = 0; \\ u_{m1}^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_{mp}(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2), \quad u_{m2}^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_{mp}(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2), \\ u_{m3}^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} q_{mp}(x_3) C_p(x_1, x_2).$$

Здесь функции $B_k(x_1, x_2)$, $C_p(x_1, x_2)$ на основании выражений (2.17), (2.18) удовлетворяют уравнениям

$$D^2 B_k(x_1, x_2) - (\delta_k / \lambda)^2 B_k(x_1, x_2) = 0, \quad (2.49) \quad D^2 C_p(x_1, x_2) - (\gamma_p / \lambda)^2 C_p(x_1, x_2) = 0. \quad (2.50)$$

Следует иметь в виду, что в случае некоторых граничных условий на плоских гранях, например, (2.3) собственным значениям $\delta = 0$ и $\gamma = 0$ соответствуют бигармоническое $u_{mi}^{(3)}$ ($i, m = 1, 2, 3$) решение [75]. Однако в однородных решениях, соответствующих граничным условиям (2.2) и (2.6), слагаемое $u_{mi}^{(3)} = 0$. Построению решения $u_{mi}^{(3)}$ будет уделено внимание в рассматриваемых ниже задачах.

Представляет интерес выявление частных случаев изменения упругих параметров, когда можно в явном аналитическом виде найти собственные функции $p_m(x_3)$, $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$, например, случай однородных слоев.

2.2. Равновесие трехслойных пластин симметричного строения с однородными слоями.

Построение однородных решений краевых задач о равновесии трехслойных пластин и их исследование отражено в публикациях [41, 175, 182, 185, 190, 191, 197, 198].

Рассмотрим трехслойную пластину симметричного относительно срединной плоскости строения. Внешние одинаковые толщиной h_1 (λ_1) и внутренний толщиной $2h_2$ ($2\lambda_2$) слои пластины являются однородными и изотропными. Поэтому полагаем в принятых выше обозначениях упругие характеристики материалов слоев постоянными и $G_3 = G_1$, $\nu_3 = \nu_1$; $\lambda_3 = \lambda_1$, $d_1 = d_3 = 1$.

Уравнения (2.19) и (2.20) относительно функций $p_m(x_3)$ и $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ в данном случае примут вид

$$p_m''(x_3) + \delta^2 p_m(x_3) = 0; \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} n_m''(x_3) + \gamma^2(1 + \nu_{m0})n_m(x_3) + \lambda\nu_{m0}q_m'(x_3) &= 0, \\ q_m''(x_3) + \frac{\gamma^2}{1 + \nu_{m0}}q_m(x_3) + \frac{\gamma^2\nu_{m0}}{\lambda(1 + \nu_{m0})}n_m'(x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Пусть, на плоских гранях пластины ($x_3 = \pm 1$) имеет место одно из однородных граничных условий (2.21)–(2.24), (2.35)–(2.38), в которых $d_1 = d_3 = 1$. При этом условия контакта слоев имеют вид (2.31), (2.45) или (2.32), (2.46). В монографии [41] представлены решения следующих семи краевых задач, многообразие которых обусловлено сочетанием условий на плоских гранях и контактирующих плоскостях плиты.

Задача 1. Найти решение уравнений (2.51) и (2.52) с учетом граничных условий (2.21), (2.31) и (2.35), (2.45) (жесткое защемление торцов и идеальный контакт слоев).

Задачи 2–7 отличаются от предыдущей граничными условиями.

Задача 2. Скользящая заделка торцов (2.23), (2.37), контакт – идеальный (2.31), (2.45).

Задача 3. Торцы пластины покрыты диафрагмой (2.24), (2.38), контакт – идеальный (2.31), (2.45).

Задача 4. Жесткое закрепление торцов (2.21), (2.35), контакт – несовершенный (2.32), (2.46).

Задача 5. Торцы пластины свободны от напряжений (2.22), (2.36), контакт – несовершенный (2.32), (2.46).

Задача 6. Скользящая заделка торцов (2.23), (2.37), контакт – несовершенный (2.32), (2.46).

Задача 7. Торцы пластины покрыты диафрагмой (2.24), (2.38), контакт – несовершенный (2.32), (2.46).

Следует отметить, что задача о равновесии трехслойной пластины симметричного строения со свободными от напряжений плоскими гранями при условии идеального контакта слоев рассмотрена в работе [174].

В данном случае каждую из задач 1–7 о равновесии трехслойной пластины, как и однослойной пластины, целесообразно разделить на две: симметричную (обозначаемую значком «+» вверх) и кососимметричную (обозначаемую значком «-» вниз). В симметричной задаче перемещения u_{21}^+ , u_{22}^+ – четные, а u_{23}^+ – нечетная функции переменной x_3 . В кососимметричной задаче u_{21}^- , u_{22}^- – нечетные, а u_{23}^- – четная функция переменной x_3 . В случае симметричной деформации пластины для нижнего слоя ($-1 \leq x_3 \leq -\lambda_2$) имеют место соотношения

$$u_{3j}^+(x_1, x_2, x_3) = u_{1j}^+(x_1, x_2, -x_3) \quad (j = 1, 2), \quad u_{33}^+(x_1, x_2, x_3) = -u_{13}^+(x_1, x_2, -x_3),$$

а в кососимметричной – соответственно

$$u_{3j}^-(x_1, x_2, x_3) = -u_{1j}^-(x_1, x_2, -x_3) \quad (j=1, 2), \quad u_{33}^-(x_1, x_2, x_3) = u_{13}^-(x_1, x_2, -x_3).$$

Поэтому для функций $p_m(x_3)$ и $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ достаточно потребовать выполнения граничных условий (2.21)–(2.24), (2.31), (2.32) и (2.35)–(2.38), (2.45), (2.46) только при $x_3 = 1$ и $x_3 = \lambda_2$. Граничные условия при $x_3 = -1$ и $x_3 = -\lambda_2$ выполняются автоматически.

Общее решение уравнения (2.51) вихревого состояния можно представить так:

$$p_1^\pm(x_3) = a_1^\pm \cos \delta^\pm x_3 + a_2^\pm \sin \delta^\pm x_3, \quad p_2^\pm(x_3) = a_3^\pm \cos \delta^\pm x_3, \quad p_2^-(x_3) = a_3^- \sin \delta^- x_3. \quad (2.53)$$

Неизвестные параметры $a_1^\pm$, $a_2^\pm$, $a_3^\pm$, $\delta^\pm$ могут быть найдены из граничных условий на плоских гранях ($x_3 = 1$) и контактирующих плоскостях слоев ($x_3 = \lambda_2$) пластины (задачи 1–7).

Для потенциального состояния решения системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (2.52) найдены методом Л. Эйлера (L. Euler) и в тригонометрической форме имеют вид

$$\begin{aligned} n_1^\pm(x_3) &= H_1^\pm \cos \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + H_2^\pm \sin \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + \\ &\quad + H_3^\pm(x_3 - \lambda_2) \cos \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + H_4^\pm(x_3 - \lambda_2) \sin \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2), \\ q_1^\pm(x_3) &= Q_1^\pm \sin \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + Q_2^\pm \cos \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + \\ &\quad + Q_3^\pm \left((x_3 - \lambda_2) \sin \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + k_{13}^\pm \cos \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) \right) + \\ &\quad + Q_4^\pm \left((x_3 - \lambda_2) \cos \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) - k_{13}^\pm \sin \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) \right), \\ n_2^+(x_3) &= H_5^+ \cos \gamma^+ x_3 + H_6^+ x_3 \sin \gamma^+ x_3, \\ q_2^+(x_3) &= Q_5^+ \sin \gamma^+ x_3 + Q_6^+ \left(x_3 \cos \gamma^+ x_3 - k_{23}^+ \sin \gamma^+ x_3 \right), \\ n_2^-(x_3) &= H_5^- \sin \gamma^- x_3 + H_6^- x_3 \cos \gamma^- x_3, \\ q_2^-(x_3) &= Q_5^- \cos \gamma^- x_3 + Q_6^- \left(x_3 \sin \gamma^- x_3 + k_{23}^- \cos \gamma^- x_3 \right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

где

$$\begin{aligned} k_{m3}^\pm &= (3 - 4\nu_m) / \gamma^\pm, \quad Q_i^\pm = \lambda^{-1} a_i^\pm H_i^\pm \quad (i = \overline{1, 6}), \\ a_1^\pm &= a_3^\pm = -\gamma^\pm, \quad a_2^\pm = a_4^\pm = \gamma^\pm, \quad a_5^\pm = \mp \gamma^\pm, \quad a_6^\pm = \pm \gamma^\pm. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Неизвестные коэффициенты $H_i^\pm$ в функциях (2.54) и параметр γ определяются из граничных условий на торцах ($x_3 = 1$) и плоскостях контакта ($x_3 = \lambda_2$) пластины.

2.3. Однородные решения краевых задач для трехслойных плит симметричного строения с идеальным контактом слоев. Рассмотрим краевые задачи 1–3 об упругом равновесии трехслойной пластины, слои которой находятся в условиях идеального контакта (2.12).

Из граничных условий (2.31) для функций $p_m(x_3)$ следует

$$p_1(\lambda_2) = p_2(\lambda_2), \quad G p_1'(\lambda_2) = p_2'(\lambda_2). \quad (2.56)$$

где $G = G_1/G_2$.

Граничные условия (2.45), соответствующие сопряжению слоев (2.12), для функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ при $x_3 = \lambda_2$ примут вид

$$\begin{aligned} n_1(\lambda_2) &= n_2(\lambda_2), \quad q_1(\lambda_2) = q_2(\lambda_2), \quad G[\lambda q_1(\lambda_2) + n_1'(\lambda_2)] = \lambda q_2(\lambda_2) + n_2'(\lambda_2), \\ G[\gamma^2(\nu_{10} - 1)n_1(\lambda_2) + \lambda(\nu_{10} + 1)q_1'(\lambda_2)] &= \gamma^2(\nu_{20} - 1)n_2(\lambda_2) + \lambda(\nu_{20} + 1)q_2'(\lambda_2). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Перейдем к удовлетворению граничных условий на плоских гранях плиты.

Жесткое защемление торцов. В задаче 1 для нахождения неизвестных параметров $a_1^\pm$, $a_2^\pm$, $a_3^\pm$, $\delta^\pm$ в соотношениях (2.53) вихревого решения удовлетворим граничным условиям при $x_3 = 1$ и $x_3 = \lambda_2$. Условия (2.21) для функции $p_1(x_3)$ при $x_3 = 1$ эквивалентны следующему

$$p_1(1) = 0. \quad (2.58)$$

Подставим выражения (2.53) в граничные условия (2.56), (2.58) и получим однородные системы уравнений относительно неизвестных $a_1^\pm$, $a_2^\pm$, $a_3^\pm$, $\delta^\pm$:

$$\begin{aligned} a_1^\pm \cos \delta^\pm + a_2^\pm \sin \delta^\pm &= 0, \quad a_1^\pm \cos \delta^\pm \lambda_2 + a_2^\pm \sin \delta^\pm \lambda_2 - a_3^\pm \frac{\cos \delta^\pm}{\sin \delta^\pm} \lambda_2 = 0, \\ Ga_1^\pm \delta^\pm \sin \delta^\pm \lambda_2 - Ga_2^\pm \delta^\pm \cos \delta^\pm \lambda_2 \mp a_3^\pm \delta^\pm \frac{\sin \delta^\pm}{\cos \delta^\pm} \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Из условия равенства нулю определителей систем (2.59) получим трансцендентные уравнения относительно собственных значений $\delta_k^\pm$

$$\begin{aligned} V_{21}^+(\delta; G, \lambda_1, \lambda_2) &= G \cos \delta_k^+ \lambda_1 \cos \delta_k^+ \lambda_2 - \sin \delta_k^+ \lambda_1 \sin \delta_k^+ \lambda_2 = 0, \\ V_{21}^-(\delta; G, \lambda_1, \lambda_2) &= G \cos \delta_k^- \lambda_1 \sin \delta_k^- \lambda_2 + \sin \delta_k^- \lambda_1 \cos \delta_k^- \lambda_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

Трансцендентные уравнения (2.60) определяют счетные множества собственных значений $\delta_k^\pm$ и δ_k^- ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Корни этих уравнений зависят от параметров G , λ_1 , λ_2 , являются действительными и расположены симметрично относительно нуля.

После решения двух систем линейных алгебраических уравнений (2.59) относительно неизвестных $a_1^\pm$, $a_2^\pm$, $a_3^\pm$ собственные функции $p_m^\pm(x_3)$ в вихревом решении получаются такими:

$$\begin{aligned} p_{1k}^+(x_3) &= -\frac{1}{G} \sin \lambda_2 \delta_k^+ \sin(x_3 - \lambda_2) \delta_k^+ + \cos \lambda_2 \delta_k^+ \cos(x_3 - \lambda_2) \delta_k^+, \quad p_{2k}^+(x_3) = \cos \delta_k^+ x_3, \\ p_{2k}^-(x_3) &= \frac{1}{\delta_k^-} \sin \delta_k^- x_3, \quad p_{1k}^-(x_3) = \frac{1}{\delta_k^-} \left[\frac{1}{G} \cos \lambda_2 \delta_k^- \sin(x_3 - \lambda_2) \delta_k^- + \sin \lambda_2 \delta_k^- \cos(x_3 - \lambda_2) \delta_k^- \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Корни уравнений (2.60) являются только вещественными. Поэтому вихревое состояние представляет собой решение типа погранслоя, проникание которого внутрь области определяется первым положительным корнем $\delta_1^\pm$.

Для потенциального решения из условий (2.35) для функций $n_m^\pm(x_3)$, $q_m^\pm(x_3)$ на плоских гранях получим

$$n_1(1) = 0, \quad q_1(1) = 0. \quad (2.62)$$

Неизвестные коэффициенты $H_{mi}^\pm$ ($m = 1, 2$, $i = \overline{1, 4}$) в выражениях (2.54) находятся из граничных условий (2.57), (2.62) путем решения однородных систем линейных алгебраических уравнений шестого порядка [41, 185]. Для определения собственных значений $\gamma_p^\pm$ имеем уравнения [185]

$$P_{21}^\pm(\gamma) = \pm C_1 \sin 2\gamma^\pm \pm C_2 \sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm C_3 \sin 2\gamma^\pm (\lambda_2 - \lambda_1) + C_4 \cos 2\gamma^\pm \lambda_1 + C_5 = 0. \quad (2.63)$$

Как и в однородной пластине в случае жесткого защемления торцов здесь решение $u_{mi}^{(3)} = 0$ ($m = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$).

Смешанные граничные условия типа плоского торца [41, 175]. В случае краевой задачи 2 граничные условия (2.23) для функции $p_1(x_3)$ и (2.37) для функций $n_1(x_3)$, $q_1(x_3)$ в плоскости $x_3 = 1$ имеют вид

$$p_1'(1) = 0, \quad (2.64) \quad \lambda q_1(1) + n_1'(1) = 0, \quad q_1(1) = 0. \quad (2.65)$$

В данном случае для нахождения собственных функций $p_m(x_3)$ и собственных значений δ вихревого состояния подставим выражения (2.53) в граничные условия (2.56), (2.64) и получим однородные системы уравнений

$$a_1^\pm \delta^\pm \sin \delta^\pm - a_2^\pm \delta^\pm \cos \delta^\pm = 0, \quad a_1^\pm \cos \delta^\pm \lambda_2 + a_2^\pm \sin \delta^\pm \lambda_2 - a_3^\pm \frac{\cos}{\sin} \delta^\pm \lambda_2 = 0, \\ Ga_1^\pm \delta^\pm \sin \delta^\pm \lambda_2 - Ga_2^\pm \delta^\pm \cos \delta^\pm \lambda_2 \mp a_3^\pm \delta^\pm \frac{\sin}{\cos} \delta^\pm \lambda_2 = 0. \quad (2.66)$$

Из условия равенства нулю определителей однородных систем (2.66) получаем трансцендентные уравнения для нахождения собственных значений $\delta^\pm$

$$V_{22}^+(\delta; G, \lambda_1, \lambda_2) = G \sin \delta^+ \lambda_1 \cos \delta^+ \lambda_2 + \cos \delta^+ \lambda_1 \sin \delta^+ \lambda_2 = 0, \\ V_{23}^-(\delta; G, \lambda_1, \lambda_2) = G \sin \delta^- \lambda_1 \sin \delta^- \lambda_2 - \cos \delta^- \lambda_1 \cos \delta^- \lambda_2 = 0. \quad (2.67)$$

Уравнения (2.67) имеют счетные множества решений δ_k^+ и δ_k^- ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) с точкой сгущения на бесконечности. Корни этих уравнений являются только действительными и расположены симметрично относительно нуля, а их значения зависят от параметров G , λ_1 , λ_2 и не зависят от коэффициентов Пуассона ν_1 , ν_2 .

Из выражений (2.66) также находим

$$a_{1k}^+ = a_{3k}^+ (\cos^2 \delta_k^+ \lambda_2 + G^{-1} \sin^2 \delta_k^+ \lambda_2), \quad a_{2k}^+ = a_{3k}^+ (1 - G^{-1}) \sin \delta_k^+ \lambda_2 \cos \delta_k^+ \lambda_2, \\ a_{1k}^- = a_{3k}^- (1 - G^{-1}) \cos \delta_k^- \lambda_2 \sin \delta_k^- \lambda_2, \quad a_{2k}^- = a_{3k}^- (\sin^2 \delta_k^- \lambda_2 + G^{-1} \cos^2 \delta_k^- \lambda_2). \quad (2.68)$$

Функции $p_{mk}^\pm$ ($k = 1, 2, \dots$) имеют вид

$$p_{1k}^+(x_3) = \cos \delta_k^+ \lambda_2 \cos \delta_k^+(x_3 - \lambda_2) - \frac{1}{G} \sin \delta_k^+ \lambda_2 \sin \delta_k^+(x_3 - \lambda_2), \quad p_{2k}^+(x_3) = \cos \delta_k^+ x_3, \\ p_{1k}^-(x_3) = \frac{1}{\delta_k^-} \left(\sin \delta_k^- \lambda_2 \cos \delta_k^-(x_3 - \lambda_2) + \frac{1}{G} \cos \delta_k^- \lambda_2 \sin \delta_k^-(x_3 - \lambda_2) \right), \quad p_{2k}^-(x_3) = \frac{1}{\delta_k^-} \sin \delta_k^- x_3. \quad (2.69)$$

Значениям $\delta_k^\pm$ соответствуют метагармонические функции $B_k^\pm(x_1, x_2)$, которые удовлетворяют уравнениям (2.49).

Следовательно, однородные решения, соответствующие вихревому состоянию, можно записать так:

$$u_{m1}^{(1)\pm}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}^\pm(x_3) \partial_2 B_k^\pm(x_1, x_2), \quad u_{m2}^{(1)\pm}(x_1, x_2, x_3) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}^\pm(x_3) \partial_1 B_k^\pm(x_1, x_2), \quad u_{m3}^{(1)\pm} = 0. \quad (2.70)$$

Здесь суммирование ведется только по положительным корням уравнений (2.67) из-за четности функций $p_{mk}^\pm$ и $B_k^\pm(x_1, x_2)$ по параметру $\delta_k^\pm$.

Исследовано поведение первого положительного корня уравнения (2.67) и проникание погранслоя внутрь области, обусловленное первым положительным корнем $\delta_1^\pm$.

В потенциальном решении неизвестные коэффициенты $H_i^\pm$ ($i = \overline{1, 6}$) определяются из выражений (2.54), (2.55) и условий (2.65), (2.57) и приведены в работах [41, 175]. Уравнения для нахождения собственных значений $\gamma^\pm$ получаются такими:

$$P_{22}^{\pm}(\gamma, G, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \left((3-4\nu_1) \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 - 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \right) \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) + \\ + G^2 \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 + 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \right) \left((3-4\nu_2) \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \mp 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) + 2G \left[\left((1-2\nu_1) \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 - 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \right) \times \right. \\ \left. \times \left((1-2\nu_2) \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \mp 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) - 4(1-\nu_1)(1-\nu_2) \left(\cos 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \cos 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \mp 1 \right) \right] = 0. \quad (2.71)$$

Уравнения (2.71) имеют счетное множество действительных или комплексных корней $\gamma_p^{\pm}$. Поэтому потенциальное решение носит характер погранслоя. Все корни расположены симметрично в четырех квадрантах комплексной плоскости.

Собственным значениям $\gamma_p^{\pm}$ соответствуют функции $n_{mp}(x_3)$, $q_{mp}(x_3)$, $C_p(x_1, x_2)$. Поскольку функции $n_{mp}(x_3)$, $q_{mp}(x_3)$ являются четными по параметру $\gamma_p^{\pm}$, то будем рассматривать только те корни уравнений (2.71), действительная часть которых больше нуля. Поэтому формулы (2.16) для перемещений потенциального состояния примут вид

$$u_{mj}^{(2)\pm}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_{mp}^{\pm}(x_3) \partial_j C_p^{\pm}(x_1, x_2) \quad (j=1, 2), \\ u_{m3}^{(2)\pm}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} q_{mp}^{\pm}(x_3) C_p^{\pm}(x_1, x_2). \quad (2.72)$$

С целью подтверждения достоверности полученных результатов исследованы некоторые частные случаи трансцендентных уравнений (2.71) и получены предельные соотношения.

Представляют интерес предельные случаи, когда один из слоев является мягким, а другой – жестким. Если $G \rightarrow 0$ (внешние слои – мягкие по сравнению с внутренним или внутренний – жесткий по сравнению с внешними), то из уравнений (2.71) получаем

$$(3-4\nu_1) \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 - 2\gamma^{\pm} \lambda_1 = 0, \quad (2.73) \quad \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm 2\gamma^{\pm} \lambda_2 = 0. \quad (2.74)$$

Уравнения (2.73) по виду совпадают с $(3-4\nu) \sin 2\gamma_p^{\pm} h \mp 2\gamma_p^{\pm} h = 0$, полученными при решении задачи о равновесии однослойной пластины с жестко защемленными торцами. Известные уравнения (2.74) имели место в задаче об упругом равновесии пластины при отсутствии напряжений на плоских гранях [205]. Другие случаи рассмотрены в работах [41, 175].

Значения $\delta_0^+ = \gamma_0^+ = 0$ являются в совокупности кратным корнем уравнений (2.67), (2.71). Поэтому возможно существование решения, соответствующего нулевому собственному значению. Для построения таких решений используются различные методы [110]. В работе [174] на основе спектральной теории операторов предложено построение бигармонического решения в форме жордановой цепочки. В некоторых случаях для этих целей можно использовать полуобратный метод. Для его применения необходимо знать кратность нулевого корня. В случае четырехкратного нулевого собственного значения бигармоническое решение может быть найдено в виде

$$u_{m1}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \partial_1 \left(\Phi_{m0} + \Phi_{mC} + \Phi_{m1}x_3 + \Phi_{m2}x_3^2 + \Phi_{m3}x_3^3 \right) \\ u_{m2}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \partial_2 \left(\Phi_{m0} - \Phi_{mC} + \Phi_{m1}x_3 + \Phi_{m2}x_3^2 + \Phi_{m3}x_3^3 \right), \\ u_{m3}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \Psi_{m0} + \Psi_{m1}x_3 + \Psi_{m2}x_3^2 + \Psi_{m3}x_3^3 \quad (m=1, 2),$$

где $\Phi_{mi} = \Phi_{mi}(x_1, x_2)$, $\Phi_{mC} = \Phi_{mC}(x_1, x_2)$, $\Psi_{mi} = \Psi_{mi}(x_1, x_2)$ – некоторые функции, которые определяются из удовлетворения уравнений равновесия (2.1) (при постоянных G_m и ν_m), условий на торцах (2.4) и плоскостях контакта (2.12) слоев пластины.

В данной задаче компоненты вектора перемещений бигармонического решения имеют вид [41]

$$\begin{aligned} u_{11}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1 \left(\Phi + \Phi_C + (a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2) D^2 \Phi \right), \\ u_{12}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \left(\Phi - \Phi_C + (a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2) D^2 \Phi \right), \\ u_{13}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &= (b_0 + b_1 x_3) D^2 \Phi, \quad u_{21}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) = \partial_1 \left(\Phi + \Phi_C + e_2 x_3^2 D^2 \Phi \right), \\ u_{22}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \left(\Phi - \Phi_C + e_2 x_3^2 D^2 \Phi \right), \quad u_{23}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) = e_1 x_3 D^2 \Phi; \quad u_{mi}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Для однородной пластины ($G = 1$, $\nu_1 = \nu_2$) решение (2.75) принимает вид

$$\begin{aligned} u_1^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1 (\Phi + \Phi_C), \quad u_2^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) = \partial_2 (\Phi - \Phi_C), \\ u_3^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &= 0, \quad u_i^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) \equiv 0; \\ D^2 D^2 \Phi(x_1, x_2) &= 0, \quad \partial_2^2 \Phi_C = -\partial_1^2 \Phi_C = (1 - \nu) D^2 \Phi \end{aligned}$$

и совпадает с известным, полученным в работе [206].

Таким образом, в задаче упругого равновесия трехслойной пластины в случае смешанных граничных условий типа плоского торца и идеального контакта слоев однородные решения представлены суммой вихревого, потенциального и бигармонического решений.

Покрывание диафрагмой плоских граней [41, 191]. Рассмотрим краевую задачу 3 об упругом равновесии трехслойной пластины, на плоских гранях которой отсутствуют касательные смещения и нормальная компонента напряжений. Слои пластины, как и прежде, находятся в условиях идеального контакта (2.12).

На основании условий (2.24), (2.38) получим такие ограничения на функции $p_m(x_3)$ и $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$:

$$p_1(1) = 0; \quad (2.76) \quad n_1(1) = 0, \quad \gamma^2(\nu_{10} - 1)n_1(1) + \lambda(\nu_{10} + 1)q'_1(1) = 0. \quad (2.77)$$

В силу того, что в данном случае граничные условия (2.76) на плоских гранях для функции $p_1(x_3)$ совпадают с аналогичными (2.58) в задаче 1, потому вихревое состояние имеет вид (2.60), (2.61) и как следствие

$$V_{23}^{\pm}(\delta; G, \lambda_1, \lambda_2) \equiv V_{21}^{\pm}(\delta; G, \lambda_1, \lambda_2). \quad (2.78)$$

В потенциальном решении с целью нахождения коэффициентов $H_i^{\pm}$ ($i = \overline{1, 6}$) собственных функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ в виде (2.54), и собственных значений γ необходимо удовлетворить краевым условиям (2.57), (2.77). Трансцендентные уравнения относительно собственных значений $\gamma^{\pm}$ имеют вид

$$\begin{aligned} P_{23}^{\pm}(\gamma; G, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) &\equiv \left(\kappa_{13} \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 + 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \right) \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) + \\ &+ G^2 \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 - 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \right) \left(\kappa_{23} \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \mp 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) + 2G \left[\left(\kappa_{11} \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 + 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(\kappa_{21} \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \mp 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) - \kappa_{12} \kappa_{22} \left(\cos 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \cos 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm 1 \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Уравнения (2.79) определяют счетное множество собственных значений $\gamma_p^{\pm}$, которым соответствуют собственные функции $n_{mp}(x_3)$, $q_{mp}(x_3)$, а также функции $C_p(x_1, x_2)$, определяемые из уравнений (2.50). Таким образом, формулы для перемещений потенциального состояния примут вид (2.72). Рассмотрены некоторые частные случаи трансцендентных уравнений (2.79).

Собственное значение $\delta_0^- = \gamma_0^- = 0$ является в совокупности кратным корнем уравнений (2.60), (2.79). Поэтому ему соответствует гармоническое решение. Составляющие вектора перемещений гармонического состояния представляются в виде [41]

$$\begin{aligned} u_{mi}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &\equiv 0 \quad (i=1, 2, 3); \\ u_{11}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1(a_0 F + (a_1 + e_1)x_3 F), \quad u_{12}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) = \partial_2(a_0 F + (a_1 + e_1)x_3 F), \\ u_{13}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) &= F, \quad u_{21}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) = \partial_1(e_1 x_3 F), \\ u_{22}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2(e_1 x_3 F), \quad u_{23}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) = F. \end{aligned} \quad (2.80)$$

В результате, в задаче 3 однородные решения представляются суммой вихревого, потенциального и гармонического состояний.

Таким образом, изменение граничных условий на торцах пластины приводит к изменению вида собственных функций и структуры однородных решений.

2.4. Однородные решения краевых задач для трехслойных плит симметричного строения с несовершенным контактом слоев [41, 182, 190, 197, 198]. Рассмотрим краевые задачи 4–7 об упругом равновесии трехслойной пластины, слои которой находятся в условиях скользящего контакта (2.13). Тогда для функций $p_m(x_3)$, $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ из условий (2.32) и (2.46) при $x_3 = \lambda_2$ следует

$$p'_1(\lambda_2) = 0, \quad p'_2(\lambda_2) = 0; \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} q_1(\lambda_2) &= q_2(\lambda_2), \quad \lambda q_1(\lambda_2) + n'_1(\lambda_2) = 0, \quad \lambda q_2(\lambda_2) + n'_2(\lambda_2) = 0, \\ G[\gamma^2(\nu_{10} - 1)n_1(\lambda_2) + \lambda(\nu_{10} + 1)q'_1(\lambda_2)] &= \gamma^2(\nu_{20} - 1)n_2(\lambda_2) + \lambda(\nu_{20} + 1)q'_2(\lambda_2). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Перейдем к удовлетворению граничных условий на плоских гранях плиты в каждой из рассмотренных задач с учетом условий контакта слоев (2.81) и (2.82).

Жесткое защемление торцов [41, 197]. В задаче 4 из условий (2.58), (2.81) получим трансцендентные уравнения относительно $\delta_k^\pm$

$$V_{24}^+(\delta; \lambda_1, \lambda_2) = \cos \delta^+ \lambda_1 \sin \delta^+ \lambda_2 = 0, \quad V_{24}^-(\delta; \lambda_1, \lambda_2) = \cos \delta^- \lambda_1 \cos \delta^- \lambda_2 = 0.$$

и собственные функции $p_{mk}^\pm(x_3)$

$$\begin{aligned} p_{1k}^\pm(x_3) &= \cos \delta_{1k}^\pm (x_3 - \lambda_2), \quad p_{2k}^\pm(x_3) = \cos \delta_{2k}^\pm x_3, \quad p_{2k}^\pm(x_3) = \frac{1}{\delta_{2k}^\pm} \sin \delta_{2k}^\pm x_3, \\ \delta_{1k}^\pm &= \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_1}, \quad \delta_{2k}^\pm = \frac{\pi k}{\lambda_2}, \quad \delta_{2k}^\pm = \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_2}, \quad \{\delta_k^\pm\} = \{\delta_{1k}^\pm\} \cup \{\delta_{2k}^\pm\}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Аналогично, неизвестные коэффициенты $H_i^\pm$ и параметры $\gamma^\pm$ в выражениях (2.54) потенциального состояния находятся на основании краевых условий (2.62), (2.82) и приведены в монографии [41]. При этом собственные значения $\gamma_p^\pm$ находятся из трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} P_{24}^\pm(\gamma; G, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) &= (1 - \nu_1) \left((3 - 4\nu_1) \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 - 2\gamma^\pm \lambda_1 \right) \left(\sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) \pm \\ &\pm 4G(1 - \nu_2) \left((3 - 4\nu_1) \cos^2 \gamma^\pm \lambda_1 - (\gamma^\pm \lambda_1)^2 + (1 - 2\nu_1)^2 \right) \frac{\sin^2 \gamma^\pm \lambda_2}{\cos^2 \gamma^\pm \lambda_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Все корни $\gamma_p^\pm$ уравнений (2.84) обладают такими же свойствами, как и корни полученных выше уравнений (2.63), (2.71), (2.79) в задачах 1–3. Исследованы некоторые предельные случаи трансцендентных уравнений (2.84).

В симметричной задаче нулевые собственные значения $\delta_0^+ = \gamma_0^+ = 0$ в вихревом и потенциальном состояниях являются в совокупности кратными и им соответствует бигармоническое решение. Компоненты вектора перемещений бигармонического состояния $u_{mi}^{(3)\pm}$ ($m=1, 2$, $i=\overline{1, 3}$) имеют вид [197]

$$\begin{aligned} u_{1j}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &= (1-x_3)(a_0^+ + a_1^+ x_3) \partial_j D^2 \Phi^+ \quad (j=1, 2), \\ u_{13}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &= b_0^+ (1-x_3) D^2 \Phi^+, \quad u_{21}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) = \partial_1 (\Phi^+ + \Phi_C + e_2^+ x_3^2 D^2 \Phi^+), \\ u_{22}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 (\Phi^+ - \Phi_C + e_2^+ x_3^2 D^2 \Phi^+), \quad u_{23}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) = e_1^+ x_3 D^2 \Phi^+; \\ u_{mi}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) &= 0 \quad (i=\overline{1, 3}, m=1, 2). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Следует отметить, что по сравнению с задачей 1 при скользящем контакте слоев и симметричной относительно срединной плоскости деформации пластины изменяется структура однородных решений и появляется бигармоническое состояние.

Свободные от напряжений торцы [41, 190]. В этом случае решение краевой задачи 5 можно представить в виде суммы вихревого, потенциального и бигармонического состояний.

После удовлетворения граничных условий (2.81) и (2.86)

$$p'_1(1) = 0 \quad (2.86)$$

получим собственные функции $p_{mk}^\pm(x_3)$ и собственные значения $\delta_k^\pm$ вихревого решения

$$\begin{aligned} p_{1k}^\pm(x_3) &= \cos \delta_{1k}^\pm (x_3 - \lambda_2), \quad p_{2k}^\pm(x_3) = \cos \delta_{2k}^\pm x_3, \quad p_{2k}^\pm(x_3) = \frac{1}{\delta_{2k}^\pm} \sin \delta_{2k}^\pm x_3, \\ \delta_{1k}^\pm &= \frac{\pi k}{\lambda_1}, \quad \delta_{2k}^\pm = \frac{\pi k}{\lambda_2}, \quad \delta_{2k}^\pm = \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_2}, \quad \{\delta_k^\pm\} = \{\delta_{1k}^\pm\} \cup \{\delta_{2k}^\pm\}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Следовательно, вихревое решение может быть записано в виде (2.70).

В потенциальном решении для определения собственных значений γ и собственных функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ подставим выражения (2.54) в граничные условия (2.82) и (2.88)

$$\lambda q_1(1) + n'_1(1) = 0, \quad \gamma^2 (\nu_{10} - 1) n_1(1) + \lambda (\nu_{10} + 1) q'_1(1) = 0 \quad (2.88)$$

и получим однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно $H_i^\pm$, решения которых приведены в работе [190]. Трансцендентные уравнения относительно $\gamma^\pm$ получаются такими:

$$\begin{aligned} P_{25}^\pm(\gamma) &= 2K \left(\sin 2\gamma^\pm \lambda_1 + 2\gamma^\pm \lambda_1 \right) \left(\sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) \mp \\ &\mp 4 \left(\sin^2 \gamma^\pm \lambda_1 - (\gamma^\pm \lambda_1)^2 \right) \left(1 \mp \cos 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Уравнения (2.89) не имеют мнимых корней. Кроме того, по сравнению с идеальным контактом слоев [114], здесь все корни данных трансцендентных уравнений (2.89) являются комплексными. Спектры собственных значений $\gamma^\pm$ исследованы в работах [41, 190].

Установлено, что в случае несовершенного контакта невозможен переход к однослойной пластине, если принять одинаковыми упругие характеристики материалов слоев $G=1$ и $\nu_1 = \nu_2$.

В бигармоническом решении ограничимся рассмотрением только симметричной деформации пластины относительно срединной плоскости, а знак «+» над величинами опустим.

Для кратного собственного значения $\delta_0 = \gamma_0 = 0$ компоненты вектора перемещений бигармонического решения таковы:

$$\begin{aligned} u_{11}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1 \left((1 + \nu_1) \Phi + \Phi_C + \lambda^2 \left(\lambda_2 (\nu_1 - \nu_2) - \frac{\nu_1}{2} x_3 \right) x_3 D^2 \Phi \right), \\ u_{12}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \left((1 + \nu_1) \Phi - \Phi_C + \lambda^2 \left(\lambda_2 (\nu_1 - \nu_2) - \frac{\nu_1}{2} x_3 \right) x_3 D^2 \Phi \right), \\ u_{13}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= \lambda (\lambda_2 (\nu_2 - \nu_1) + \nu_1 x_3) D^2 \Phi, \\ u_{21}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1 \left((1 + \nu_2) \Phi + \Phi_C - \frac{\lambda^2 \nu_2}{2} x_3^2 D^2 \Phi \right), \\ u_{22}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \left((1 + \nu_2) \Phi - \Phi_C - \frac{\lambda^2 \nu_2}{2} x_3^2 D^2 \Phi \right), \quad u_{23}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \lambda \nu_2 x_3 D^2 \Phi. \end{aligned}$$

Скольльзящая заделка торцов. Рассмотрим краевую задачу 6. Для нахождения собственных функций $p_m(x_3)$ и собственных значений δ в вихревом решении в данном случае необходимо удовлетворить краевым условиям (2.86) и (2.81). Тогда собственные функции $p_{mk}^{\pm}(x_3)$ совпадают с аналогичными в задаче 5 и имеют вид (2.87).

Собственные функции $n_m^{\pm}(x_3)$, $q_m^{\pm}(x_3)$ заданы соотношениями (2.54). Коэффициенты $H_i^{\pm}$ ($i = \overline{1, 6}$) представлены в работе [198]. Собственные значения $\gamma^{\pm}$ удовлетворяют с учетом обозначений [41] уравнениям

$$\begin{aligned} P_{26}^{\pm}(\gamma; G, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) &= 2\kappa_{12} \sin^2 \gamma^{\pm} \lambda_1 \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) \pm \\ &\pm G\kappa_{22} \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 + 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \right) \left(1 \mp \cos 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Все корни уравнений (2.90) являются действительными или комплексными, расположенными симметрично в четырех квадрантах плоскости. Рассмотрены частные случаи трансцендентных уравнений (2.90) в работах [41, 198].

Значение $\delta_0^{\pm} = \gamma_0^{\pm} = 0$ является в совокупности кратной точкой спектра и ей соответствует бигармоническое решение. Компоненты вектора перемещений бигармонического состояния таковы [41]:

$$\begin{aligned} u_{11}^{(3)\pm}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1 \left(\Phi^{\pm} + \Phi_C^{\pm} + a_2^{\pm} (x_3 - 1)^2 D^2 \Phi^{\pm} \right), \\ u_{12}^{(3)\pm}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \left(\Phi^{\pm} - \Phi_C^{\pm} + a_2^{\pm} (x_3 - 1)^2 D^2 \Phi^{\pm} \right), \\ u_{13}^{(3)\pm}(x_1, x_2, x_3) &= a_1^{\pm} (x_3 - 1) D^2 \Phi^{\pm}, \quad u_{21}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) = \partial_1 \left(e_0^+ \Phi^+ + \Phi_C^+ + e_2^+ x_3^2 D^2 \Phi^+ \right), \\ u_{22}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \left(e_0^+ \Phi^+ - \Phi_C^+ + e_2^+ x_3^2 D^2 \Phi^+ \right), \quad u_{23}^{(3)+}(x_1, x_2, x_3) = e_1^+ x_3 D^2 \Phi^+, \\ u_{21}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) &= e_1^- x_3 \partial_1 D^2 \Phi^-, \quad u_{22}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) = e_1^- x_3 \partial_2 D^2 \Phi^-, \quad u_{23}^{(3)-}(x_1, x_2, x_3) = e_0^- D^2 \Phi^-. \end{aligned}$$

Таким образом, однородные решения в задаче 6 представляются в виде суммы вихревого, потенциального и бигармонического состояний.

Покрывание диафрагмой плоских граней [41, 197]. Для нахождения собственных функций $p_m(x_3)$ и собственных значений δ в вихревом решении в данном случае (задача 7) необходимо удовлетворить краевым условиям (2.76), (2.81). Здесь собственные функции $p_{mk}^{\pm}(x_3)$ и собственные значения $\delta_k^{\pm}$ совпадают с аналогичными в задаче 4 примут вид (2.83).

Коэффициенты $H_i^\pm$ ($i=\overline{1,6}$) собственных функций $n_m^\pm(x_3)$, $q_m^\pm(x_3)$, заданных соотношениями (2.54), в задаче 7 получены в работе [197]. Собственные значения $\gamma_p^\pm$ находятся из трансцендентных уравнений

$$P_{27}^\pm(\gamma; G, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv 2(1-\nu_1)\cos^2 \gamma^\pm \lambda_1 (\sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 2\gamma^\pm \lambda_2) \mp \\ \mp G(1-\nu_2)(\sin 2\gamma^\pm \lambda_1 - 2\gamma^\pm \lambda_1)(1 \mp \cos 2\gamma^\pm \lambda_2) = 0. \quad (2.91)$$

Все корни $\gamma_p^\pm$ уравнений (2.91) являются действительными или комплексными, расположенными симметрично в четырех квадрантах γ -плоскости. Среди корней нет мнимых, поэтому потенциальное решение носит характер погранслоя. Рассмотрены предельные случаи трансцендентных уравнений (2.91).

В симметричной и кососимметричной задачах нулевые собственные значения $\delta_0^\pm = \gamma_0^\pm = 0$ в вихревом и потенциальном состояниях являются в совокупности кратными и им соответствует бигармоническое решение. Компоненты вектора перемещений бигармонического состояния $u_{mi}^{(3)\pm}$ ($m=1, 2$, $i=\overline{1,3}$) приведены в работах [41, 197].

2.5. Исследование решений трансцендентных уравнений и краевых эффектов. В монографии [41] проведены численно-аналитические исследования корней $\delta_k^\pm$ и $\gamma_p^\pm$ трансцендентных уравнений (2.60), (2.67), (2.78) вихревого и (2.63), (2.71), (2.79), (2.84), (2.89), (2.90), (2.91) потенциального состояний и на их основе выявлено изменение краевых эффектов. В частности, на рис. 2.1 и рис. 2.2 представлены графики изменения первого собственного значения $\delta_1^\pm$ для задач 2 и 3 – корни уравнений (2.67) и (2.78) – в зависимости от относительной жесткости G при $\lambda_1=0,9$, $\lambda_2=0,1$ (рис. 2.1) и относительной толщины внешних слоев λ_1 при $G=10$ (рис. 2.2). Сплошные кривые, обозначенные «1+» и «1–», соответствуют плоскому торцу (задача 2), а штриховые, обозначенные «2+» и «2–», – диафрагме (задача 3). Знаки «+» и «–» после цифр означают тип симметрии деформации. Причем точки на кривых с абсциссами $\lg G=0$, $\lambda_1=0$ и $\lambda_1=1$ соответствуют однородной пластине, что частично подтверждает достоверность результатов.

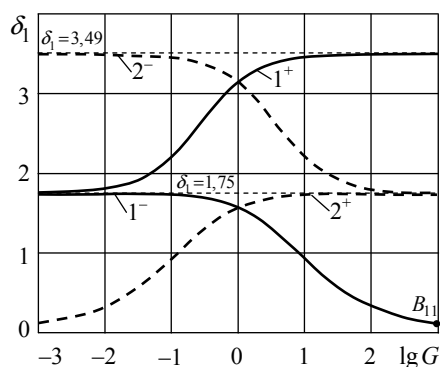


Рис. 2.1

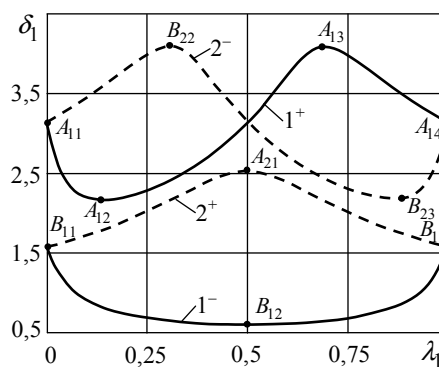


Рис. 2.2

В монографии [41] для задач 2 и 3 показаны графики изменения первого собственного значения $\delta_1^\pm$ – корней уравнений (2.67), (2.78) – в зависимости от относительной жесткости G при различных значениях относительной толщины λ_1 .

В случае неидеального контакта собственные значения $\delta_k^\pm$ вихревого решения находятся в явном виде и нет необходимости их численного исследования.

Представляет интерес исследование характера проникания краевых эффектов, обусловленных собственными значениями $\gamma_p^\pm$ потенциального состояния. В монографии [41]

приведены в порядке возрастания реальной части значения первых пяти корней $\gamma_p^\pm$ уравнений (2.71), (2.79), (2.90) и (2.91), соответствующих смешанным краевым условиям плоского торца и диафрагмы с учетом идеального и несовершенного контакта слоев плиты.

В монографии [41] для задач 2, 3, 5, 6 проиллюстрировано влияние относительной жесткости G слоев плиты на изменение значений первых пятнадцати корней $\gamma_p^\pm$ уравнений (2.71).

Потенциальное состояние представляет собой решение типа погранслоя и характер проникания его внутрь области плиты определяется первым по модулю собственным значением $\gamma_1^\pm$. Для задач 2–7 на рис. 2.3 в случае симметричной (рис. 2.3, а) и кососимметричной (рис. 2.3, б) деформаций пластины представлены в полулогарифмической шкале графики изменения модулей первых собственных значений $\gamma_1^\pm$ – корней уравнений (2.71), (2.79), (2.84), (2.89), (2.90) и (2.91) – в зависимости от относительной жесткости G слоев при $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$. Номера кривых и задач на рисунках находятся в соответствии.

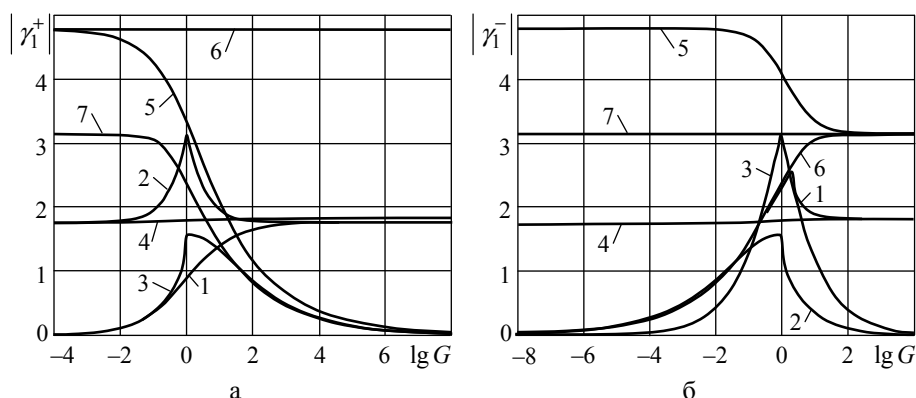


Рис. 2.3

Поведения кривых, изображенных на рис. 2.3 описано в работе [41].

На рис. 2.4 показаны графики изменения модуля первого собственного значения в зависимости от относительной толщины внешних слоев λ_1 . Значения коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 в каждом из рассматриваемых случаев принимались равными 0,3, а значение относительной жесткости $G=10$. Относительная толщина λ_1 варьировалась от 0 до 1. Нумерация кривых соответствует принятой на рис. 2.3.

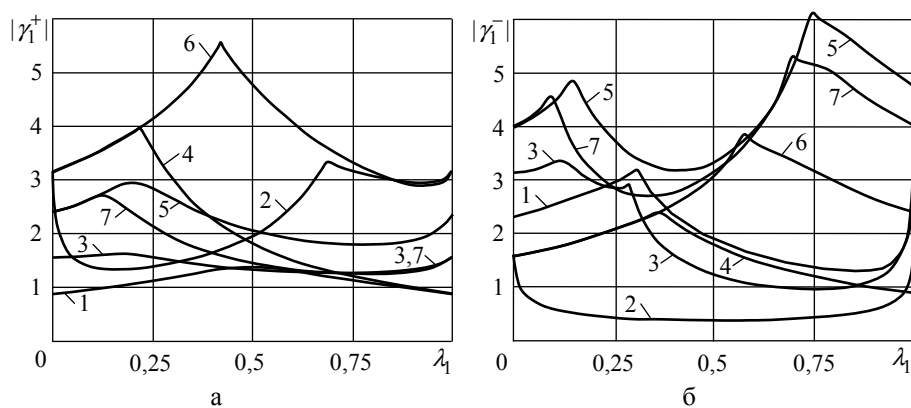


Рис. 2.4

Изменение $|\gamma_1^\pm|$ в зависимости от λ_1 (рис. 2.4) носит более сложный характер, чем в случае зависимости от G (рис. 2.3). Значения $\gamma_1^\pm$ при $\lambda_1=0$ или $\lambda_1=1$ соответствуют однородной плите. На основе данных рис. 2.4 описан характер проникания краевого эффекта в каждой из задач в зависимости от λ_1 .

На рис. 2.5 для скользящего контакта слоев (задачи 4–7) представлены графики изменения первого по модулю корня $\chi_1^\pm$ уравнений (2.84), (2.89), (2.90), (2.91) в зависимости от относительной толщины внешних слоев λ_1 . При этом значение относительной жесткости G принималось равным единице, а коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Штриховые горизонтальные линии $4^0, 5^0, 6^0, 7^0$ соответствуют однородной пластине.

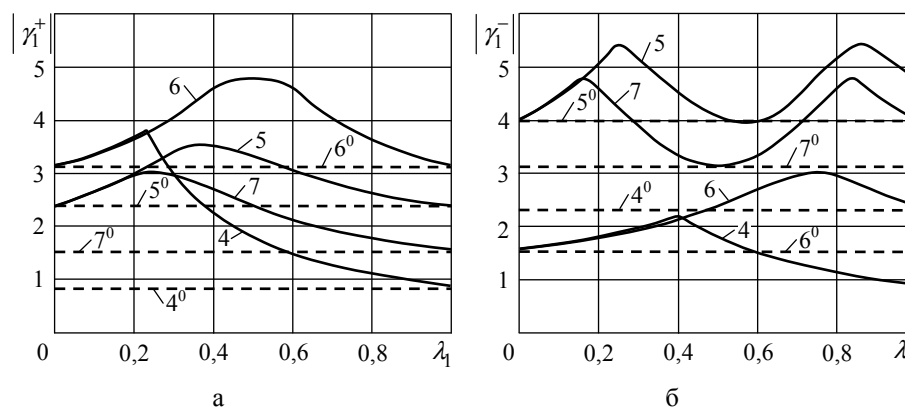


Рис. 2.5

Как видно из рис. 2.5, величины $|\chi_1^\pm|$ существенно зависят от относительных толщин слоев. Данные этого рисунка, в частности, подтверждают тот факт, что для неидеального контакта при одинаковых упругих характеристиках материалов слоев ($G=1, \nu_1 = \nu_2$) невозможен переход к однослойной пластине. Фактически имеем однородную пластину с дефектом, обусловленным условиями контакта слоев.

Влияние коэффициента Пуассона ν_1 внешних слоев на изменение модулей первых собственных значений $\chi_1^\pm$ отражено в монографии [41].

Таким образом, первое собственное значение χ_1 существенно зависит от относительной жесткости G материалов слоев и их относительных толщин λ_1 (λ_2). Менее заметное влияние на значение χ_1 оказывает изменение коэффициентов Пуассона.

3. Установившиеся колебания трехслойных плит. В работах [41, 176, 179–182, 186, 189, 195, 196, 199, 200, 202] методом однородных решений трехмерные краевые задачи теории упругости о гармонических колебаниях трехслойных изотропных плит приведены к двумерным. Вихревое и потенциальное состояния описываются спектральными задачами для дифференциальных операторов. В случае симметричного по толщине строения пластин с однородными слоями решения спектральных задач получены в явном аналитическом виде. На основе аналитических и численных исследований дисперсионных уравнений изучены основные характеристики волнового процесса в зависимости от изменения граничных условий на плоских гранях и контактирующих плоскостях слоев пластины, изменения физико-механических свойств материалов. В длинноволновом пределе получены уравнения для нахождения частот заклипания. Установлены асимптотические значения фазовых скоростей мод в низкочастотном и высокочастотном диапазонах.

3.1. Однородные решения краевых задач динамики трехслойных пластин с неоднородными слоями. Рассматриваются упругие колебания трехслойной плиты под действием внешних усилий, приложенных к ее боковой поверхности и гармонически изменяющихся во времени с частотой ω . Тогда уравнения движения пластины в амплитудах перемещений с учетом введенных ранее безразмерных характеристик совпадают по форме с (1.1), в которых $m=1,2,3$. Если $\omega=0$, то системы уравнений (1.1) описывают упругое равновесие пластины (2.1).

Предполагается, что на плоских гранях пластины задано одно из множества граничных условий (2.2)–(2.11), а на границах раздела слоев имеет место одно из четырех условий их сопряжения (2.12)–(2.15).

В соответствии с полуобратным методом [203, 204] компоненты вектора перемещений $u_{mi}(x_1, x_2, x_3)$ представим в виде суммы вихревого и потенциального состояний (1.14). Неизвестные функции $p_m(x_3)$, $B(x_1, x_2)$, $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$, $C(x_1, x_2)$ в выражениях (1.14) определяются из систем уравнений движения (1.1) с учетом сочетания одного из граничных условий на плоских гранях плиты (2.2)–(2.11) с одним из условий контакта слоев (2.12)–(2.15). Метагармонические функции $B(x_1, x_2)$, $C(x_1, x_2)$, как и прежде, удовлетворяют уравнениям (2.17), (2.18).

Относительно функций $p_m(x_3)$ и $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям (1.16), (1.17). Граничные условия для функций $p_m(x_3)$ имеют вид (2.21)–(2.30) и (2.31)–(2.34). Функции $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ удовлетворяют краевым условиям (2.35)–(2.44) и (2.45)–(2.48).

В результате вихревое и потенциальное решения описываются в терминах спектральных задач (1.16), (2.21)–(2.34) и (1.17), (2.35)–(2.48). Решения вида (1.14), соответствующие счетным множествам собственных значений $\{\delta_k\}$ вихревого и $\{\gamma_p\}$ потенциального состояний, образуют систему однородных решений. Поэтому вихревое и потенциальное решения на основании соотношений (1.14) имеют вид (1.50), (1.52).

Рассмотрим далее трехслойную пластину симметричного по толщине строения с однородными слоями. В этом случае уравнения относительно функций $p_m(x_3)$ и $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ имеют вид (1.43), (1.44). Решения данных уравнений, удовлетворяющие заданным краевым условиям на плоских гранях и контактирующих плоскостях слоев пластины, можно найти в явном аналитическом виде.

Пусть на границе $x_3 = \pm 1$ для функций $p_m(x_3)$ и $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ имеет место одна из пар однородных граничных условий (2.21) и (2.35), (2.22) и (2.36), (2.23) и (2.37), (2.24) и (2.38), в которых $d_1 = d_3 = 1$. На контактирующих плоскостях слоев $x_3 = \pm \lambda_2$ выполняются условия идеального (2.31), (2.45) или скользящего (2.32), (2.46) контакта слоев. Сочетая четыре условия на плоских гранях с двумя на контактирующих плоскостях, с учетом уравнений (1.43), (1.44) в монографии [41] представлены решения следующих восьми спектральных задач.

Задача 1. Найти решение уравнений (1.43) и (1.44) с учетом граничных условий (2.21), (2.31) и (2.35), (2.45) (жесткое защемление торцов и идеальный контакт слоев).

Сформулированные ниже задачи 2–8 отличаются от предыдущей граничными условиями.

Задача 2. Плоские грани пластины свободные от усилий (2.22), (2.36), контакт – идеальный (2.31), (2.45).

Задача 3. На торцах заданы условия скользящей заделки (2.23), (2.37), контакт – идеальный (2.31), (2.45).

Задача 4. Плоские грани пластины покрыты диафрагмой (2.24), (2.38), контакт – идеальный (2.31), (2.45).

Задача 5. Жесткое закрепление торцов (2.21), (2.35), контакт – несовершенный (2.32), (2.46).

Задача 6. Торцы пластины свободны от напряжений (2.22), (2.36), контакт – несовершенный (2.32), (2.46).

Задача 7. Скользящая заделка торцов (2.23), (2.37), контакт – несовершенный (2.32), (2.46).

Задача 8. Торцы пластины покрыты диафрагмой (2.24), (2.38), контакт – несовершенный (2.32), (2.46).

Каждую из задач 1–8 о колебаниях трехслойной пластины разделим на две: симметричную («+») и кососимметричную («-»).

Общие решения уравнений (1.43) и систем (1.44) относительно функций $p_m^\pm(x_3)$ вихревого и потенциального $n_m^\pm(x_3)$, $q_m^\pm(x_3)$ состояний имеют следующий вид:

$$p_1^\pm(x_3) = a_1^\pm \cos l_1^\pm x_3 + a_2^\pm \sin l_1^\pm x_3, \quad p_2^\pm(x_3) = a_3^\pm \cos l_2^\pm x_3, \quad p_2^-(x_3) = a_3^- \sin l_2^- x_3; \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} n_1^\pm(x_3) &= H_1^\pm \cos \gamma_{11}^\pm(x_3 - \lambda_2) + H_2^\pm \sin \gamma_{11}^\pm(x_3 - \lambda_2) + H_3^\pm \cos \gamma_{12}^\pm(x_3 - \lambda_2) + H_4^\pm \sin \gamma_{12}^\pm(x_3 - \lambda_2), \\ q_1^\pm(x_3) &= Q_1^\pm \sin \gamma_{11}^\pm(x_3 - \lambda_2) + Q_2^\pm \cos \gamma_{11}^\pm(x_3 - \lambda_2) + Q_3^\pm \sin \gamma_{12}^\pm(x_3 - \lambda_2) + Q_4^\pm \cos \gamma_{12}^\pm(x_3 - \lambda_2), \\ n_2^+(x_3) &= H_5^+ \cos \gamma_{21}^+ x_3 + H_6^+ \cos \gamma_{22}^+ x_3, \quad q_2^+(x_3) = Q_5^+ \sin \gamma_{21}^+ x_3 + Q_6^+ \sin \gamma_{22}^+ x_3, \\ n_2^-(x_3) &= H_5^- \sin \gamma_{21}^- x_3 + H_6^- \sin \gamma_{22}^- x_3, \quad q_2^-(x_3) = Q_5^- \cos \gamma_{21}^- x_3 + Q_6^- \cos \gamma_{22}^- x_3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

В выражениях (3.2) величины γ_{m1} , γ_{m2} определяются по формулам (1.47), а произвольные постоянные $Q_i^\pm$ ($i = \overline{1, 6}$) выражаются через $H_i^\pm$:

$$\begin{aligned} Q_i^\pm &= \lambda^{-1} a_i^\pm H_i^\pm, \quad a_1^\pm = -\gamma_{11}^\pm, \quad a_2^\pm = \gamma_{11}^\pm, \quad a_3^\pm = -(\gamma^\pm)^2 / \gamma_{12}^\pm, \\ a_4^\pm &= (\gamma^\pm)^2 / \gamma_{12}^\pm, \quad a_5^\pm = \mp \gamma_{21}^\pm, \quad a_6^\pm = \mp (\gamma^\pm)^2 / \gamma_{22}^\pm. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Неизвестные коэффициенты $H_i^\pm$ ($i = \overline{1, 6}$) и собственные значения $\delta^\pm$, $\gamma^\pm$ в каждой из задач 1–8 находятся в результате удовлетворения краевым условиям. С этой целью функции $p_m^\pm(x_3)$ необходимо подчинить одному из граничных условий (2.58), (2.86), (2.64), (2.76) при $x_3 = 1$ и одному из условий (2.56), (2.81) при $x_3 = \lambda_2$, а функции $n_m^\pm(x_3)$, $q_m^\pm(x_3)$ – условиям (2.62), (2.88), (2.65), (2.77) и (2.57), (2.82). Рассмотрим отдельно случаи идеального и неидеального контакта слоев плиты.

3.2. Колебания трехслойных плит симметричного строения при идеальном контакте однородных слоев. В работах [41, 176, 186, 189, 199, 200] рассмотрены задачи об упругих колебаниях трехслойной пластины, слою которой находятся в условиях идеального контакта (задачи 1–4). В этом случае условия сопряжения слоев при $x_3 = \lambda_2$ для функций $p_m(x_3)$ имеют вид (2.56), а для функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ – вид (2.57). Данные условия необходимо рассматривать совместно с ограничениями на функции $p_m(x_3)$, $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ вблизи границы $x_3 = 1$.

В случае жесткого заземления торцов (рассматривается задача 1) неизвестные коэффициенты собственных функций $p_m^\pm(x_3)$ и собственные значения $\delta^\pm$ вихревого состояния определяются из соотношений (3.1), (2.56), (2.58). В результате, собственные функции $p_m^\pm(x_3)$, соответственно для симметричных и кососимметричных колебаний, получаются такими

$$\begin{aligned} p_{1k}^+(x_3) &= \cos l_{2k}^+ \lambda_2 \cos l_{1k}^+ (\lambda_2 - x_3) + \frac{1}{G} \frac{l_{2k}^+}{l_{1k}^+} \sin l_{2k}^+ \lambda_2 \sin l_{1k}^+ (\lambda_2 - x_3), \quad p_{2k}^+(x_3) = \cos l_{2k}^+ x_3, \\ p_{1k}^-(x_3) &= \sin l_{2k}^- \lambda_2 \cos l_{1k}^- (\lambda_2 - x_3) - \frac{1}{G} \frac{l_{2k}^-}{l_{1k}^-} \cos l_{2k}^- \lambda_2 \sin l_{1k}^- (\lambda_2 - x_3), \quad p_{2k}^-(x_3) = \sin l_{2k}^- x_3, \end{aligned} \quad (3.4)$$

а собственные значения $\delta_k^\pm$ находятся из дисперсионных уравнений

$$\begin{aligned} V_{31}^+(\delta, \Omega; G, \rho, \lambda_1, \lambda_2) &= G l_1^+ \cos l_1^+ \lambda_1 \cos l_2^+ \lambda_2 - l_2^+ \sin l_1^+ \lambda_1 \sin l_2^+ \lambda_2 = 0, \\ V_{31}^-(\delta, \Omega; G, \rho, \lambda_1, \lambda_2) &= G l_1^- \cos l_1^- \lambda_1 \sin l_2^- \lambda_2 + l_2^- \sin l_1^- \lambda_1 \cos l_2^- \lambda_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Дисперсионные уравнения (3.5), описывающие частотный спектр SH волн, при фиксированной частоте Ω имеют счетные множества решений δ_k^+ и δ_k^- ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Корни этих уравнений зависят от приведенной частоты колебаний Ω и параметров G , ρ , λ_1 , λ_2 , являются действительными и мнимыми и расположены симметрично относительно нуля. Действительные корни соответствуют нераспространяющимся модам, а мнимые – распространяющимся модам, переносящим энергию. Кроме того, корни не зависят от коэффициентов С.Д. Пуассона слоев ν_1 , ν_2 .

Собственные функции $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ и собственные значения $\gamma^\pm$ находятся из однородных систем линейных алгебраических уравнений шестого порядка относительно $H_i^\pm$ [41, 189]. Из условия равенства нулю определителей этих систем получаем следующие дисперсионные уравнения:

$$P_{31}^+(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv G^2 \left(t_1 (4\gamma^4 + \xi_1) C_{11} C_{12} + \gamma^2 (4t_1^2 + \xi_1) S_{11} S_{12} - \tau_1 \xi_1 \right) (t_2 S_{21} C_{22} - \gamma^2 C_{21} S_{22}) - \\ - 4G\gamma^2 \left((\xi_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - 2t_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12}) (t_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - \gamma^2 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12}) + (\xi_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - 2t_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) (t_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - \gamma^2 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) \right) \times \\ \times (\xi_2 C_{21} S_{22} - 2t_2 S_{21} C_{22}) - 4(t_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - \gamma^2 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) (t_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - \gamma^2 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12}) (\xi_2 C_{21} S_{22} - \tau_2 S_{21} C_{22}) + \\ + G\Omega_1^2 \Omega_2^2 \left(\gamma_{11} (t_1 S_{11} C_{12} - \gamma^2 C_{11} S_{12}) \gamma_{22} C_{21} C_{22} - \gamma_{12} (t_1 C_{11} S_{12} - \gamma^2 S_{11} C_{12}) \gamma_{21} S_{21} S_{22} \right) = 0; \quad (3.6)$$

$$P_{31}^-(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv G^2 \left(t_1 (4\gamma^4 + \xi_1) C_{11} C_{12} + \gamma^2 (4t_1^2 + \xi_1) S_{11} S_{12} - \tau_1 \xi_1 \right) (t_2 C_{21} S_{22} - \gamma^2 S_{21} C_{22}) - \\ - 4G\gamma^2 \left((\xi_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - 2t_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12}) (t_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - \gamma^2 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12}) + (\xi_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - 2t_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) (t_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - \gamma^2 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) \right) \times \\ \times (\xi_2 S_{21} C_{22} - 2t_2 C_{21} S_{22}) - 4(t_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - \gamma^2 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) (t_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - \gamma^2 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12}) (\xi_2 S_{21} C_{22} - \tau_2 C_{21} S_{22}) - \\ - G\Omega_1^2 \Omega_2^2 \left(\gamma_{11} (t_1 S_{11} C_{12} - \gamma^2 C_{11} S_{12}) \gamma_{22} S_{21} S_{22} - \gamma_{12} (t_1 C_{11} S_{12} - \gamma^2 S_{11} C_{12}) \gamma_{21} C_{21} C_{22} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Коэффициенты $H_i^\pm$ ($i = \overline{1, 6}$), входящие в выражения (3.2), приведены в монографии [41].

Форма представления дисперсионных уравнений (3.6), (3.7) удобна для проведения аналитических и численных исследований. Уравнения (3.6), (3.7), описывающие частотный спектр P-SV волн, при фиксированной частоте Ω имеют счетное множество корней $\gamma_p^\pm$. Действительные, мнимые и комплексные корни этих уравнений зависят от параметров Ω , G , ρ , ν_1 , ν_2 , λ_1 , λ_2 и расположены симметрично в четырех квадрантах комплексной плоскости. Действительные и комплексные корни отвечают краевым (стоячим) волнам с экспоненциально затухающей амплитудой (нераспространяющиеся моды). Мнимые корни соответствуют распространяющимся (бегущим) модам и играют важную роль при исследовании процесса переноса энергии слоями плиты. Исследование частотных спектров позволяет изучить структуру волнового поля в зависимости от частоты колебаний, оценить число распространяющихся мод, их фазовые и групповые скорости.

Предельным переходом $\Omega \rightarrow 0$ в уравнениях (3.6), (3.7) получаем трансцендентные уравнения (2.63) соответствующие задаче равновесия трехслойной пластины. Это частично подтверждает достоверность результатов и позволяет найти точки пересечения дисперсионных кривых с плоскостью $\Omega = 0$, что является важным для нахождения численных решений дисперсионных уравнений.

В работах [41, 189] исследованы некоторые предельные случаи дисперсионных уравнений (3.6), (3.7): $G \rightarrow 0$ (внешние слои – мягкие по сравнению с внутренним или внутренний – жесткий по сравнению с внешними), $G \rightarrow \infty$ (внутренний слой – мягкий или внешний – жесткий). Переход от трехслойной пластины к однородной можно реализовать тремя способами: положить равной нулю толщину внешних слоев плиты $\lambda_1 = 0$; принять $\lambda_2 = 0$; положить одинаковыми упругие параметры $G = 1$, $\rho = 1$, $\nu_1 = \nu_2$.

Для определения частот запираания (параметр γ равен нулю) из дисперсионных соотношений (3.6), (3.7) получаем следующие трансцендентные уравнения:

$$P_{31}^+(0, \Omega) = (G\Omega_1 c_{12} c_{22} - \Omega_2 s_{12} s_{22}) (Gk_2 \Omega_1 c_{11} s_{21} + k_1 \Omega_2 s_{11} c_{21}) = 0, \\ P_{31}^-(0, \Omega) = (G\Omega_1 c_{12} s_{22} + \Omega_2 s_{12} c_{22}) (Gk_2 \Omega_1 c_{11} c_{21} - k_1 \Omega_2 s_{11} s_{21}) = 0. \quad (3.8)$$

Частоты записания являются подмножеством критических частот. По определению критическая частота нормальной моды соответствует минимальному значению частоты, при которой существует распространяющаяся мода.

Для мнимых корней дисперсионных соотношений (3.6), (3.7) в высокочастотном коротковолновом диапазоне ($\Omega \gg 1$, $y \gg 1$) получим уравнение

$$R_1(v_p) \equiv G^2 \left((1+s_1^2)^2 - 4r_1s_1 \right) (r_2s_2 - 1) + (r_1s_1 - 1) \left((1+s_2^2)^2 - 4r_2s_2 \right) + \\ + G \left((s_1^2 - 1)(s_2^2 - 1)(s_1r_2 + r_1s_2) + 2(1+s_1^2 - 2r_1s_1)(1+s_2^2 - 2r_2s_2) \right) = 0, \quad (3.9)$$

которое приводится к известному для нахождения скорости $v_{St} = c_{St}/c_0$ волны Р. Стоунли [207, 208].

В случае свободных от напряжений торцов (задача 2) [41, 176, 186] собственные функции $p_m(x_3)$ и собственные значения δ находятся из соотношений (3.1) и (2.86), (2.56). При этом собственные функции совпадают по виду с (3.4), а отличаются собственными значениями $\delta^\pm$, которые находятся из дисперсионных уравнений

$$V_{32}^+(\delta, \Omega; G, \rho, \lambda_1, \lambda_2) = G l_1^+ \sin l_1^+ \lambda_1 \cos l_2^+ \lambda_2 + l_2^+ \cos l_1^+ \lambda_1 \sin l_2^+ \lambda_2 = 0, \\ V_{32}^-(\delta, \Omega; G, \rho, \lambda_1, \lambda_2) = G l_1^- \sin l_1^- \lambda_1 \sin l_2^- \lambda_2 - l_2^- \cos l_1^- \lambda_1 \cos l_2^- \lambda_2 = 0. \quad (3.10)$$

Дисперсионные уравнения (3.10) позволяют описать частотный спектр SH волн и при фиксированном значении частоты Ω имеют счетные множества действительных и конечное число мнимых решений δ_k^+ и δ_k^- ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Действительные и мнимые корни этих уравнений зависят от параметров Ω , G , ρ , λ_1 , λ_2 и расположены симметрично относительно нуля.

Для нахождения частот записания SH волн из уравнений (3.10) получаем

$$V_{32}^+(0, \Omega) = G \Omega_1 s_{12} c_{22} + \Omega_2 c_{12} s_{22} = 0, \quad (3.11) \quad V_{32}^-(0, \Omega) = G \Omega_1 s_{12} s_{22} - \Omega_2 c_{12} c_{22} = 0. \quad (3.12)$$

Неизвестные коэффициенты H_i ($i = \overline{1, 6}$) в функциях $n_m(x_3)$ и $q_m(x_3)$, задаваемых выражениями (3.2), находятся после удовлетворения краевых условий (2.88), (2.57) путем решения однородных систем линейных алгебраических уравнений относительно $H_i^\pm$ [41]. Для определения собственных значений $\gamma^\pm$ имеем дисперсионные уравнения [41, 176, 186]

$$P_{32}^+(\gamma, \Omega) \equiv 4G^2 (\xi_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - \tau_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12}) (\xi_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - \tau_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) (\gamma_{12} \gamma_{22} S_{21} C_{22} - \gamma^2 C_{21} S_{22}) + \\ + 4G \gamma^2 ((\xi_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - \tau_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12}) (\xi_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - 2\tau_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) + \\ + (\xi_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - \tau_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) (\xi_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - 2\tau_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12})) (\xi_2 C_{21} S_{22} - 2\tau_2 S_{21} C_{22}) + \\ + G \Omega_1^2 \Omega_2^2 (\gamma_{12} (\xi_1 S_{11} C_{12} - \tau_1 C_{11} S_{12}) \gamma_{21} S_{21} S_{22} - \gamma_{11} (\xi_1 C_{11} S_{12} - \tau_1 S_{11} C_{12}) \gamma_{22} C_{21} C_{22}) - \\ - (t_1 (4\gamma^4 + \xi_1) C_{11} C_{12} + \gamma^2 (4t_1^2 + \xi_1) S_{11} S_{12} - \tau_1 \xi_1) (\xi_2 C_{21} S_{22} - \tau_2 S_{21} C_{22}) = 0. \quad (3.13)$$

$$P_{32}^-(\gamma, \Omega) \equiv 4G^2 (\xi_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - \tau_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12}) (\xi_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - \tau_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) (\gamma_{21} \gamma_{22} C_{21} S_{22} - \gamma^2 S_{21} C_{22}) + \\ + 4G \gamma^2 ((\xi_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - \tau_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12}) (\xi_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - 2\tau_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) + \\ + (\xi_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12} - \tau_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12}) (\xi_1 \bar{C}_{11} \bar{S}_{12} - 2\tau_1 \bar{S}_{11} \bar{C}_{12})) (\xi_2 S_{21} C_{22} - 2\tau_2 C_{21} S_{22}) + \\ + G \Omega_1^2 \Omega_2^2 (\gamma_{11} (\xi_1 C_{11} S_{12} - \tau_1 S_{11} C_{12}) \gamma_{22} S_{21} S_{22} - \gamma_{12} (\xi_1 S_{11} C_{12} - \tau_1 C_{11} S_{12}) \gamma_{21} C_{21} C_{22}) - \\ - (t_1 (4\gamma^4 + \xi_1) C_{11} C_{12} + \gamma^2 (4t_1^2 + \xi_1) S_{11} S_{12} - \tau_1 \xi_1) (\xi_2 S_{21} C_{22} - \tau_2 C_{21} S_{22}) = 0. \quad (3.14)$$

Уравнения (3.13), (3.14) имеют счетное множество корней, расположенных симметрично в четырех квадрантах комплексной плоскости.

Анализ распространения P-SV волн в трехслойной пластине предполагает, в частности, изучение предельного поведения решений дисперсионных уравнений (3.13), (3.14) при различных значениях параметра γ и частоты Ω . Асимптотический анализ дисперсионных уравнений также важен на этапе проведения численных исследований характеристик волнового процесса. В области низких частот ($\Omega \rightarrow 0$), раскладывая функции $P_{32}^{\pm}(\gamma, \Omega)$ в ряд К. Маклорена (С. Maclaurin) по степеням Ω и ограничиваясь первым отличным от нуля коэффициентом ряда, а именно при Ω^6 , из уравнений (3.13), (3.14) получим

$$\begin{aligned} P_{32}^{\pm}(\gamma, 0) \equiv & G^2 (\sin \gamma^{\pm} \lambda_1 + \gamma^{\pm} \lambda_1) (\sin \gamma^{\pm} \lambda_1 - \gamma^{\pm} \lambda_1) ((3 - 4\nu_2) \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \mp 2\gamma^{\pm} \lambda_2) + \\ & + 2G \left[((1 - 2\nu_1) \sin^2 \gamma^{\pm} \lambda_1 + (\gamma^{\pm} \lambda_1)^2) ((1 - 2\nu_2) \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \mp 2\gamma^{\pm} \lambda_2) \pm \right. \\ & \pm 2(1 - \nu_1)(1 - \nu_2) \left((\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 - 2\gamma^{\pm} \lambda_1) \frac{\sin^2 \gamma^{\pm} \lambda_2}{\cos^2 \gamma^{\pm} \lambda_2} - (\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 + 2\gamma^{\pm} \lambda_1) \frac{\cos^2 \gamma^{\pm} \lambda_2}{\sin^2 \gamma^{\pm} \lambda_2} \right) \Big] - \\ & - ((3 - 4\nu_1) \cos^2 \gamma^{\pm} \lambda_1 - (\gamma^{\pm} \lambda_1)^2 + (1 - 2\nu_1)^2) (\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm 2\gamma^{\pm} \lambda_2) = 0. \end{aligned}$$

Данное трансцендентное уравнение преобразовывается к известному в задаче равновесия трехслойной пластины со свободными плоскими гранями [56, 174]

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{G} - 1 \right) ((\gamma^{\pm} \lambda_1)^2 - \sin^2 \gamma^{\pm} \lambda_1) \left[2\gamma^{\pm} \lambda_2 \mp \left(1 + \frac{2}{\nu_{20}} \right) \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right] - \\ & - \frac{1}{G} \left(\frac{1}{G} - 1 \right) (2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2) \left[(\gamma^{\pm} \lambda_1)^2 - \frac{1}{\nu_{10}^2} - \left(1 + \frac{2}{\nu_{10}} \right) \cos^2 \gamma^{\pm} \lambda_1 \right] + \\ & + \frac{1}{G} \left(1 + \frac{1}{\nu_{10}} \right) \left[\pm 2(\nu_1 - \nu_2) (2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2) + \left(1 + \frac{1}{\nu_{20}} \right) (2\gamma^{\pm} \pm \sin 2\gamma^{\pm}) \right] = 0. \end{aligned}$$

В монографии [41] для соотношений (3.13), (3.14) рассмотрены предельные случаи изменения параметра относительной жесткости G слоев: $G \rightarrow 0$ (внешние слои – мягкие или внутренний – жесткий), $G \rightarrow \infty$ (внутренний слой – мягкий или внешние – жесткие),

При отличной от нуля частоте Ω для распространяющихся P-SV мод можно выделить два диапазона изменения параметра γ : малым значениям γ ($\gamma \ll 1$) соответствует длинноволновое приближение, большим ($\gamma \gg 1$) – коротковолновое. Для длинных волн при $\gamma = 0$ уравнения (3.13), (3.14) принимают вид

$$\begin{aligned} P_{32}^{+}(0, \Omega) & \equiv (G\Omega_1 s_{12} c_{22} + \Omega_2 c_{12} s_{22}) (Gk_2 \Omega_1 s_{11} s_{21} - k_1 \Omega_2 c_{11} c_{21}) = 0, \\ P_{32}^{-}(0, \Omega) & \equiv (G\Omega_1 s_{12} s_{22} - \Omega_2 c_{12} c_{22}) (Gk_2 \Omega_1 s_{11} c_{21} + k_1 \Omega_2 c_{11} s_{21}) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Каждое из уравнений (3.15) определяет по две независимые серии частот запираания. Частоты запираания первого семейства не зависят от коэффициентов С.Д. Пуассона ν_1, ν_2 . Частоты запираания второго семейства зависят от ν_1, ν_2 . При некоторых значениях величин ν_1, ν_2 частоты этих семейств могут совпадать. Множество частот запираания SH волн является подмножеством множества частот запираания P-SV волн.

Исследуем уравнения (3.13), (3.14) в длинноволновом низкочастотном диапазоне. Для обоих видов колебаний первая распространяющаяся мода проходит через начало координат $y = 0, \Omega = 0$ ($y = \text{Im } \gamma$). С целью определения скоростей этой моды при малых частотах функции $P_{62}^{\pm}(\gamma, \Omega)$ разложим в ряды Б. Тейлора в окрестности начала координат $(0, 0)$. После преобразований с учетом малости величин y, Ω_1, Ω_2 получим асимптотические выражения для безразмерных фазовых скоростей $v_p^{\pm}$

$$v_p^+ = 2v_{S2} \sqrt{\frac{G\lambda_1(1-k_1^2) + \lambda_2(1-k_2^2)}{\rho\lambda_1 + \lambda_2}}, \quad v_p^- = 2v_{S2} \sqrt{\frac{G\lambda_1(3\lambda_2 + \lambda_1^2)(1-k_1^2) + \lambda_2^3(1-k_2^2)}{3(\rho\lambda_1 + \lambda_2)}} y, \quad v_{S2} = c_{S2}/c_0.$$

Из последних формул видно, что в низкочастотном диапазоне симметричная волна является бездисперсной, а кососимметричная волна обладает дисперсией.

В коротковолновом диапазоне распространения волн из дисперсионных соотношений (3.13), (3.14) для предельные значения фазовых скоростей v_p первых двух распространяющихся мод получаем уравнение

$$R_1(v_p)R_2(v_p) = 0, \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) распадается на два. Причем, первое уравнение $R_1(v_p) = 0$ имеет вид (3.9), а второе совпадает с уравнением для нахождения скорости v_R поверхностной волны Дж. Рэлея [207, 209]

$$R_2(v_p) \equiv \left(1 + s_1^2\right)^2 - 4r_1s_1 = 0. \quad (3.17)$$

Таким образом, для обоих случаев симметрии фазовые скорости первых двух распространяющихся мод имеют в коротковолновом высокочастотном пределе значения скоростей поверхностной волны Р. Стоунли или Дж. Рэлея, если они существуют. Для остальных мод при $y \rightarrow \infty$ получаем

$$v_p = 1 \quad (c_p = c_0). \quad (3.18)$$

В случае скользящей заделки плоских граней (задача 3) получены и исследованы однородные решения [41, 199]. Собственные функции $p_m^\pm(x_3)$ вихревого решения в данном случае совпадают с (3.4), а дисперсионные уравнения для нахождения собственных значений $\delta^\pm$ имеют такой же вид, как и в случае свободных от напряжений торцов (3.11), (3.12).

Неизвестные коэффициенты $H_i^\pm$ ($i = \overline{1, 6}$) в функциях $n_m^\pm(x_3)$, $q_m^\pm(x_3)$ потенциального состояния находятся из системы линейных алгебраических уравнений [41]. Уравнения для нахождения собственных значений $\gamma^\pm$ с учетом обозначений получаются такими:

$$\begin{aligned} P_{33}^+(\gamma, \Omega; G, \rho, v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2) = & G\Omega_1^2\Omega_2^2(\gamma_{12}\gamma_{21}C_{11}C_{12}S_{21}S_{22} + \gamma_{11}\gamma_{22}S_{11}S_{12}C_{21}C_{22}) + \\ & + G^2(\xi_1C_{11}S_{12} - \tau_1S_{11}C_{12})(t_2S_{21}C_{22} - \gamma^2C_{21}S_{22}) + 2G\gamma^2(\xi_1C_{11}S_{12} - 2t_1S_{11}C_{12}) \times \\ & \times (\xi_2C_{21}S_{22} - 2t_2S_{21}C_{22}) + (t_1S_{11}C_{12} - \gamma^2C_{11}S_{12})(\xi_2C_{21}S_{22} - \tau_2S_{21}C_{22}) = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} P_{33}^-(\gamma, \Omega; G, \rho, v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2) = & -G\Omega_1^2\Omega_2^2(\gamma_{12}\gamma_{21}C_{11}C_{12}C_{21}C_{22} + \gamma_{11}\gamma_{22}S_{11}S_{12}S_{21}S_{22}) + \\ & + G^2(\xi_1C_{11}S_{12} - \tau_1S_{11}C_{12})(t_2C_{21}S_{22} - \gamma^2S_{21}C_{22}) + 2G\gamma^2(\xi_1C_{11}S_{12} - 2t_1S_{11}C_{12}) \times \\ & \times (\xi_2S_{21}C_{22} - 2t_2C_{21}S_{22}) + (t_1S_{11}C_{12} - \gamma^2C_{11}S_{12})(\xi_2S_{21}C_{22} - \tau_2C_{21}S_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Предельный переход к задаче статики осуществляется с помощью разложений порождающих дисперсионные уравнения функций $P_{33}^\pm(\gamma, \Omega)$ в ряд К. Маклорена по степеням Ω . Если $\Omega \rightarrow 0$, тогда уравнения (3.19), (3.20) преобразуются к виду (2.71).

В работах [41, 199] рассмотрены частные случаи изменения параметра относительной жесткости G слоев ($G \rightarrow 0$, $G \rightarrow \infty$) и осуществлен переход к однослойной пластине двумя способами ($\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$; $G = 1$, $\rho = 1$, $v_1 = v_2$). Такой переход частично подтверждает достоверность результатов.

С целью определения частот запираания (при $\gamma = 0$) из уравнений (3.19), (3.20) получаем следующие

$$\begin{aligned} P_{33}^+(0, \Omega) &= (G\Omega_1 s_{12} c_{22} + \Omega_2 c_{12} s_{22})(Gk_2 \Omega_1 c_{11} s_{21} + k_1 \Omega_2 s_{11} c_{21}) = 0, \\ P_{33}^-(0, \Omega) &= (G\Omega_1 s_{12} s_{22} - \Omega_2 c_{12} c_{22})(Gk_2 \Omega_1 c_{11} c_{21} - k_1 \Omega_2 s_{11} s_{21}) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Каждое из уравнений (3.21) определяет по две независимые серии частот записания. В отличие от частот второго семейства частоты первой серии не зависят от значений коэффициентов С.Д. Пуассона ν_1, ν_2 .

В случае симметричных колебаний отдельного исследования требует первая распространяющаяся мода, выходящая из начала координат $\gamma=0, \Omega=0$. Дисперсионное уравнение (3.19) при $y \ll 1, \Omega \ll 1$ существенно упрощается и безразмерная фазовая скорость v_p этой моды, которая является бездисперсной, находится по формуле

$$v_p^+(y) = v_{S2} \sqrt{\frac{4\lambda_1 \lambda_2 (G-1) (Gk_2^2 (1-k_1^2) - k_1^2 (1-k_2^2)) + G}{(\rho \lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 k_1^2 + G \lambda_2 k_2^2)}} \quad (y \ll 1).$$

С целью оценки предельных значений фазовых скоростей в коротковолновом высокочастотном диапазоне из дисперсионных соотношений (3.19), (3.20) для скорости v_p первой распространяющейся моды получаем алгебраическое уравнение (3.9) для нахождения скорости v_{St} волны Р. Стоунли, а для скоростей других мод – (3.18).

С целью исследования колебаний трехслойной пластины с покрытыми диафрагмой торцами рассмотрим задачу 4 [41, 200]. Вихревое решение в данном случае совпадает с таковым в задаче 1 о колебаниях трехслойных пластин с жестко закрепленными торцами. Счетные множества собственных значений δ_k^+, δ_k^- определяются из дисперсионных уравнений (3.5), а собственные функции $p_{mk}^+(x_3)$ имеют вид (3.4).

Неизвестные функции $n_m(x_3), q_m(x_3)$ потенциального решения, заданные выражениями (3.2), находятся из условий (2.57), (2.77) и приведены в [41]. Дисперсионные уравнения относительно собственных значений γ имеют вид:

$$\begin{aligned} P_{34}^+(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) &\equiv (t_1 C_{11} S_{12} - \gamma^2 S_{11} C_{12})(\xi_2 C_{21} S_{22} - \tau_2 S_{21} C_{22}) + \\ &+ 2G\gamma^2 (\zeta_1 S_{11} C_{12} - 2t_1 C_{11} S_{12})(\xi_2 C_{21} S_{22} - 2\tau_2 S_{21} C_{22}) + G^2 (\xi_1 S_{11} C_{12} - \tau_1 C_{11} S_{12}) \times \\ &\times (t_2 S_{21} C_{22} - \gamma^2 C_{21} S_{22}) - G\Omega_1^2 \Omega_2^2 (\gamma_{11} \gamma_{22} C_{11} C_{12} C_{21} C_{22} + \gamma_{12} \gamma_{21} S_{11} S_{12} S_{21} S_{22}) = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} P_{34}^-(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) &\equiv (t_1 C_{11} S_{12} - \gamma^2 S_{11} C_{12})(\xi_2 S_{21} C_{22} - \tau_2 C_{21} S_{22}) + \\ &+ 2G\gamma^2 (\zeta_1 S_{11} C_{12} - 2t_1 C_{11} S_{12})(\xi_2 S_{21} C_{22} - 2\tau_2 C_{21} S_{22}) + G^2 (\xi_1 S_{11} C_{12} - \tau_1 C_{11} S_{12}) \times \\ &\times (t_2 C_{21} S_{22} - \gamma^2 S_{21} C_{22}) + G\Omega_1^2 \Omega_2^2 (\gamma_{11} \gamma_{22} C_{11} C_{12} S_{21} S_{22} + \gamma_{12} \gamma_{21} S_{11} S_{12} C_{21} C_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Данные уравнения (3.22), (3.23) и рассмотренные выше (3.6), (3.7), (3.13), (3.14), (3.19), (3.20) при любой фиксированной частоте Ω имеют счетное множество корней γ_p . Суммируя только по корням γ_p с положительной действительной частью, получаем, что потенциальное решение примет вид (2.72).

Для определения частот записания полагаем $\gamma=0$ в уравнениях (3.22), (3.23) и получаем следующие трансцендентные уравнения

$$\begin{aligned} P_{34}^+(0, \Omega) &\equiv (G\Omega_1 c_{12} c_{22} - \Omega_2 s_{12} s_{22})(Gk_2 \Omega_1 s_{11} s_{21} - k_1 \Omega_2 c_{11} c_{21}) = 0, \\ P_{34}^-(0, \Omega) &\equiv (G\Omega_1 c_{12} s_{22} + \Omega_2 s_{12} c_{22})(Gk_2 \Omega_1 s_{11} c_{21} + k_1 \Omega_2 c_{11} s_{21}) = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Каждое из уравнений (3.24) определяет по две независимые серии частот записания. Причем

частоты первой серии не зависят от значений коэффициентов С.Д. Пуассона ν_1, ν_2 в отличие от частот второго семейства.

На основании исследования уравнения (3.23) установлено, что при кососимметричных колебаниях плиты первая распространяющаяся мода выходит из начала координат $\gamma=0, \Omega=0$ и в низкочастотном диапазоне является бездисперсной, а для ее фазовой скорости v_p получим

$$v_p^-(y) = v_{s2} \sqrt{\frac{G}{(G\lambda_2 + \lambda_1)(\rho\lambda_1 + \lambda_2)}} \quad (y \ll 1).$$

В коротковолновом высокочастотном пределе при $y, \Omega \rightarrow \infty$ из соотношений (3.22), (3.23) для фазовой скорости первой распространяющейся моды получаем алгебраическое уравнение (3.9) для нахождения скорости v_{st} поверхностной волны Р. Стоунли. Остальные моды при $y \rightarrow \infty$ имеют предельное значение скорости (3.18).

Данные и приведенные выше результаты позволяют установить, что предельное уравнение (3.9) не изменяется с изменением граничных условий на плоских гранях плиты и совпадает с известным для полупространств.

Исследование характеристик волнового процесса. Основу исследований характеристик волнового процесса составляет численный анализ полученных выше дисперсионных уравнений (3.5), (3.10) и (3.6), (3.7), (3.13), (3.14), (3.19), (3.20), (3.22), (3.23). С этой целью для заданной частоты колебаний Ω необходимо определить значения параметров δ, γ .

При действительных значениях δ или γ функции $V_{31}^\pm(\gamma, \Omega)$, $V_{32}^\pm(\gamma, \Omega)$ и $P_{3n}^\pm(\gamma, \Omega)$ ($n=1, 4$) принимают действительные значения. Это позволяет рассматривать определение их нулей при заданной частоте Ω , как задачу нахождения корней действительных трансцендентных уравнений.

В случае мнимых значений γ функции $P_{3n}^\pm(\gamma, \Omega)$ могут быть действительными или мнимыми. Тот факт, что функции, порождающие дисперсионные уравнения, не принимают комплексных значений при мнимых γ , существенно облегчает численный анализ данных дисперсионных уравнений.

В области низких частот Ω в качестве начальных точек комплексных, а также действительных участков кривых используются решения соответствующих уравнений из задач статики.

Перейдем непосредственно к численным исследованиям, большинство которых проводилось для пластин со слоями из алюминия и вольфрама с приведенными в п. 1 характеристиками.

Рассмотрим такие варианты: варианты I, II, III – внешние слои из алюминия, внутренний из вольфрама ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ для варианта I, $\lambda_1 = 1/3, \lambda_2 = 2/3$ для варианта II и $\lambda_1 = 2/3, \lambda_2 = 1/3$ для варианта III); варианты IV, V – внешние слои из вольфрама, а внутренний из алюминия ($\lambda_1 = 1/3, \lambda_2 = 2/3$ для варианта IV, $\lambda_1 = 2/3, \lambda_2 = 1/3$ для варианта V); варианты VI, VII соответствуют однородной пластине из вольфрама ($\nu = 0,29$) и алюминия ($\nu = 0,35$).

Наряду с указанными вариантами проводились исследования для других значений упругих и геометрических параметров слоев пластины. Ниже описаны некоторые из полученных результатов.

В монографии [41] отражено влияние вида граничных условий и типа симметрии колебаний на изменение частот записывания SH волн. Кроме частот записывания важными характеристиками волнового процесса являются дисперсионные спектры, а также фазовые и групповые скорости распространяющихся мод.

На рис. 3.1 в диапазоне частот $0 \leq \Omega \leq 25$ изображены дисперсионные кривые зависимостей величин $\delta^\pm$ от параметра Ω , полученные на основе дисперсионных уравнений (3.5), (3.10) и соответствующие варианту I. Рис. 3.1, а характеризует симметричные колебания, а рис. 3.1, б – кососимметричные. Сплошные линии относятся к задачам 1, 4, а штриховые – к задачам 2, 3.

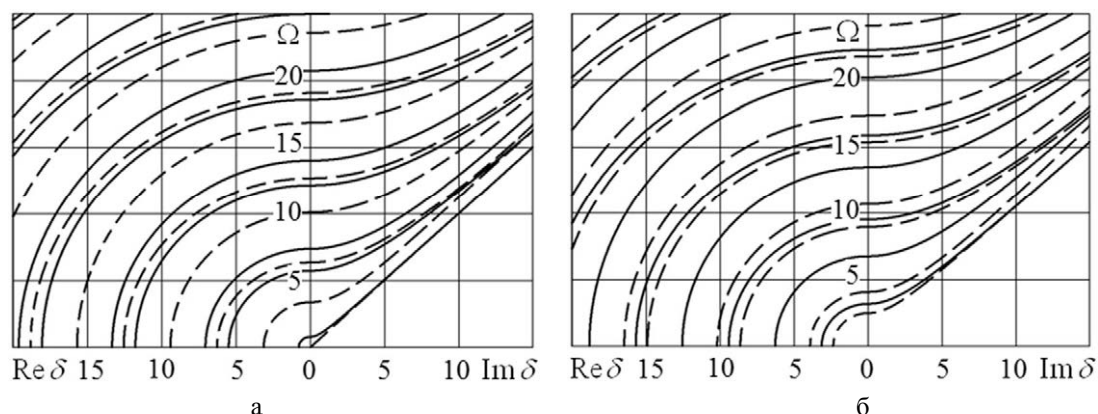


Рис. 3.1

На рис. 3.2 и 3.3 показаны зависимости безразмерных фазовых v_p и групповых v_g скоростей распространяющихся SH мод от безразмерной частоты Ω в диапазоне $0 \leq \Omega \leq 20$. Число в обозначении кривой соответствует номеру моды. Типы линий соответствуют указанным на рис. 3.1.

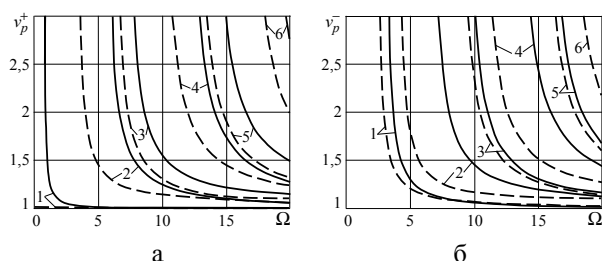


Рис. 3.2

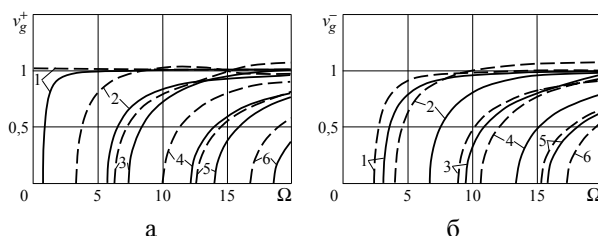


Рис. 3.3

Для всех кривых в области мнимых значений δ (рис. 3.1–3.3) характерно, что с ростом частоты Ω безразмерные фазовая v_p и групповая v_g скорости каждой моды стремятся к единице. Следовательно, размерные фазовая c_p и групповая c_g скорости стремятся к наименьшей из двух сдвиговых скоростей c_{S1} , c_{S2} . Другой особенностью распространяющихся мод SH-волн является то, что для всех частот Ω значения фазовых v_p и групповых v_g скоростей положительны.

Данные рис. 3.4 иллюстрируют изменение безразмерной фазовой скорости первой распространяющейся моды в зависимости от изменения относительной жесткости G слоев

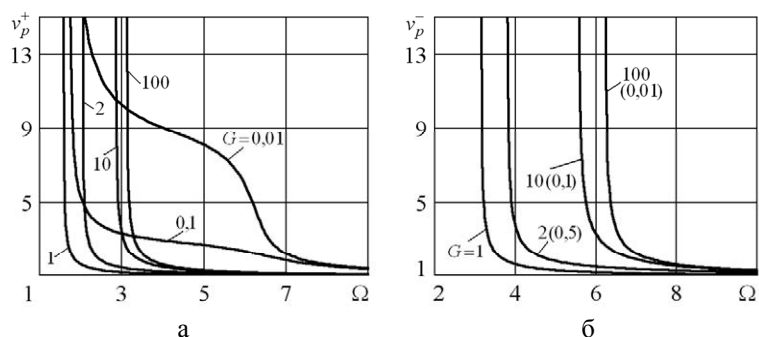


Рис. 3.4

пластины (задачи 1 и 4). Предполагалось, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$. Кривые на рисунках соответствуют значениям параметра $G = 0,01$; $0,1$; $0,5$; 1 ; 2 ; 10 ; 100 . Частный случай однородной пластины имеет место при $G=1$. Вертикальными асимптотами кривых являются прямые, соответствующие значению [41] первой частоты запертия. С увеличением частоты Ω фазовые скорости $v_p^\pm$ монотонно убывают и асимптотически приближаются к единице. Наименьшей является скорость распространяющейся первой моды в случае однородной пластины ($G=1$). Значения величин v_p^+ и v_p^- при $\Omega > 45$ отличаются от асимптотического, равного

единице, менее чем на 1%. Изменение относительной жесткости оказывает более значительное влияние на фазовые скорости первой моды в случае симметричных колебаний при $G < 1$.

Из приведенных и других полученных результатов следует, что учет неоднородности материала и соотношение относительных толщин слоев, вида симметрии деформации и граничных условий на торцах пластины приводит к значительным количественным и качественным изменениям характеристик SH-волн в широком диапазоне частот колебаний.

Перейдем к исследованию характеристик распространения P-SV волн. На основе решений трансцендентных уравнений (3.8), (3.15), (3.21), (3.24) в монографии [41] приведены значения частот записания P-SV волн.

На рис. 3.5 показаны графики изменения первой ненулевой частоты записания P-SV мод в зависимости от относительной толщины внешних слоев λ_1 и видов граничных условий на торцах пластины. Номер в обозначении кривой соответствует номеру задачи, а знаки «+» и «-» после цифр определяют тип симметрии колебаний. Предполагается, что внешние слои изготовлены из алюминия, а внутренний – из вольфрама. Значения частот записания при $\lambda_1 = 0$ совпадают с таковыми для однородной пластины. Значительно отличаются значения частот записания в задачах 1^+ , 4^+ и 2^- . Из рассмотрения всех задач следует, что варьированием λ_1 можно получить различные порядки взаимного расположения частот записания. Таким образом, в длинноволновом диапазоне вид граничных условий на торцах пластины приводит к изменению значений, количества и порядка чередования частот записания.

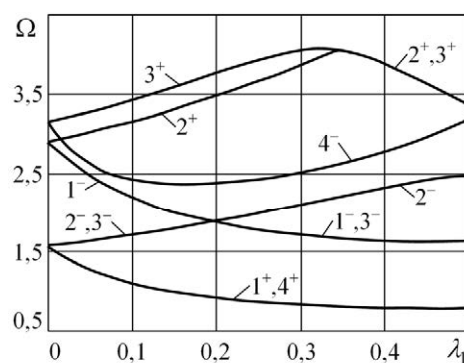


Рис. 3.5

Результаты численных решений дисперсионных уравнений (3.6), (3.7), (3.13), (3.14), (3.19), (3.20), (3.22), (3.23) в задачах 1–4 (вариант I) представлены соответственно на рис. 3.6–3.9 в виде спектральных кривых – зависимостей параметра γ от частоты Ω . Рис. 3.6–3.9, а относятся к симметричным, а рис. 3.6–3.9, б – к кососимметричным колебаниям плиты. Сплошные линии на диаграммах дисперсионных кривых соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые линии – проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действительную ($\text{Re } \gamma, \Omega$) и мнимую ($\text{Im } \gamma, \Omega$) плоскости.

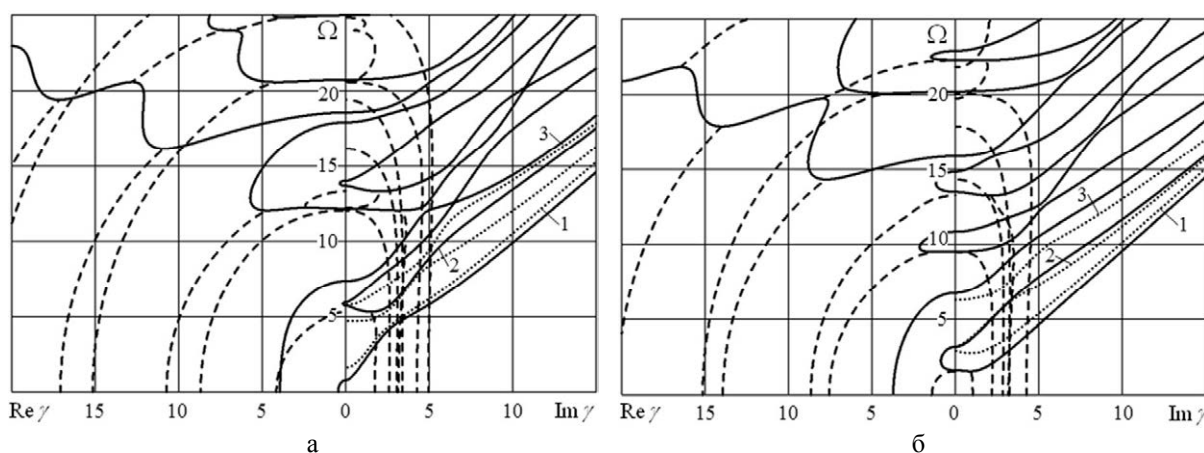


Рис. 3.6

На рис. 3.6 точками нанесены первые три распространяющиеся моды для однородной пластины из вольфрама. В случае трехслойной пластины на критических частотах появляются кратные мнимые корни. Это указывает на возможность существования присоединенного решения отличного от вихревого и потенциального.

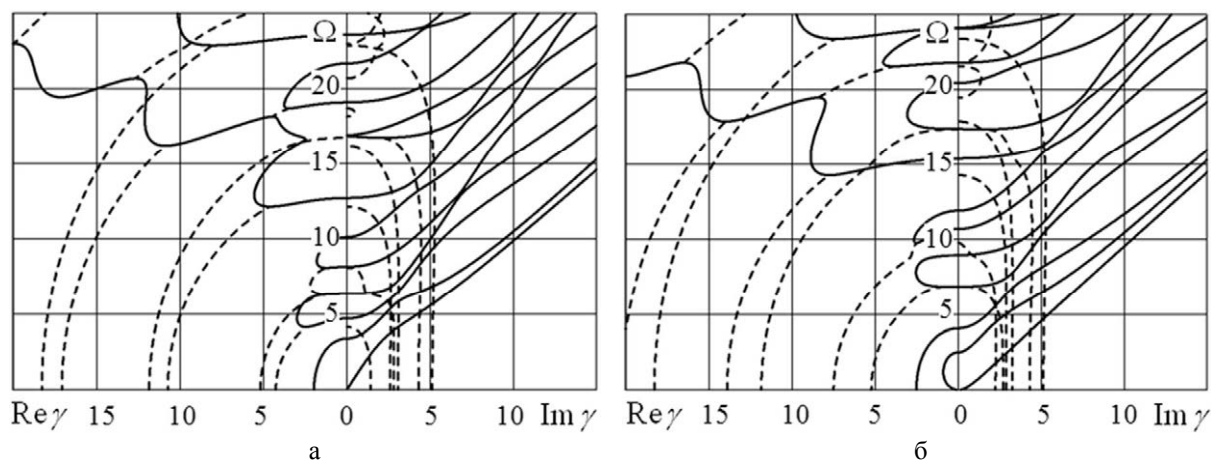


Рис. 3.7

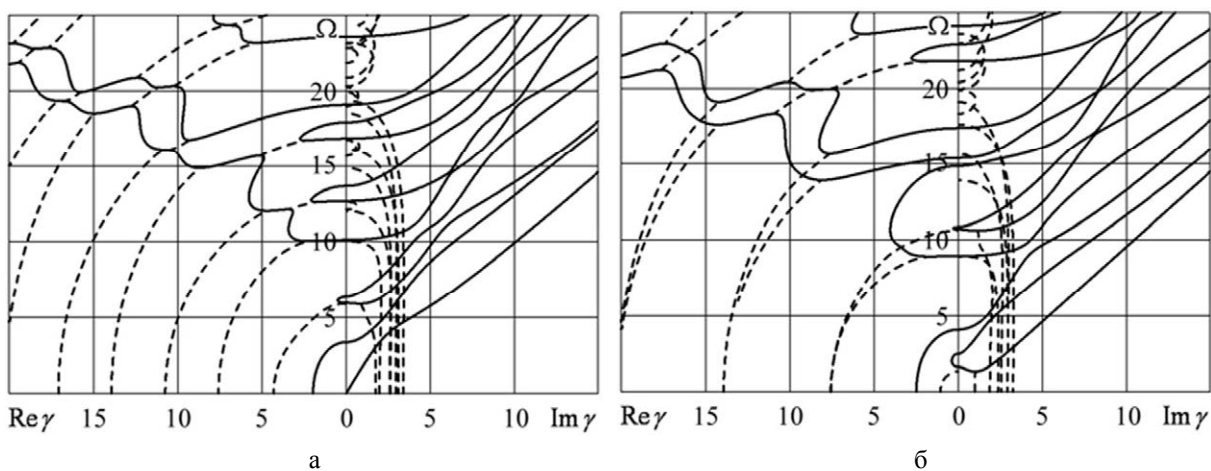


Рис. 3.8

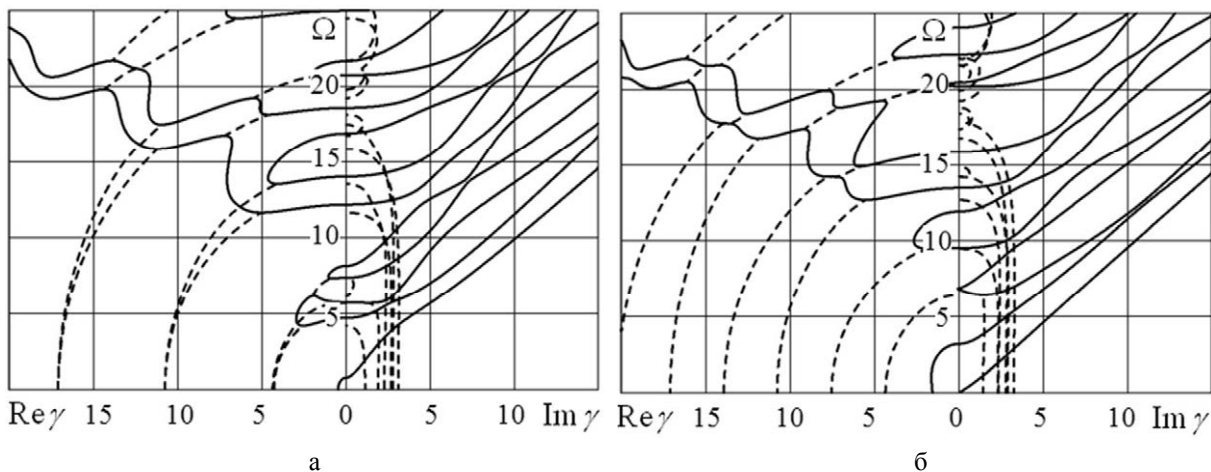


Рис. 3.9

Из приведенных на рис. 3.6–3.9 результатов видно, что при любой фиксированной частоте ($0 < \Omega \leq 25$) существует конечное число действительных и мнимых, счетное множество комплексных корней γ . Следует отметить, что для трехслойной пластины в задачах 3, 4 также возможно существование бесконечного числа действительных корней при некоторых значениях физико-механических и геометрических характеристик материалов слоев пластины, например, при $G=1$, $\rho=1$ (коэффициенты ν_1 , ν_2 различны).

Как видно из рисунков, изменение граничных условий на торцах трехслойной пластины приводит к качественным изменениям в структуре дисперсионных спектров. При всех видах граничных условий на торцах трехслойной пластины в области низких частот появляются действительные моды в дисперсионном спектре. Первая мнимая симметричная и кососимметричная мода в задаче 2, симметричная мода в задаче 3 и кососимметричная мода в задаче 4 оказываются распространяющимися при любой частоте. В низкочастотном пределе данные моды являются бездисперсными, кроме кососимметричной моды в задаче 2, которая обладает дисперсией. В задаче 1, симметричной задаче 4 и кососимметричной задаче 3 отсутствуют подобные моды.

Данные рис. 3.10 иллюстрируют влияние граничных условий на торцах трехслойной пластины на изменение фазовых скоростей $v_p^\pm$ первых двух распространяющихся симметричных (рис. 3.10, а) и кососимметричных (рис. 3.10, б) Р-SV мод (вариант I). Номер кривой находится в соответствии с номером задачи. Сплошные кривые соответствуют первой моде, а штриховые – второй.

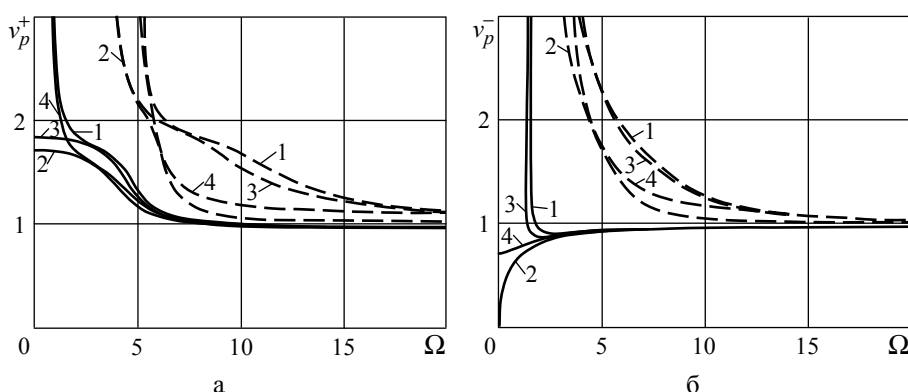


Рис. 3.10

Уравнение (3.9) для рассматриваемой пары материалов слоев пластины имеет вещественный корень, равный 0,968 – значение безразмерной скорости v_{St} поверхностной волны Р. Стоунли. Это указывает на новый, в отличие от однородной пластины, характер локализации фазовой скорости в области высоких частот для всех рассматриваемых видов граничных условий. Остальные кривые, как для трехслойной, так и для однородной пластины асимптотически приближаются сверху к значению $v_p = 1$, т.е. размерная фазовая скорость c_p стремится к наименьшей из двух сдвиговых скоростей.

В случае свободных от напряжений торцов (задача 2) для вариантов IV и V, в отличие от задач 1, 3 и 4, фазовая скорость $v_p^\pm$ первой распространяющейся моды стремится к скорости поверхностной волны Дж. Рэлея $v_R = c_R/c_0$, равной 0,926 (рис. 3.11). Причем, как для симметричных, так и для кососимметричных колебаний, величины $v_p^\pm$ этой моды в коротковолновом пределе остаются меньше асимптотического значения v_R . Асимптотическим значением фазовых скоростей $v_p^\pm$ второй распространяющейся моды является значение скорости $v_{St} = 0,968$ (рис. 3.11). При этом кривые приближаются к асимптоте $v_p^\pm = v_{St}$ сверху. Остальные моды приближаются к асимптоте $v_p^\pm = 1$. Для вариантов I–III асимптотическим значением величин $v_p^\pm$ для первой моды является значение v_{St} (рис. 3.11), а для остальных

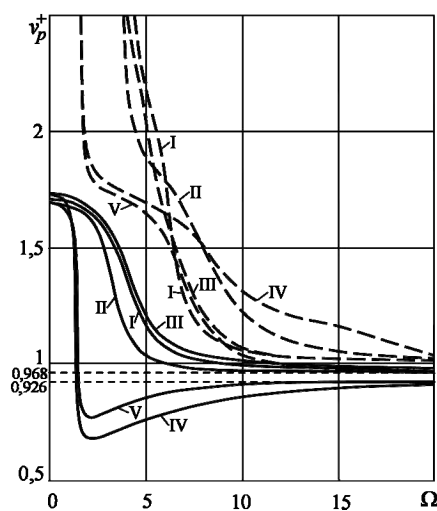


Рис. 3.11

мод – значение $v_p^\pm = 1$. Изменение предельных значений фазовых скоростей в вариантах I–III по сравнению с вариантами IV, V обусловлено изменением материалов слоев плиты. Следует отметить, что изменение материалов слоев пластины оказывает более заметное влияние на фазовые скорости, чем относительные их толщины.

Таким образом, неоднородность материала пластины приводит к новому характеру локализации фазовой скорости первой моды, а вид граничных условий оказывает заметное влияние при малых и средних частотах. Для высоких частот граничные условия оказывают незначительное влияние на значение величины $v_p^\pm$.

Влияние относительной толщины λ_1 жестких внешних слоев, относительной жесткости G и коэффициента Пуассона ν_1 внешних слоев на изменение фазовой скорости первой распространяющейся моды P-SV волн отражено в монографии [41]. Установлено, что изменение относительной жесткости G оказывает более значительное влияние, чем изменение коэффициента С.Д. Пуассона ν_1 . В работе [41] также проведено исследование групповой скорости (скорости переноса энергии) распространяющихся P-SV мод.

3.3. Колебания трехслойных пластин симметричного строения при скользящем контакте однородных слоев. Исследование упругих колебаниях трехслойных плит со скользящим контактом слоев, проведенное в работах [41, 179–181, 195, 196, 202], сводится к решению краевых задач 5–8. В данном случае граничные условия, соответствующие сопряжению слоев при $x_3 = \lambda_2$, для функций $p_m(x_3)$ вихревого состояния имеют вид (2.81), а для функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ потенциального состояния – вид (2.82). Эти условия необходимо рассматривать совместно с ограничениями для функций $p_m(x_3)$, $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ при $x_3 = 1$.

Для жесткого заземления торцов [41, 181] собственные функции $p_{mk}^\pm(x_3)$ и собственные значения $\delta_k^\pm$ вихревого состояния имеют вид

$$p_{1k}^\pm(x_3) = \cos l_{1k}^\pm(x_3 - \lambda_2), \quad p_{2k}^\pm(x_3) = \cos l_{2k}^\pm x_3, \quad p_{2k}^\pm(x_3) = \frac{1}{l_{2k}^\pm} \sin l_{2k}^\pm x_3, \\ l_{1k}^\pm = \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_1}, \quad l_{2k}^+ = \frac{\pi k}{\lambda_2}, \quad l_{2k}^- = \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_2}, \quad (\delta_{mk}^\pm)^2 = (l_{mk}^\pm)^2 - \Omega_m^2, \quad \{\delta_k^\pm\} = \{\delta_{1k}^\pm\} \cup \{\delta_{2k}^\pm\}. \quad (3.25)$$

В случае идеального контакта $\delta_k^\pm$ не представляются в явном виде и определяются численно.

Общий вид собственных функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ задается выражениями (3.2), (3.3). Из краевых условий (2.62), (2.82) получим относительно неизвестных $H_i^\pm$ ($i = \overline{1, 6}$) и параметра разделения переменных γ однородные системы линейных алгебраических уравнений. Результат решения этих систем приведен в монографии [41]. Дисперсионные уравнения для нахождения собственных значений $\gamma^\pm$ имеют вид

$$P_{35}^+(\gamma, \Omega) \equiv \rho \gamma_{11} (t_1 S_{11} C_{12} - \gamma^2 C_{11} S_{12}) (\xi_2 C_{21} S_{22} - \tau_2 S_{21} C_{22}) + \\ + G^2 \left(t_1 (4\gamma^4 + \xi_1) C_{11} C_{12} + \gamma^2 (4t_1^2 + \xi_1) S_{11} S_{12} - \tau_1 \xi_1 \right) \gamma_{21} S_{21} S_{22} = 0, \quad (3.26)$$

$$P_{35}^-(\gamma, \Omega) \equiv \rho \gamma_{11} (t_1 S_{11} C_{12} - \gamma^2 C_{11} S_{12}) (\xi_2 S_{21} C_{22} - \tau_2 C_{21} S_{22}) - \\ - G^2 \left(t_1 (4\gamma^4 + \xi_1) C_{11} C_{12} + \gamma^2 (4t_1^2 + \xi_1) S_{11} S_{12} - \tau_1 \xi_1 \right) \gamma_{21} C_{21} C_{22} = 0, \quad (3.27)$$

Как и прежде, функции $P_{35}^\pm(\gamma, \Omega)$ зависят от параметров G , ρ , ν_m , λ_m .

Предельный переход к задачам статики осуществляется с помощью разложений функции $P_{35}^\pm(\gamma, \Omega)$ в ряд Б. Тейлора в окрестности точки $\Omega = 0$. При $\Omega \rightarrow 0$ из уравнений (3.26), (3.27) получаем (2.84).

Если $G=1$, $\rho=1$, $\nu_1=\nu_2=\nu$, $\lambda_1=\lambda_2=1/2$, то дисперсионные уравнения (3.26), (3.27) примут вид

$$\begin{aligned} P_{35}^+(\gamma, \Omega) &= 2(tS_1C_2 - \gamma^2 C_1S_2)(\xi C_1S_2 - \tau S_1C_2) + \gamma^2(2tS_1 - \xi S_2)^2 = 0, \\ P_{35}^-(\gamma, \Omega) &= 2(tS_1C_2 - \gamma^2 C_1S_2)(\xi S_1C_2 - \tau C_1S_2) - t(2\gamma^2 C_1 - \xi C_2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Данные уравнения отличаются от аналогичных для однородной пластины. Поэтому из-за неидеального контакта слоев получаем однородную пластину с «расслоением».

Для определения частот запираания из соотношений (3.26), (3.27) получаем следующие трансцендентные уравнения

$$\begin{aligned} P_{35}^+(0, \Omega) &= (Gk_2\Omega_1c_{11}s_{21} + k_1\Omega_2s_{11}c_{21})c_{12}s_{22} = 0, \\ P_{35}^-(0, \Omega) &= (Gk_2\Omega_1c_{11}c_{21} - k_1\Omega_2s_{11}s_{21})c_{12}c_{22} = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Каждое из уравнений (3.28) определяет по три независимые серии частот запираания. Причем частоты двух серий находятся в явном виде

$$\Omega_{1p}^\pm = \frac{\pi}{\lambda_1} \left(p - \frac{1}{2} \right), \quad \Omega_{2p}^+ = \frac{\pi p}{\lambda_2}, \quad \Omega_{2p}^- = \frac{\pi}{\lambda_2} \left(p - \frac{1}{2} \right) \quad p=1, 2, \dots \quad (3.29)$$

и не зависят от значений коэффициентов С.Д. Пуассона ν_1 , ν_2 в отличие от частот третьих семейств, определяемых численно.

При $\lambda_1=\lambda_2=1/2$ частоты запираания (3.29) в случае кососимметричных колебаний становятся двукратными. Следует отметить, что в случае идеального контакта все частоты запираания определялись приближенно численными методами.

Исследование уравнений (3.26), (3.27) в области $y \ll 1$ ($y = \text{Im } \gamma$, γ – мнимое) и $\Omega \ll 1$ показывает существование симметричной распространяющейся моды с нулевой частотой запираания. Для безразмерной фазовой скорости v_p^+ этой моды при малых частотах получаем выражение

$$v_p^+ = v_{S2} \sqrt{\frac{4\lambda_1 k_1^2 (1 - k_2^2) + G\lambda_2}{\lambda_1 k_1^2 + G\lambda_2 k_2^2}}, \quad v_{S2} = c_{S2}/c_0.$$

Из этой формулы следует, что в низкочастотном диапазоне первая мода является бездисперсной, и, как следствие, ее групповая скорость совпадает с фазовой. Следует отметить, что подобная мода отсутствует в случае идеального контакта слоев.

Из рассмотрения уравнений (3.26), (3.27) в области изменения параметров $y \gg 1$, $\Omega \gg 1$ для первой бегущей моды получаем уравнение (1.72), которое позволяет описать волны Р. Стоунли и отличается от аналогичного (3.9) в случае идеального контакта слоев пластины. Фазовая скорость первой распространяющейся моды в коротковолновом высокочастотном пределе совпадает со скоростью поверхностной волны Р. Стоунли. Скорости других мод при $y \rightarrow \infty$ имеют предельное значение (3.18).

Предельное соотношение, описывающее асимптотическое значения фазовой скорости $v_p^\pm$ первой распространяющейся моды в области высоких частот, в случае $G=1$, $\rho=1$, $\nu_1=\nu_2=\nu$ (однородная пластина с «расслоением») преобразуются к уравнению Дж. Рэлея

$$\left(2 - (v_p^\pm)^2\right)^2 - 4\sqrt{1 - k^2(v_p^\pm)^2} \sqrt{1 - (v_p^\pm)^2} = 0.$$

Таким образом, фазовые скорости $v_p^\pm$ первой распространяющейся моды имеет в коротковолновом пределе значение безразмерной скорости волны Дж. Рэлея $v_R = c_R/c_S$ и $v_p^+ > v_R$.

В случае свободных от напряжений торцов [41, 196, 202] собственные функции $p_{mk}(x_3)$ получаются такими:

$$p_{1k}^{\pm}(x_3) = \cos l_{1k}^{\pm}(1-x_3), \quad p_{2k}^{\pm}(x_3) = \cos l_{2k}^{\pm}x_3, \quad p_{2k}^{-}(x_3) = \frac{1}{l_{2k}^{-}} \sin l_{2k}^{-}x_3. \quad (3.30)$$

Счетные множества собственных значений δ_k^+ и δ_k^- , в отличие от идеального контакта, определяются в явном виде

$$\{\delta_k^{\pm}\} = \{\delta_{1k}^{\pm}\} \cup \{\delta_{2k}^{\pm}\}, \quad (\delta_{mk}^{\pm})^2 = (l_{mk}^{\pm})^2 - \Omega_m^2, \quad l_{1k}^{\pm} = \frac{\pi k}{\lambda_1}, \quad l_{2k}^{\pm} = \frac{\pi k}{\lambda_2}, \quad l_{2k}^{-} = \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_2} \quad (k=1,2,\dots). \quad (3.31)$$

На основании соотношений (3.31) можно исследовать частотные спектры, и, как следствие, описать фазовые и групповые скорости распространяющихся мод SH волн в трехслойной пластине, которые находятся в явном виде. Следует отметить, что в случае идеального контакта слоев для нахождения фазовых и групповых скоростей используются приближенные методы.

В работах [41, 196, 202] найдены функции $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ потенциального решения, получены дисперсионные уравнения относительно собственных значений $\gamma^{\pm}$:

$$P_{36}^+(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \rho \gamma_{11} (\xi_1^2 C_{11} S_{12} - \tau_1 S_{11} C_{12}) (\xi_2^2 C_{21} S_{22} - \tau_2 S_{21} C_{22}) - \\ - G^2 \left[2\xi_1^2 \tau_1 (C_{11} C_{12} - 1) + (\xi_1^2 + \tau_1^2) S_{11} S_{12} \right] \gamma_{21} S_{22} S_{22} = 0, \quad (3.32)$$

$$P_{36}^-(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \rho \gamma_{11} (\xi_1^2 C_{11} S_{12} - \tau_1 S_{11} C_{12}) (\xi_2^2 S_{21} C_{22} - \tau_2 C_{21} S_{22}) + \\ + G^2 \left[2\xi_1^2 \tau_1 (C_{11} C_{12} - 1) + (\xi_1^2 + \tau_1^2) S_{11} S_{12} \right] \gamma_{21} C_{21} C_{22} = 0. \quad (3.33)$$

Рассмотрены [41] частные случаи, обусловленные изменением частоты, упругих параметров и относительных толщин слоев плиты: $\Omega \rightarrow 0$; $G=1$, $\rho=1$, $\nu_1=\nu_2=\nu$, $\lambda_1=\lambda_2=1/2$; $G \rightarrow 0$; $G \rightarrow \infty$; $\lambda_1 \rightarrow 0$; $\lambda_2 \rightarrow 0$.

Для определения частот записания из уравнений (3.32), (3.33) получим

$$P_{36}^+(0, \Omega) \equiv (k_1 \Omega_1 c_{11} c_{21} - \rho k_2 \Omega_2 s_{11} s_{21}) s_{12} s_{22} = 0, \\ P_{36}^-(0, \Omega) \equiv (k_1 \Omega_1 c_{11} s_{21} + \rho k_2 \Omega_2 s_{11} c_{21}) s_{12} c_{22} = 0. \quad (3.34)$$

На основе уравнений (3.32), (3.33) получим предельные соотношения, описывающие асимптотические значения фазовых скоростей $v_p^{\pm}$ на низких и высоких частотах колебаний. Независимо от вида симметрии колебаний существуют две распространяющиеся моды с нулевой частотой записания. Предельные значения для фазовых скоростей $v_p^{\pm} = \Omega/\gamma$ этих мод в области низких частот таковы:

$$v_{p1}^+ = 2\nu_{S1} \sqrt{1-k_1^2}, \quad v_{p2}^+ = 2\nu_{S2} \sqrt{1-k_2^2} \quad (v_{Sm} = c_{Sm}/c_0), \\ v_{p1}^- = 2\nu_{S1} \sqrt{1-k_1^2}, \quad v_{p2}^- = \nu_{S2} \sqrt{\frac{G\lambda_1^3(1-k_1^2) + 4\lambda_2^3(1-k_2^2)}{3(\rho\lambda_1 + \lambda_2)}} \gamma.$$

В коротковолновом диапазоне при $\gamma \rightarrow \infty$ из обоих уравнений (3.32), (3.33) для первых двух бегущих мод в области $\gamma > \Omega_1$, $\gamma > \Omega_2$ получаем

$$R_1(v_p) R_3(v_p) = 0, \quad (3.35)$$

где $R_1(v_p)$ задано выражением (3.17), а $R_3(v_p)$ имеет вид (1.72). Поэтому в коротковолновом диапазоне асимптотическими значениями фазовых скоростей первых двух мод являются скорости поверхностных волн Р. Стоунли v_{St} и Дж. Рэлея v_R , если они существуют.

Случай скользящей заделки плоских граней (задача 7) рассмотрен в работах [41, 179, 195]. Собственные функции $p_{1k}(x_3)$, $p_{2k}(x_3)$ и собственные значения $\delta_k^\pm$ вихревого решения имеют вид (3.30) и (3.31). Для нахождения собственных функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ потенциального решения необходимо подставить выражения (3.2) в граничные условия (2.65), (2.82). Относительно собственных значений $\gamma^\pm$ получаем дисперсионные уравнения

$$P_{37}^+(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \rho \gamma_{11} S_{11} S_{12} (\xi_2 C_{21} S_{22} - \tau_2 S_{21} C_{22}) + \\ + G^2 (\xi_1 C_{11} S_{12} - \tau_1 S_{11} C_{12}) \gamma_{21} S_{21} S_{22} = 0, \quad (3.36)$$

$$P_{37}^-(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \rho \gamma_{11} S_{11} S_{12} (\xi_2 S_{21} C_{22} - \tau_2 C_{21} S_{22}) - \\ - G^2 (\xi_1 C_{11} S_{12} - \tau_1 S_{11} C_{12}) \gamma_{21} C_{21} C_{22} = 0. \quad (3.37)$$

Частоты запираания определяются из уравнений

$$P_{37}^+(0, \Omega) \equiv (G k_2 \Omega_1 c_{11} s_{21} + k_1 \Omega_2 s_{11} c_{21}) s_{12} s_{22} = 0, \\ P_{37}^-(0, \Omega) \equiv (G k_2 \Omega_1 c_{11} c_{21} - k_1 \Omega_2 s_{11} s_{21}) s_{12} c_{22} = 0, \quad (3.38)$$

Сопоставляя уравнения (3.38) с аналогичными (3.21) видим, что частоты запираания, зависящие от коэффициентов С.Д. Пуассона ν_1 и ν_2 , одинаковые как для скользящего, так и для идеального контактов.

В случае симметричных колебаний первые две распространяющиеся моды имеют нулевую частоту запираания, а в случае кососимметричных колебаний – одна. При этом для безразмерных фазовых скоростей $v_p^\pm$ в случае малых частот имеем

$$\lambda_1 (1 - k_1^2 (v_{p1}^+)^2) ((v_{p2}^+)^2 - 4(1 - k_2^2)) + G \lambda_2 (1 - k_2^2 (v_{p2}^+)^2) ((v_{p1}^+)^2 - 4(1 - k_1^2)) = 0, \quad v_p^- = 2v_{s1} \sqrt{1 - k_1^2}.$$

В высокочастотном коротковолновом диапазоне ($y \gg 1$, $\Omega \gg 1$) из соотношений (3.36), (3.37) для первой бегущей моды получаем уравнение для нахождения скорости v_{St} волны Р. Стоунли (1.72). Остальные моды при $y \rightarrow \infty$ удовлетворяют условию (3.18). Для однородной пластины с «расслоением» в коротковолновом пределе высокочастотного диапазона фазовая скорость первой распространяющейся моды $v_p^\pm$ совпадает со значением безразмерной скорости волны Дж. Рэлея $v_R = c_R/c_S$. Причем величина v_p^+ остается больше v_R , а величина v_p^- – меньше.

В случае покрытых диафрагмой торцов (задача 8) собственные функции $p_{1k}^\pm(x_3)$, $p_{2k}^\pm(x_3)$ и собственные значения $\delta_k^\pm$ вихревого решения совпадают с аналогичными в задаче 5 и имеют вид (3.25). Функции $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ и параметр разделения переменных γ потенциального решения находятся из соотношений (3.2) с учетом краевых условий (2.77), (2.82). В работах [41, 180, 195] получены коэффициенты $H_i^\pm$ и дисперсионные уравнения относительно собственных значений $\gamma^\pm$

$$P_{38}^+(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \rho \gamma_{11} C_{11} C_{12} (\xi_2 C_{21} S_{22} - \tau_2 S_{21} C_{22}) - \\ - G^2 (\xi_1 S_{11} C_{12} - \tau_1 C_{11} S_{12}) \gamma_{21} S_{21} S_{22} = 0; \quad (3.39)$$

$$P_{38}^-(\gamma, \Omega; G, \rho, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \rho \gamma_{11} C_{11} C_{12} (\xi_2 S_{21} C_{22} - \tau_2 C_{21} S_{22}) + \\ + G^2 (\xi_1 S_{11} C_{12} - \tau_1 C_{11} S_{12}) \gamma_{21} C_{21} C_{22} = 0 \quad (3.40)$$

и рассмотрены частные случаи изменения частоты Ω , упругих параметров и относительных толщин слоев пластины.

Относительно частот запираания ($\gamma = 0$) на основе дисперсионных соотношений (3.39), (3.40) получаем трансцендентные уравнения

$$\begin{aligned} P_{38}^+(0, \Omega) &\equiv (Gk_2\Omega_1s_{11}s_{21} - k_1\Omega_2c_{11}c_{21})c_{12}s_{22} = 0, \\ P_{38}^-(0, \Omega) &\equiv (Gk_2\Omega_1s_{11}c_{21} + k_1\Omega_2c_{11}s_{21})c_{12}c_{22} = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Как и в задачах 5–7, уравнения (3.41) определяют по три независимые серии частот запираания. При $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ возникает двукратная серия частот запираания.

Из уравнений (3.39), (3.40) следует существование распространяющейся моды, которая проходит через начало координат $\gamma = \Omega = 0$. Безразмерные фазовые скорости $v_p^\pm$ этих мод при малых частотах находятся по формулам

$$v_p^+ = 2v_{s2}\sqrt{1-k_2^2}, \quad v_p^- = 2v_{s2}\sqrt{\frac{G\lambda_1^3(1-k_1^2) + \lambda_2^3(1-k_2^2)}{3(\rho\lambda_1 + \lambda_2)}} y.$$

Если $y \rightarrow \infty$, то из соотношений (3.39), (3.40) для мнимых γ получаем уравнение Р. Стоунли (1.72). Решение данного уравнения позволяет найти предельное значение фазовой скорости первой бегущей моды.

С изменением вида граничных условий на торцах плиты (задачи 5–8) уравнение Р. Стоунли (1.72) не изменяется и отличается от аналогичного (3.9) в случае идеального контакта слоев. Вследствие этого на значение скоростей волн Р. Стоунли оказывают влияние лишь условия контакта слоев. Следует отметить, что в однородной пластине с «расслоением» в области высоких частот коротковолнового диапазона фазовая скорости $v_p^\pm$ первой распространяющейся моды трансформируются в скорость волны Дж. Рэлея v_R . Данное явление не имеет место при переходе от трехслойной пластины с идеальным контактом слоев к однородной.

Исследование спектров нормальных волн. Численные исследования характеристик волнового процесса в трехслойной плите с несовершенным контактом слоев были проведены для вариантов I–VII, рассмотренных раньше в случае идеального контакта слоев. При этом в вариантах VI, VII дополнительно положим $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$.

В монографии [41] приведены значения частот запираания (варианты I–VII). Разные краевые условия на торцах порождают одинаковые подмножества частот запираания. Значения частот запираания в случае пластины со слоями из одинаковых материалов свидетельствуют о том, что в такой пластине из-за неидеального контакта слоев невозможен переход к однородной. Отмечено, что независимо от условий контакта имеются одинаковые подмножества частот запираания при каждом виде граничных условий на плоских гранях.

На рис. 3.12 отражено влияние относительной толщины λ_1 внешних слоев и граничных условий на торцах плиты (задачи 5–8) на изменение первой ненулевой частоты запираания P-SV мод. Обозначения кривых находятся в соответствии с номерами задач. Предполагается, что внешние слои пластины изготовлены из алюминия, а внутренний – из вольфрама. Из рис. 3.12 видно, что на изменение первой частоты запираания заметное влияние оказывают граничные условия, относительные толщины слоев и условия контакта слоев плиты.

Каждое из дисперсионных уравнений (3.26), (3.27), (3.32), (3.33), (3.36), (3.37), (3.39), (3.40) обусловленных потенциальным решением в задачах 5–8, определяет счетное множество спектральных кривых – зависимостей параметра γ от безразмерной частоты Ω . На рис. 3.13–3.16 (вариант I) при заданных параметрах G , ρ , v_1 , v_2 , λ_1 , λ_2 представлены полные дисперсионные спектры,

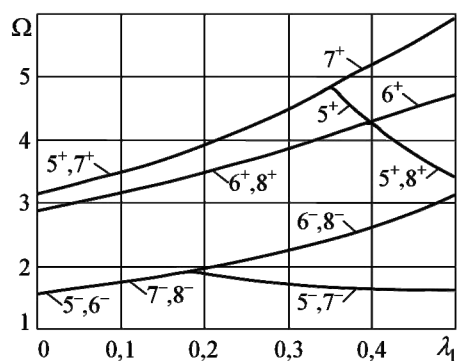


Рис. 3.12

состоящие из действительных, мнимых и комплексных ветвей. На диаграммах дисперсионных кривых, как и ранее, сплошными линиями изображены кривые вещественных и чисто мнимых корней, а штриховыми – проекции комплексных ветвей частотного спектра на действительную ($\text{Re}\gamma, \Omega$) и мнимую ($\text{Im}\gamma, \Omega$) плоскости. Многочисленные результаты численных исследований подтверждают, что соответствующие дисперсионные уравнения при фиксированной частоте имеют конечное число действительных и мнимых корней и счетное множество комплексных корней. Однако, уравнение (3.36), (3.40) (вариант I) при любой частоте Ω имеют счетные множества действительных корней (рис. 3.15, а и рис. 3.16, б).

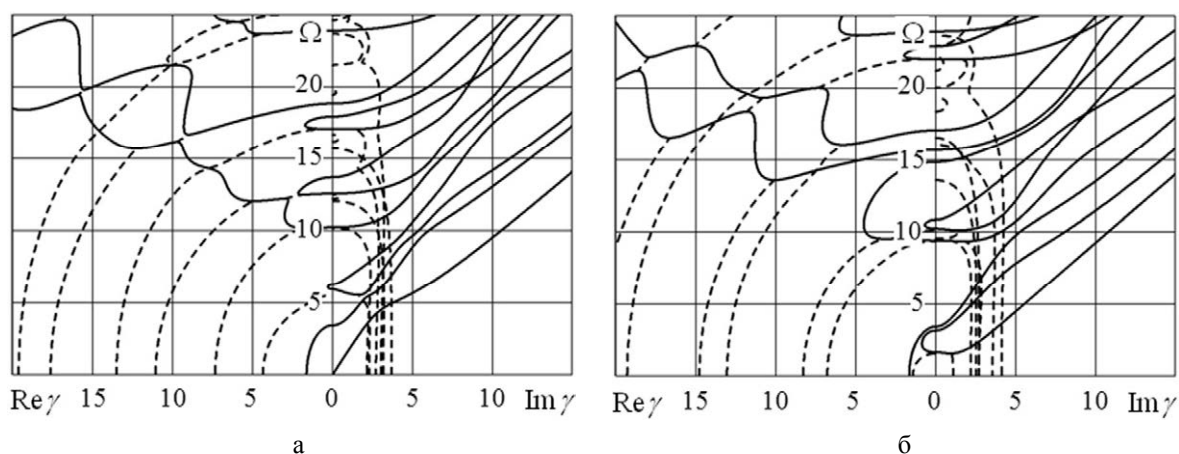


Рис. 3.13

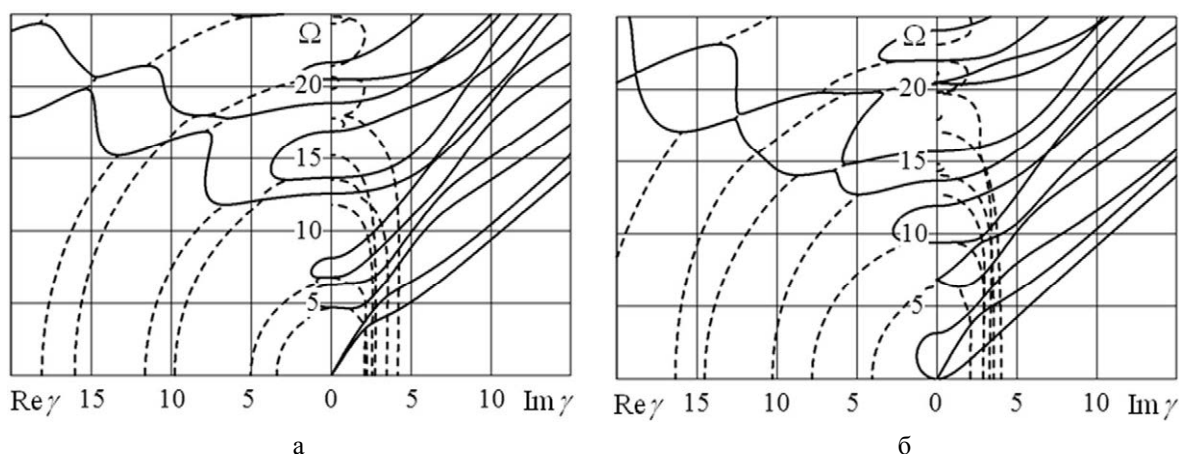


Рис. 3.14

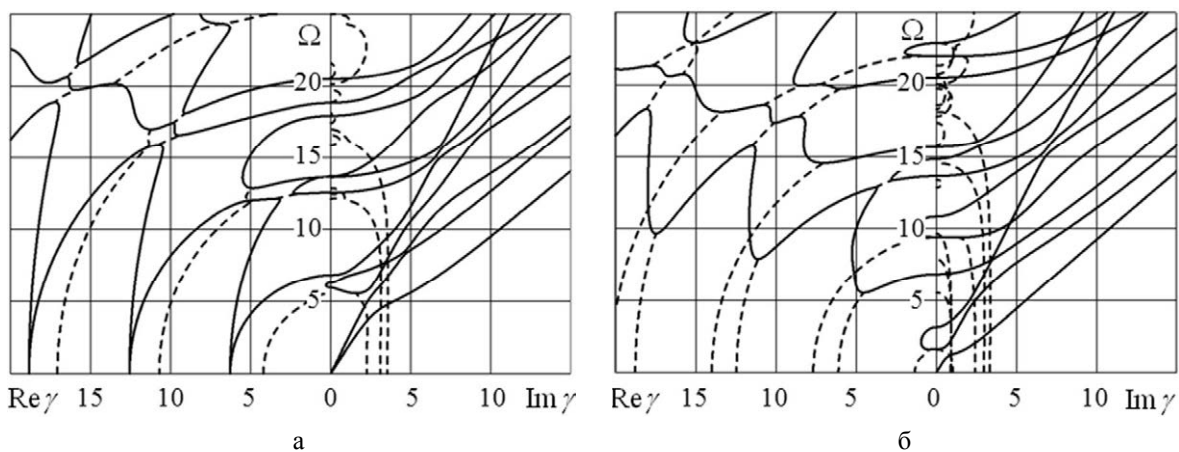


Рис. 3.15

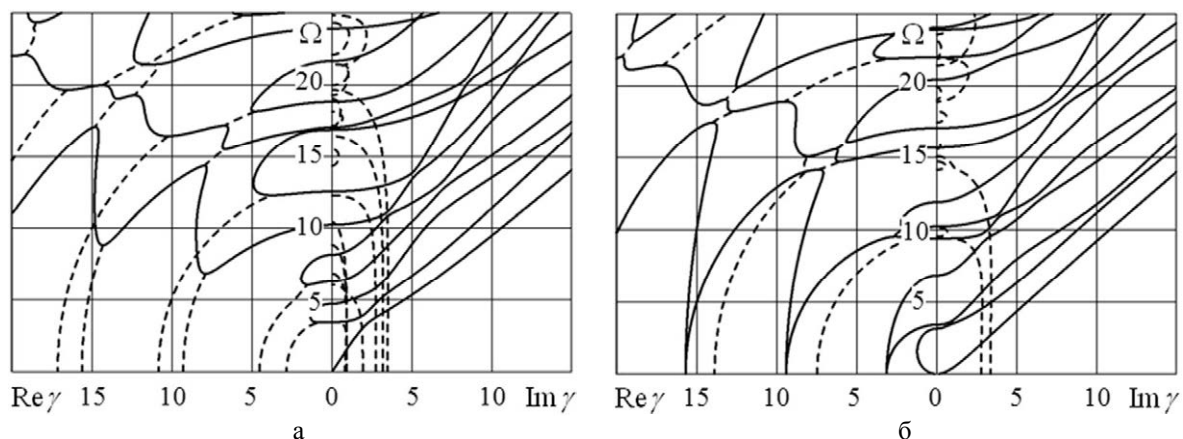


Рис. 3.16

Анализ дисперсионных спектров (рис. 3.13–3.16) показывает, что при всех видах граничных условий на торцах трехслойной пластины в области низких частот появляются мнимые (бегущие) моды. Важно отметить, что в случае идеального контакта слоев (задача 1) в дисперсионном спектре отсутствует подобная мода.

На рис. 3.17 показано влияние вида граничных условий на плоских гранях пластины на изменение безразмерных фазовых скоростей $v_p^\pm$ первых двух распространяющихся мод P-SV волн в диапазоне частот $0 \leq \Omega \leq 20$ (вариант I). Обозначения кривых соответствуют номерам задач. Сплошные кривые соответствуют первой моде, а штриховые – второй.

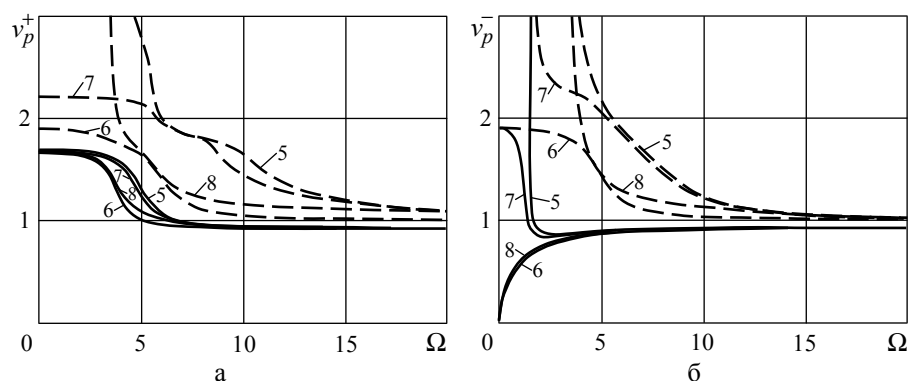


Рис. 3.17

Данные рис. 3.17 и других, представленных в монографии [41], позволяют выявить следующее. Фазовые скорости $v_p^\pm$ мод на нулевой частоте записи принимают конечные значения. Это обусловлено наличием мод, выходящих из нуля. Фазовые скорости v_p на ненулевых частотах записи стремятся к бесконечности. С увеличением частоты фазовая скорость в большинстве случаев монотонно убывает. Исключением является, например, первая кососимметричная мода на рис. 3.17, б.

В случае граничных условий жесткого защемления, плоского торца и диафрагмы (задачи 5, 7 и 8), а также при определенных сочетаниях упругих параметров слоев пластины со свободными от напряжений торцами (задача 6, варианты I–III) фазовые скорости $v_p^\pm$ первой моды в коротковолновом высокочастотном пределе стремятся к значению 0,936, которое соответствует скорости v_{St} волны Р. Стоунли. При этом величина v_p^+ остается больше асимптотического значения v_{St} , а величина v_p^- – меньше. Фазовые скорости второй и остальных мод с увеличением частоты приближаются к асимптоте $v_p = 1$ сверху, поэтому величина c_p стремится к наименьшей из двух сдвиговых скоростей c_{S1} , c_{S2} .

Если торцы плиты свободны от напряжений (задача 6) и имеют место варианты IV, V, то фазовые скорости $v_p^\pm$ первой распространяющейся моды приближаются снизу к безразмерной скорости поверхностной волны Дж. Рэлея v_R , равной 0,926. Здесь асимптотическим значением фазовых скоростей $v_p^\pm$ второй распространяющейся моды является значение величины v_{St} . При этом значения величин $v_p^\pm$ приближаются к асимптоте v_{St} сверху. Скорости третьей и высших мод приближаются к асимптоте $v_p = 1$.

Таким образом, условия контакта слоев, неоднородность пластины приводит к новому характеру локализации фазовой скорости первой моды, а вид граничных условий, в первую очередь, следует учитывать при малых и средних частотах колебаний. В области высоких частот колебаний граничные условия оказывают незначительное влияние на изменение фазовых скоростей $v_p^\pm$.

В монографии [41] проиллюстрировано влияние относительной жесткости G слоев, относительной толщины λ_1 внешнего слоя на изменение фазовой скорости первой распространяющейся P-SV моды, а также влияние условий контакта.

Сравнительный анализ характеристик волнового процесса в трехслойной пластине при идеальном и скользящем контактах слоев и с различными видами однородных граничных условий на торцах показал как их различия, так и сходство. В длинноволновом диапазоне эти отличия состоят в изменении значений и количества частот запираания. В коротковолновом диапазоне, при условии существования волны Р. Стоунли, имеет место одинаковое предельное поведение низшей моды бегущих P-SV волн.

4. Равновесие и колебания плит с экспоненциальным изменением модуля сдвига и плотности материала. В работах [41, 177, 178, 194] рассмотрены трехмерные краевые задачи об упругом равновесии или гармонических колебаниях поперечно-неоднородных изотропных плит. Материал, из которого изготовлена пластина, является упругим, изотропным и, в общем случае, неоднородным и характеризуется двумя упругими параметрами – коэффициентом С.Д. Пуассона $\nu = \nu(x_3)$ и безразмерным модулем сдвига $G = G(x_3)$.

Для поперечно-неоднородных плит система уравнений движения (равновесия при $\Omega = 0$) в перемещениях в безразмерных величинах имеет вид [41, 67]

$$\begin{aligned} G\nu_0\partial_j\theta + G\nabla^2 u_j + \frac{1}{\lambda}G'\left(\partial_j u_3 + \frac{1}{\lambda}\partial_3 u_j\right) + \frac{\Omega^2}{\lambda^2}\rho u_j &= 0 \quad (j=1,2), \\ \frac{1}{\lambda}G\nu_0\partial_3\theta + G\nabla^2 u_3 + \frac{2}{\lambda^2}G'\partial_3 u_3 + \frac{2}{\lambda}\nu_0(\nu'v_0G + \nu G')\theta + \frac{\Omega^2}{\lambda^2}\rho u_3 &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_i^2 = \partial^2/\partial x_i^2$, $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \lambda^{-2}\partial_3^2$, $\theta = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \lambda^{-1}\partial_3 u_3$, Ω , ρ – безразмерные частота колебаний и плотность материала. Граничные условия на плоских гранях $x_3 = \pm 1$ имеют вид

$$u_i(x_1, x_2, \pm 1) = 0; \quad (4.2) \quad \sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm 1) = 0; \quad (4.3) \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \quad u_j(x_1, x_2, \pm 1) = 0; \quad (4.4)$$

$$u_3(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \quad \sigma_{j3}(x_1, x_2, \pm 1) = 0; \quad (4.5) \quad \sigma_{i3}(x_1, x_2, 1) = 0, \quad u_i(x_1, x_2, -1) = 0; \quad (4.6)$$

$$\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm 1) + k_i^\pm u_i(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (k_1^\pm = k_2^\pm = k^\pm). \quad (4.7)$$

Однородные решения системы уравнений (4.1), удовлетворяющие одному из краевых условий на торцах пластины (4.2)–(4.7), представляются суммой вихревого и потенциального состояний

$$\begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(x_3)\partial_2 B(x_1, x_2) \\ -p(x_3)\partial_1 B(x_1, x_2) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n(x_3)\partial_1 C(x_1, x_2) \\ n(x_3)\partial_2 C(x_1, x_2) \\ q(x_3)C(x_1, x_2) \end{Bmatrix}. \quad (4.8)$$

Спектральная задача, возникающая в вихревом решении, состоит из дифференциального уравнения

$$(Gp')' + (\delta^2 G + \rho \Omega^2) p = 0 \quad (4.9)$$

и одного из граничных условий

$$p(\pm 1) = 0, \quad (4.10) \quad p'(\pm 1) = 0, \quad (4.11) \quad p(\pm 1) = 0, \quad (4.12)$$

$$p'(\pm 1) = 0, \quad (4.13) \quad p'(1) = 0, \quad p(-1) = 0, \quad (4.14) \quad G(\pm 1)p'(\pm 1) + 2\lambda k^\pm p(\pm 1) = 0. \quad (4.15)$$

Совместные уравнения (4.9) с одним из краевых условий (4.10)–(4.15) представляют собой шесть спектральных задач типа Ш.-Ф. Штурма – Ж. Лиувилля для определения счетного множества собственных функций $p_k(x_3)$ и собственных значений δ_k . В случае $G = \text{const}$ и $\Omega = 0$ уравнение (4.9) совпадает с $p''(x_3) + \delta^2 p(x_3) = 0$.

В потенциальном решении система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $n(x_3)$ и $q(x_3)$ имеет вид

$$\begin{aligned} (Gn')' + (\rho \Omega^2 + (1 + \nu_0) \gamma^2 G) n + \lambda (G'q + G\nu_0 q') &= 0, \\ ((1 + \nu_0)Gq')' + (\rho \Omega^2 + \gamma^2 G) q + \frac{\gamma^2}{\lambda} (2(\nu_0 G)' n + G\nu_0 n') &= 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

а краевые условия:

$$n(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0; \quad (4.17) \quad M(\pm 1) = 0, \quad N(\pm 1) = 0; \quad (4.18)$$

$$N(\pm 1) = 0, \quad n(\pm 1) = 0; \quad (4.19) \quad q(\pm 1) = 0, \quad M(\pm 1) = 0; \quad (4.20)$$

$$M(1) = 0, \quad N(1) = 0, \quad n(-1) = 0, \quad q(-1) = 0; \quad (4.21)$$

$$M(\pm 1) + k^\pm n(\pm 1) = 0, \quad N(\pm 1) + k_3^\pm q(\pm 1) = 0, \quad (4.22)$$

где $M(x_3) = G(\lambda^{-1} n' + q)/2$, $N(x_3) = \lambda^{-2} G\nu_0(\lambda(1 - \nu)q' + \gamma^2 \nu n)$.

Решение спектральных задач (4.16), (4.17)–(4.22) позволяет определить счетное множество собственных значений γ_p и собственных функций $n_p(x_3)$, $q_p(x_3)$.

В общем случае изменения упругих параметров для решения спектральных задач можно использовать численные методы. Это позволит приближенно найти собственные функции $p(x_3)$, $n(x_3)$, $q(x_3)$ и собственные значения δ , γ . Важным является выяснение частных случаев изменения упругих параметров, когда можно в явном аналитическом виде найти собственные функции $p(x_3)$, $n(x_3)$, $q(x_3)$. Исследования общих свойств собственных функций и значений спектральных задач, полноты однородных решений могут быть выполнены на основании результатов работы [75].

Представляет интерес случай экспоненциального изменения упругих параметров слоя, когда можно в явном аналитическом виде найти собственные функции $p_k(x_3)$, $n_p(x_3)$, $q_p(x_3)$.

Для плит с экспоненциальным изменением модуля сдвига упругие параметры G , ν изменяются по закону

$$G(x_3) = e^{\alpha x_3}, \quad \nu = \text{const}.$$

Тогда уравнения движения (4.1) после сокращения на множитель $e^{\alpha x_3}$ принимают вид [41]

$$\lambda^2 \nu_0 \partial_j \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_j + \alpha (\lambda \partial_j u_3 + \partial_3 u_j) + \Omega^2 u_j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$\lambda \nu_0 \partial_3 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_3 + 2\alpha (\partial_3 u_3 + \lambda \nu \nu_0 \theta) + \Omega^2 u_3 = 0.$$

Однородные решения построены для случаев жесткого защемления торцов пластины [41, 194], покрытых диафрагмой торцов [177], скользящей заделки торцов [178].

На основании соотношений (4.9) и одного из условий (4.10), (4.12), (4.13) приходим к следующим спектральным задачам вихревого решения. При этом уравнение (4.9) имеет вид

$$p'' + \alpha p' + (\Omega^2 + \delta^2)p = 0, \quad (4.23)$$

Собственные значения δ_k и собственные функции $p(x_3)$ спектральных задач (4.23) и (4.10), (4.12), (4.13) находятся в явном виде

$$\delta_k = \sqrt{\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \Omega^2} \quad (k=1, 2, \dots);$$

$$p_k(x_3) = e^{-\alpha x_3/2} \sin \frac{\pi k}{2} (1-x_3) - \text{для условий (4.10), (4.12),}$$

$$p_k(x_3) = e^{-\alpha x_3/2} \left(\alpha \sin \frac{\pi k}{2} (1-x_3) - \pi k \cos \frac{\pi k}{2} (1-x_3) \right) - \text{для условий (4.13).}$$

Спектральные задачи потенциального решения записываются так

$$n'' + \alpha n' + ((1+\nu_0)\gamma^2 + \Omega^2)n + \lambda \nu_0 q' + \alpha \lambda q = 0,$$

$$q'' + \alpha q' + \frac{\gamma^2 + \Omega^2}{1+\nu_0} q + \frac{\nu_0 \gamma^2}{\lambda(1+\nu_0)} n' + \frac{\alpha(\nu_0-1)\gamma^2}{\lambda(1+\nu_0)} n = 0; \quad (4.24)$$

$$n(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0; \quad (4.25) \quad n(\pm 1) = 0, \quad q'(\pm 1) = 0; \quad (4.26) \quad n'(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0. \quad (4.27)$$

Собственные функции спектральной задачи имеют вид

$$n(x_3) = H_1 e^{s_1 x_3} + H_2 e^{s_2 x_3} + H_3 e^{s_3 x_3} + H_4 e^{s_4 x_3}, \quad q(x_3) = Q_1 e^{s_1 x_3} + Q_2 e^{s_2 x_3} + Q_3 e^{s_3 x_3} + Q_4 e^{s_4 x_3}.$$

Здесь

$$Q_j = a_j H_j / \Delta \quad (j = \overline{1, 4}),$$

$$a_1 = (\alpha_1 + 2i\gamma_1)(\kappa^2 + d), \quad a_2 = (\alpha_1 - 2i\gamma_1)(\kappa^2 + d),$$

$$a_3 = (\alpha_1 + 2i\gamma_2)(\kappa^2 - d), \quad a_4 = (\alpha_1 - 2i\gamma_2)(\kappa^2 - d),$$

$$\alpha_1 = -\alpha(1-4\nu), \quad \kappa^2 = 2\gamma^2 + \Omega^2, \quad \Delta = 4\lambda(\Omega^2 + \gamma^2 - 4\alpha^2\nu(1-\nu)).$$

$$\gamma_1^2 = \gamma^2 + \frac{1-2\nu}{2-2\nu}\Omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} + d_1, \quad \gamma_2^2 = \gamma^2 + \Omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} - d_1,$$

$$d_1 = \frac{\Omega^2 - d}{4(1-\nu)}, \quad d = \sqrt{\Omega^4 + 16\alpha^2\gamma^2\nu(1-\nu)}, \quad i^2 = -1;$$

$$s_1 = -\frac{\alpha}{2} + i\gamma_1, \quad s_2 = -\frac{\alpha}{2} - i\gamma_1, \quad s_3 = -\frac{\alpha}{2} + i\gamma_2, \quad s_4 = -\frac{\alpha}{2} - i\gamma_2.$$

После удовлетворения одному из граничных условий (4.25)–(4.27) неизвестные коэффициенты H_i находятся из однородных систем линейных алгебраических уравнений. Из условия равенства нулю определителя системы для граничных условий (4.25)–(4.27) соответственно получаем трансцендентные дисперсионные уравнения для нахождения собственных значений γ_p

$$P_{41}(\gamma, \Omega; \nu, \alpha) = \alpha_1^2 d^2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_2 + (\gamma_2(\kappa^2 - d) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1(\kappa^2 + d) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \times$$

$$\times (\gamma_2(\kappa^2 - d) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - \gamma_1(\kappa^2 + d) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2) = 0; \quad (4.28)$$

$$P_{42}(\gamma, \Omega; \nu, \alpha) = d^2 \left(\alpha^2 - \frac{\Omega^2 + \gamma^2}{1 - \nu} \right)^2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + \alpha^2 \left((\kappa^2 - d) \gamma_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - \right. \\ \left. - (\kappa^2 + d) \gamma_1 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \right) \left((\kappa^2 - d) \gamma_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - (\kappa^2 + d) \gamma_1 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \right) = 0; \quad (4.29)$$

$$P_{43}(\gamma, \Omega; \nu, \alpha) = \left(\tau_1 \left(\alpha^2 (1 - 4\nu) + 4\gamma_2^2 \right) - \tau_2 \left(\alpha^2 (1 - 4\nu) + 4\gamma_1^2 \right) \right)^2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_2 + \\ + 64\alpha^2 \nu^2 (\gamma_2 \tau_1 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1 \tau_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) (\gamma_2 \tau_1 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - \gamma_1 \tau_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2) = 0, \quad (4.30)$$

где $\tau_1 = (\alpha^2 + 4\gamma_1^2)(\Omega^2 + 2\gamma^2 - d)$, $\tau_2 = (\alpha^2 + 4\gamma_2^2)(\Omega^2 + 2\gamma^2 + d)$.

Уравнения (4.28)–(4.30) связывают собственные значения γ и частоту Ω при заданных значениях коэффициента С.Д. Пуассона ν и параметра неоднородности α и описывает частотный спектр P-SV волн. При фиксированной частоте Ω корни γ_p этого уравнения могут быть действительными, мнимыми или комплексными (при $\Omega = 0$ корни уравнения являются действительными и комплексными). Действительные и комплексные корни γ отвечают нераспространяющимся волнам. Мнимые корни γ соответствуют бегущим волнам, которые имеют важное значение для исследования процесса переноса энергии.

Полагая в выражениях (4.1)–(4.30) частоту $\Omega = 0$ получаем решение соответствующей задачи о равновесии неоднородной пластины.

Результаты численных решений дисперсионных уравнений (4.28)–(4.30) представлены на рис. 4.1 в виде спектральных кривых – зависимостей собственных значений γ от частоты Ω при $\nu = 0,3$; $\alpha = 1$.

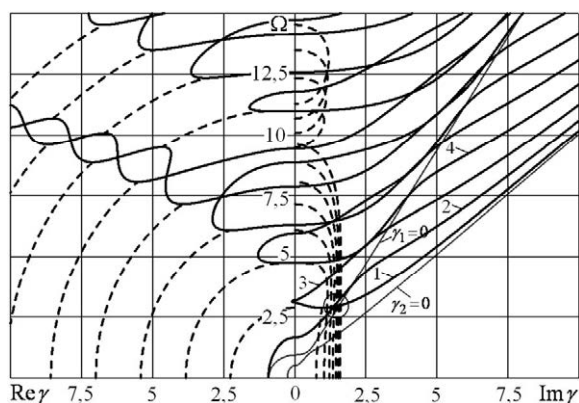


Рис. 4.1

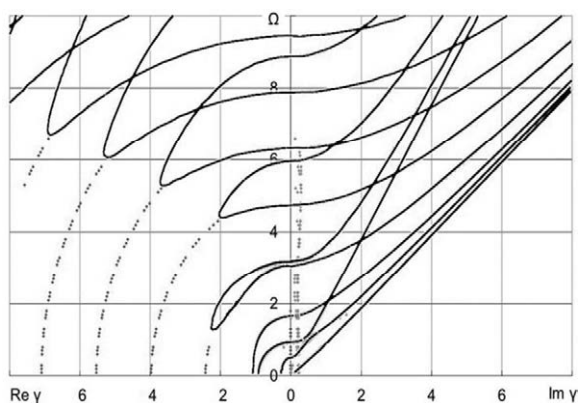


Рис. 4.2

Для уравнений (4.28) и (4.30) данные рис. 4.4 и рис. 4.5 соответственно иллюстрируют изменения безразмерных фазовых скоростей $v_p = \Omega / \text{Im } \gamma$ распространяющихся волн в диапазоне приведенной частоты $0 \leq \Omega \leq 10$. Сплошные линии соответствуют рассматриваемой задаче, штриховые и точечные – однородной пластине.

Влияние показателя неоднородности α материала пластины на изменение мнимых собственных значений γ для низшей распространяющейся моды отражено на рис. 4.6 и 4.7 для уравнений (4.28) и (4.30) соответственно.

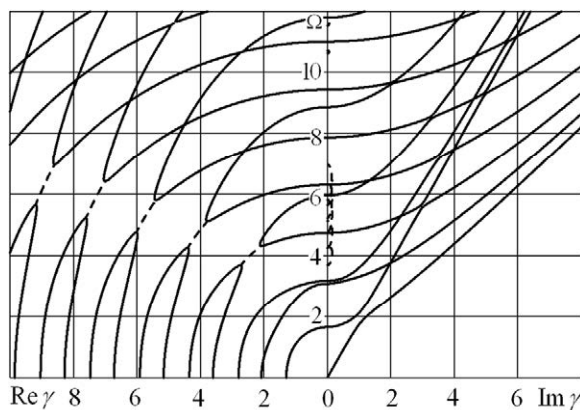


Рис. 4.3

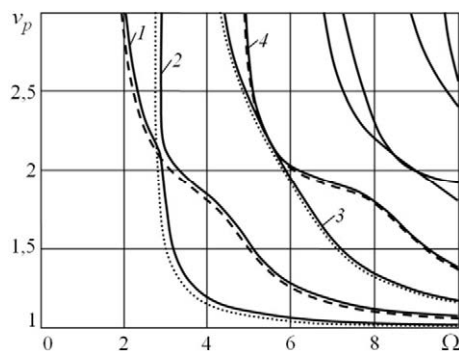


Рис. 4.4

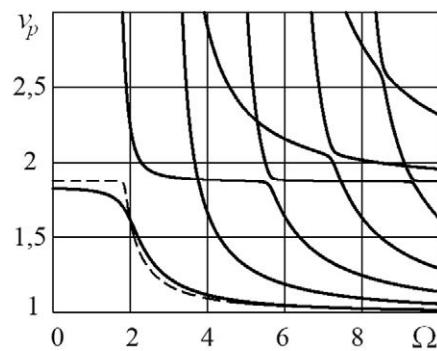


Рис. 4.5

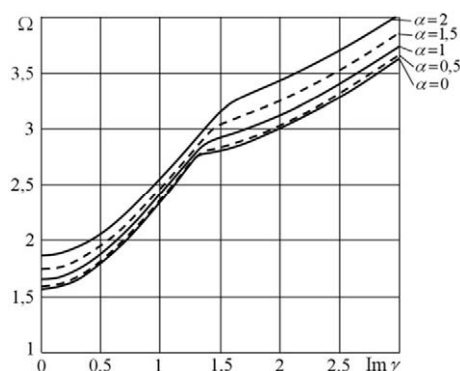


Рис. 4.6

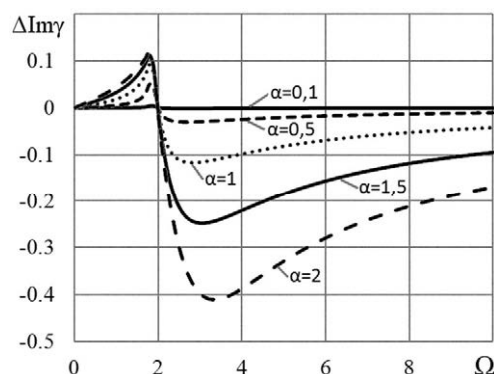


Рис. 4.7

Заключение. В настоящем обзоре и обзорной статье [3] в систематизированном и обобщенном виде изложены основные результаты научных исследований, выполненных авторами на кафедре теории упругости и вычислительной математики Донецкого национального университета. Основное внимание уделено аналитическому методу однородных решений краевых задач трехмерной теории упругости о равновесии и колебаниях однородных и поперечно-неоднородных плит.

Анализ результатов в данной области показывает, что актуальными направлениями дальнейших исследований являются:

- построение и исследование однородных решений краевых задач трехмерной теории упругости для неоднородных по толщине трансверсально-изотропных плит с учетом многообразия граничных условий на плоских гранях и контактирующих плоскостях;
- разработка и обоснование приближенных теорий на основе метода однородных решений;
- исследование методами функционального анализа свойств однородных решений, в том числе, и их полноты;
- разработка методик точного аналитического решения конкретных задач трехмерной теории упругости с целью выявления закономерностей в напряженно-деформированном состоянии пластин, в распространении волн и оценки погрешности приближенных теорий;
- распространение метода однородных решений краевых задач трехмерной теории вязкоупругости, термоупругости, электроупругости и магнитоупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамян Б.Л. Исследования в области пространственных задач теории упругости для однородных и неоднородных упругих тел / Б.Л. Абрамян // Механика деформируемых тел и конструкций. – Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1985. – С. 10–25.
2. Александров А.Я. Трехслойные пластины и оболочки / А.Я. Александров, Л.М. Куршин // Прочность, устойчивость, колебания. – 1968. – Т. 2. – С. 243–308.
3. Алтухов Е.В. Однородные решения краевых задач трехмерной теории упругости изотропных тел. Однородные плиты / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вестник Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 3. – С. 34–79.

4. Бабич В.М. Математические методы в теории упругих волн / В.М. Бабич, И.А. Молотков // Итоги науки и техники. Сер.: Механика деформируемого твердого тела. – М., 1977. – Т. 10. – С. 5–62.
5. Галиныш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям / А.К. Галиныш // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1967. – Вып. 5. – С. 66–92.
6. Галиныш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. II / А.К. Галиныш // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. – Вып. 6-7. – С. 23–64.
7. Жгенти В.С. Исследование неоднородных по толщине плит на основании метода И.Н. Векуа / В.С. Жгенти // Теория и численные методы расчета пластин и оболочек. Тр. Всесоюз. совещания-семинара в Тбилиси. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – С. 143–164.
8. Керамические функционально-градиентные материалы (обзор) А. А. Качаев, М. Л. Ваганова, Д. В. Гращенков, Ю. Е. Лебедева // Перспективные материалы. – 2016. – № 9. – С. 51–58.
9. Колчин Г.Б. Теория упругости неоднородных тел. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы / Г.Б. Колчин, Э.А. Фаверман. – Кишинев: Штинница, 1972. – 235 с.
10. Колчин Г.Б. Теория упругости неоднородных тел. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за 1970–1973 г. / Г.Б. Колчин, Э.А. Фаверман. – Кишинев: Штинница, 1977. – 146 с.
11. Колчин Г.Б. Теория упругости неоднородных тел. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за 1974–1979 гг. / Г.Б. Колчин, Э.А. Фаверман. – Кишинев: Штинница, 1987. – 167 с.
12. Куршин Л.М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек / Л.М. Куршин // Расчет пространственных конструкций. – М.: Стройиздат, 1962. – Вып. 7. – С. 163–192.
13. Устинов Ю.А. О некоторых особенностях асимптотического метода при применении его к изучению колебаний тонких неоднородных упругих плит / Ю.А. Устинов // Матер. I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин, (Гегечкори, 1–10 окт. 1974 г.). – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – С. 395–404.
14. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. A review / H. Altenbach // Mech. Compos. Mater. – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 243–252.
15. Birman V. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L.W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, No 5. – P. 195–216.
16. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // Appl. Mech. Rev. – 2003. – Vol. 56, No 3. – P. 287–308.
17. Carrera E. A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates / E. Carrera, S. Brischetto // Appl. Mech. Rev. – 2009. – Vol. 62, No 1. – P. 010803 (1–17).
18. Carrera E. Developments, ideas and evaluations based upon the Reissner's mixed theorem in the modeling of multilayered plates and shells / E. Carrera // Appl. Mech. Rev. – 2001. – Vol. 54, No 4. – P. 301–329.
19. Chimenti D.E. Guided waves in plates and their use in materials characterization / D.E. Chimenti // Appl. Mech. Rev. – 1997. – Vol. 50, No 5. – P. 247–284.
20. Guz' A.N. Dynamics of laminated and fibrous composites / A.N. Guz', N.A. Shul'ga // Appl. Mech. Rev. – 1992. – Vol. 45, No 2. – P. 35–60.
21. Jha D.K. A critical review of recent research on functionally graded plates / D.K. Jha, T. Kant, R.K. Singh // Compos. Struct. – 2013. – Vol. 96. – P. 833–849.
22. Kapania R.K. Recent advances in analysis of laminated beams and plates / R.K. Kapania, S. Raciti // J. Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics. – 1989. – Vol. 27, No 7. – P. 923–946.
23. Khoroshun L.P. Derivation of equations for laminate plates and shells / L.P. Khoroshun // Int. Appl. Mech. – 1978. – Vol. 14, Iss. 10. – P. 1021–1034.
24. Kosmodamianskii A.S. Three-dimensional problems of the theory of elasticity for multiply connected plates: Survey / A.S. Kosmodamianskii // Int. Appl. Mech. – 1983. – Vol. 19, Iss. 12. – P. 1045–1062.
25. Leissa A.W. A review of laminated composite plate buckling / A.W. Leissa // Appl. Mech. Rev. – 1987. – Vol. 40, No 5. – P. 575–591.
26. Librescu L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey / L. Librescu, T. Hause // Compos. Struct. – 2000. – Vol. 48, Iss. 1-3. – P. 1–17.
27. Liew K.M. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells / K.M. Liew, X. Zhao, J.M. Ferreira // Compos. Struct. – 2011. – Vol. 93, No 8. – P. 2031–2041.
28. Naebe M. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties / Minoo Naebe, Kamyar Shirvanimoghaddam // Applied Materials Today. – 2016. – Vol. 5. – Pages 223–245.
29. Nemish Yu.N. Three-dimensional boundary-value problems of the mechanics of piecewise-uniform bodies with noncanonical interfaces (review) / Yu.N. Nemish // Int. Appl. Mech. – 1996. – Vol. 32, Iss. 10. – P. 743–771.
30. Noor A.K. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates / A.K. Noor, W.S. Burton // Appl. Mech. Rev. – 1989. – Vol. 42, No 1. – P. 1–13.
31. Noor A.K. Computational models for sandwich panels and shells / K. Noor, W.S. Burton, C.W. Bert // Appl. Mech. Rev. – 1996. – Vol. 9, No 3. – P. 155–199.
32. Piskunov V. G. Evolution of the theory of laminated plates and shells / V. G. Piskunov, A. O. Rasskazov // Int. Appl. Mech. – 2002. – Vol. 38, No 2. – P. 135–166.
33. Piskunov V.G. An iterative analytical theory in the mechanics of layered composite systems / V.G. Piskunov // Mech. Compos. Mater. – 2003. – Vol. 39, No 1. – P. 1–16.
34. Reddy J.N. A review of refined theories of laminated composite plates / J.N. Reddy // Shock Vibr. Dig. – 1990. – Vol. 22, Iss. 7. – P. 3–17.

35. Reddy J.N. On the generalization of displacement-based laminated theories / J.N. Reddy // *Appl. Mech. Rev.* – 1993. – Vol. 42, No 11, Pt. 2. – P. S213–S222.
36. Reddy J.N. Theories and computational models for composite laminates / J.N. Reddy, D.H. Robbins // *Appl. Mech. Rev.* – 1994. – Vol. 47, No 6, Pt. 1. – P. 147–169.
37. Sayyad A.S. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results / A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal // *Composite Structures.* – 2015. – Vol. 129. – P. 177–201.
38. Shul'ga N.A. Propagation of elastic waves in periodically inhomogeneous media / N.A. Shul'ga // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, No 7. – P. 763–796.
39. Udupa G. Functionally Graded Composite Materials: An Overview / G.Udupa, S. Shrikantha Rao, K.V. Gangadharan // *Procedia Materials Science.* – 2014 – Vol. 5. – P. 1291–1299.
40. Александров А.Н. Расчет элементов авиационных конструкций, трехслойные пластины и оболочки / А.Н. Александров. – М.: Машиностроение, 1985. – 203 с.
41. Алтухов Е.В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 436 с.
42. Алфутов Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
43. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.С. Васильев и др. – М.: Физматлит, 2011. – 192 с.
44. Бабешко В.А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. – М.: Наука, 1989. – 343 с.
45. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
46. Бреховских Л.М. Акустика слоистых сред / Л.М. Бреховских, О.А. Годин. – М.: Наука, 1989. – 412 с.
47. Бреховских Л.М. Акустика неоднородных сред / Л.М. Бреховских, О.А. Годин. – М.: Наука, 2009. – Т. 2: Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. – 428 с.
48. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В.В. Власов. – М.: Стройиздат, 1975. – 223 с.
49. Галимов Ш.К. Уточненные теории пластин и оболочек / Ш.К. Галимов. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. – 134 с.
50. Гарынин Г.Л. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления / Г.Л. Гарынин, Ю.В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2004. – 409 с.
51. Гетман И.П. Математическая теория нерегулярных волноводов / И.П. Гетман, Ю.А. Устинов. – Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1993. – 145 с.
52. Горшков А.Г. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций / А.Г. Горшков, В.И. Пожужев. – М.: Машиностроение, 1992. – 224 с.
53. Григоренко Я.М. Задачи теории упругости неоднородных тел / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
54. Каримов А.М. Колебания и волны в слоистых композитах / А.М. Каримов. – М.: МГУ, 1982. – 45 с.
55. Кобелев В.Н. Расчет трехслойных конструкций: Справочник / В.Н. Кобелев, Л.М. Коварский, С.И. Тимофеев. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.
56. Космодамианский А.С. Толстые многосвязные пластины / А.С. Космодамианский, В.А. Шалдырван. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
57. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек / Л.В. Курпа. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.
58. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел / В.А. Ломакин. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 368 с.
59. Механика композитных материалов и элементов конструкций / под общ. ред. А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1982–1983. – Т. 1–3.
60. Можаровский В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука, 1988. – 280 с.
61. Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах / Л.А. Молотков. – Л.: Наука, 1984. – 201 с.
62. Никишин В.С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред / В.С. Никишин, Г.С. Шапиро. – М.: ВЦ АН СССР, 1970. – 260 с.
63. Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек / Л.П. Хорошун, С.В. Козлов, Ю.А. Иванов, И.К. Кошевой. – К.: Наук. думка, 1988. – 152 с.
64. Олейник О.А. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред / О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, А.С. Шамаев. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.
65. Петрашень Г.И. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики / Г.И. Петрашень, Л.А. Молотков, П.В. Крауклис. – Л.: Наука, 1982. – 289 с.
66. Пикуль В.В. Теория расчета слоистых конструкций / В.В. Пикуль. – М.: Наука, 1985. – 182 с.
67. Плевако В.П. Общие решения в задачах теории упругости неоднородных сред / В.П. Плевако. – Харьков: Основа, 1997. – 159 с.
68. Приварников А.К. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований / А.К. Приварников. – Днепропетровск: ДГУ, 1976. – 60 с.

69. Приварников А.К. Граничные задачи теории упругости для многослойных оснований / А.К. Приварников. – Запорожье: ЗНУ, 1990. – 84 с.
70. Пространственные задачи теории упругости и пластичности / под общ. ред. А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1984–1986. – Т. 1–6.
71. Расчет трехслойных панелей / А. Я. Александров, А. Э. Брюккер, А. М. Куршин, А. П. Прусаков. – М.: Наука, 1960. – 270 с.
72. Рвачев В.Л. R-функции в задачах теории пластин / В.Л. Рвачев, Л.В. Курпа. – К.: Наук. думка, 1987. – 176 с.
73. Сеймов В.М. Колебания и волны в слоистых средах / В.М. Сеймов, А.Н. Трофимчук, О.А. Савицкий. – К.: Наук. думка, 1990. – 224 с.
74. Старовойтов Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – М.: Физматлит, 2006. – 379 с.
75. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю.А. Устинов. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
76. Шевляков Ю.А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред / Ю.А. Шевляков. – К.: Вища школа, 1977. – 215 с.
77. Штамм К. Многослойные конструкции / К. Штамм, Х. Витте. – М.: Стройиздат, 1982. – 296 с.
78. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
79. Bhaskar K. Plates: Theories and Applications / K. Bhaskar, T. K. Varadan. – New Jersey: WILEY, 2014. – 352 p.
80. Brekhovskikh L.M. Waves in layered media / L.M. Brekhovskikh. – New York: Academic Press, 1980 – 503 p.
81. Datta S.K. Elastic waves in composite media and structures: with applications to ultrasonic nondestructive evaluation / S.K. Datta, A.H. Shah. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 318 p.
82. Elishakoff I.E. Mechanics of Functionally Graded Material Structures / I.E. Elishakoff, D. Pentaras, C. Gentilini. – Singapore: World Scientific, 2015. – 340 p.
83. Ewing W.M. Elastic waves in layered media / W.M. Ewing, W.S. Jardetzky, F. Press. – New York: Mc Graw-Hill Co., 1957. – 380 p.
84. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
85. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis / J.N. Reddy. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
86. Stamm K. Sandwich construction / K. Stamm, H. Witte. – Wien, New-York: Springer, 1974. – 220 p.
87. Suresh S. Fundamentals of FGM / S. Suresh, A. Mortensen. – London: Maney, 1998. – 338 p.
88. Бабаджанян В.Г. Метод начальных функций В.З. Власова в теории однослойных и двухслойных плит / В.Г. Бабаджанян // Сб. аспирант. работ. Казан. ун-та. Точные науки. Математика. Механика. – Казань, 1976. – С. 162–170.
89. Величко И.Г. Матричный алгоритм аналитического определения напряженно-деформированного состояния упругой многослойной плиты / И.Г. Величко, А.К. Приварников, О.Г. Спица // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 34. – С. 38–43.
90. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах равновесия толстых многослойных плит / В.В. Власов // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. – 1958. – № 7. – С. 40–48.
91. Ворович И.И. К теории неоднородных по толщине плит / И.И. Ворович, И.Г. Кадомцев, Ю.А. Устинов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – Вып. 3. – С. 119–130.
92. Галилеев С.М. Исследование многослойных осесимметричных упругих систем методом начальных функций / С.М. Галилеев, Е.А. Генералов // Исслед. по строит. мех. и методам расчета. – М., 1981. – С. 112–159.
93. Галимов Ш.К. О применении полиномов Лежандра к построению уточненной теории трехслойных пластин и оболочек / Ш.К. Галимов // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань, 1973. – Вып. 10. – С. 371–385.
94. Григолюк Э.И. К расчету трехслойных пластин с жестким заполнителем / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. – 1957. – № 1. – С. 77–84.
95. Кадомцев И.Г. Изгиб трехслойной плиты / И.Г. Кадомцев // Физико-математические исследования. – Ростов н/Д., 1972. – С. 33–40.
96. Комиссарова Г.Л. Особенности распределения энергии в двухслойной среде при распространении нормальных волн / Г.Л. Комиссарова // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 38–45.
97. Космодамианский А.С. К определению напряженного состояния в трехслойных плитах, ослабленных цилиндрическими полостями / А.С. Космодамианский, А.Ю. Чуриков, В.А. Шалдырван // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 8. – С. 710–713.
98. Матвеев В.П. Анализ сингулярности напряжений в особых точках упругих тел из функционально-градиентных материалов / В.П. Матвеев, А.Ю. Федоров, И.Н. Шардаков // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 466, № 1. – С. 38–42.
99. Матросов А.В. Устойчивый алгоритм метода начальных функций для расчета слоистых плит / А.В. Матросов // Сб. науч. тр. С.-Петербурга. гос. ун-та вод. коммуникаций. – 1996. – С. 260–267.
100. Москаленко В.Н. О собственных колебаниях трехслойных плит / В.Н. Москаленко // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 4. – С. 145–149.
101. Паймушин В.Н. Анализ собственных колебаний трехслойной пластины с использованием для заполнителя уравнений теории упругости / В.Н. Паймушин, В.И. Иванов, В.Р. Хусаинов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т. 8, № 2. – С. 197–213.

102. Понятовский В.В. Уравнения теории слоистых пластин / В.В. Понятовский // Исследования по теории упругости и пластичности. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1968. – № 7. – С. 53–61.
103. Прусаков А.П. К теории изгиба слоистых пластин / А.П. Прусаков // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33, № 3. – С. 64–70.
104. Раппопорт Р.М. К вопросу о построении решений задачи об изгибе толстой трехслойной плиты / Р.М. Раппопорт // Тр. Всесоюз. проектно-изыскат. и научн.-исслед. ин-та «Ленгидропроект». – 1967. – Вып. 5. – С. 95–112.
105. Раппопорт Р.М. Некоторые вопросы теории изгиба многослойных плит / Р.М. Раппопорт // Научн. тр. Ленингр. лесотехн. акад. – 1967. – Вып. 100. – С. 249–251.
106. Раппопорт Р.М. Некоторые задачи теории изгиба толстых многослойных плит / Р.М. Раппопорт // Изв. Всесоюз. научн.-исслед. ин-та гидротехн. – Л.: 1966. – Т. 80. – С. 76–100.
107. Ружицкий Б.А. Однородные решения для двухслойной плиты / Б.А. Ружицкий // Теорет. и прикл. механика. – 1980. – Вып. 11. – С. 10–16.
108. Рязанцева М.Ю. Изгибные колебания трехслойных пластин симметричного строения / М.Ю. Рязанцева // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – № 3. – С. 153–159.
109. Рязанцева М.Ю. О дисперсии волн в бесконечной упругой трехслойной пластине / М.Ю. Рязанцева // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 1. – С. 166–172.
110. Устинов Ю.А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит / Ю.А. Устинов // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 4. – С. 755–758.
111. Устинов Ю.А. О структуре погранслоя в слоистых плитах / Ю.А. Устинов // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 229, № 2. – С. 325–328.
112. Чуриков А.Ю. К определению напряженного состояния трехслойной плиты при наличии в ней циклической симметрии / А.Ю. Чуриков // Теорет. и прикл. механика. – 1980. – Вып. 11. – С. 7–10.
113. Чуриков А.Ю. Концентрация напряжений в трехслойной плите с двумя цилиндрическими полостями / А.Ю. Чуриков, В.А. Галич // Теорет. и прикл. механика. – 1987. – Вып. 18. – С. 25–28.
114. Шалдырван В.А. К определению концентрации напряжений в трехслойной пластине с полостью / В.А. Шалдырван // Теорет. и прикл. механика. – 1980. – Вып. 11. – С. 3–7.
115. Шленев М.А. Однородные решения трехмерной задачи теории упругости об установившихся колебаниях трехслойной плиты / М.А. Шленев, М.М. Лурье // Расчет оболочек и пластин. – Ростов н/Д., 1978. – С. 23–36.
116. A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates / A. Fekrar, M.S.A. Houari, A. Tounsi, S.R. Mahmoud // Meccanica. – 2014. – Vol. 49, Iss. 4. – P. 795–810.
117. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets / A. Bessaim, M.S.A. Houari, A. Tounsi et al. // J. Sandwich Struct. Mater. – 2013. – Vol. 15, No 6. – P. 671–703.
118. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates / H.T. Thai, T.P. Vo, T.Q. Bui, T.K. Nguyen // Acta Mechanica. – 2014. – Vol. 225, Iss. 3. – P. 951–964.
119. Alibeigloo A. Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using state space differential quadrature method / A. Alibeigloo, M. Alizadeh // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2015. – Vol. 54. – P. 252–266.
120. An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates / Z. Belabed, M.S. Ahmed Houari, A. Tounsi et al. // Composites. Part B: Engineering. – 2014. – Vol. 60. – P. 274–283.
121. Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory / H.T. Thai, T.K. Nguyen, T.P. Vo, J. Lee // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2014. – Vol. 45. – P. 211–225.
122. Analysis of sandwich plates with a new layerwise formulation / D.A. Maturi, A.J.M. Ferreira, A.M. Zenkour, D.S. Mashat // Composites. Part B: Engineering. – 2014. – Vol. 56. – P. 484–489.
123. Carrera E. C⁰ Reissner-Mindlin multilayered plate elements including zig-zag and interlaminar stresses continuity / E. Carrera // Int. J. Numer. Methods Eng. – 1996. – Vol. 39, Iss. 11. – P. 1797–1820.
124. Closed-form elasticity solution for three-dimensional deformation of functionally graded micro/nano plates on elastic foundation / H. Salehipour, H. Havi, A.R. Shahidi // Latin American Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol. 12. – P. 747–762.
125. Coste J.-F. Approximate dispersion formule for Rayleigh-like waves in a layered medium / J.-F. Coste // Ultrasonics. – 1997. – Vol. 35, No 6. – P. 431–440.
126. Didenko Ye.V. The critical modes of oscillation of a transversely inhomogeneous plate with a periodic structure / Ye.V. Didenko, Yu.A. Ustinov // J. Appl. Math. Mech. – 2002. – Vol. 66, Iss. 3. – P. 471–480.
127. Elastic wave and excitation mechanism of surface waves in multilayered media / B. Zhang, M. Yu, C.Q. Lan, et al. // J. Acoust. Soc. Amer. – 1996. – Vol. 100, No 6. – P. 3527–3538.
128. Filippov L.G. On the theory of vibration of three-layer plates / L.G. Filippov, S.L. Filippov // Int. Appl. Mech. – 1998. – Vol. 34, Iss. 9. – P. 878–885.
129. Foraboschi P. Three-layered plate: Elasticity solution / P. Foraboschi // Composites. Part B: Engineering. – 2014. – Vol. 60. – P. 764–776.
130. Fu Y.B. Edge waves in asymmetrically laminated plates / Y.B. Fu, D.W. Brookes // J. Mech. Phys. of Solid. – 2006. – Vol. 54, No 1. – P. 1–21.
131. Galileev S.M. Method of initial functions in the computation of sandwich plates / S.M. Galileev, A.V. Matrosov // Int. Appl. Mech. – 1995. – Vol. 31, Iss. 6. – P. 469–476.

132. Gusein-Zade M.I. On the derivation of a theory of bending of layered plates / M.I. Gusein-Zade // J. Appl. Math. Mech. – 1968. – Vol. 32, Iss. 2. – P. 222–233.
133. Han X. Transient waves in plates of functionally graded materials / X. Han, G.R. Liu, K.Y. Lam // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2001. – Vol. 52, No 8. – P. 851–865.
134. Jones J.P. Wave propagation in a two-layered medium / J.P. Jones // J. Appl. Mech. – 1964. – Vol. 31, Iss. 2. – P. 213–222.
135. Kapania R.K. Recent advances in analysis of laminated beams and plates / R.K. Kapania, S. Raciti // J. Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics. – 1989. – Vol. 27, No 7. – P. 923–946.
136. Kashtalyan M.Yu. General Hoyle–Youngdahl and Love solutions in the linear inhomogeneous theory of elasticity / M.Yu. Kashtalyan, J.J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2010. – Vol. 46, Iss. 1. – P. 1–17.
137. Khoma I.Yu. General solution of equilibrium equations for plates made of materials with a thin-layer structure / I.Yu. Khoma, Z.A. Medvedeva // Int. Appl. Mech. – 1985. – Vol. 21, Iss. 8. – P. 785–791.
138. Khoroshun L.P. Derivation of equations for laminate plates and shells / L.P. Khoroshun // Int. Appl. Mech. – 1978. – Vol. 14, Iss. 10. – P. 1021–1034.
139. Kumari P. Three-dimensional free vibration analysis of levy-type laminated plates using multi-term extended Kantorovich method / P.Kumari, S.Behera // Composites. Part D: Engineering. – 2017. – Vol. 116. – P. 224–238.
140. Kurpa L.V. Solution of the problem of deflection and vibrations of plates by the R-function method / L.V. Kurpa // Int. Appl. Mech. – 1984. – Vol. 20, Iss. 5. – P. 470–473.
141. Lebée A. On the Generalization of Reissner Plate Theory to Laminated Plates, Part I: Theory / A. Lebée, K. Sab // Journal of Elasticity. – 2017. – Vol. 126, Iss. 1. – P. 39–66.
142. Legendre polynomial approach for modeling free-ultrasonic waves in multi-layered plates / J.E. Lefebvre, V. Zhang, J. Gazalet, T. Gryba // J. Appl. Phys. 1999. – Vol. 85, No 7. – P. 3419–3427.
143. Liua L. Wave propagation in a sandwich structure / L. Liua, K. Bhattacharya // Int. J. Solids Struct. – 2009. – Vol. 46, Iss. 17. – P. 3290–3300.
144. Lowe M.J.S. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media / M.J.S. Lowe // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., and Freq. Contr. – 1995. – Vol. 42, No 4. – P. 525–542.
145. Marchuk A.V. Application of a variational approach to the investigation of three-dimensional stress-strain states of layered plates on a rigid base / A.V. Marchuk // Strength of Materials. – 1997. – Vol. 29, Iss. 6. – P. 630–637.
146. Marchuk A.V. Determination of the natural frequencies of vibration of nonuniform slabs / A.V. Marchuk // Int. Appl. Mech. – 1999. – Vol. 35, Iss. 2. – P. 152–158.
147. Marchuk A.V. Three-dimensional analytical solution for laminar plates with allowance for layer slip / A.V. Marchuk // Int. Appl. Mech. – 1997. – Vol. 33, No 9. – P. 685–689.
148. Naderi Beni N. An extension of Carrera unified formulation in polar coordinate for analysis of circular sandwich plate with FGM core using GDQ method / N. Naderi Beni, M. Botshekanan Dehkordi // Composite Structures. – 2018. – Vol. 185. – P. 421–434.
149. Naumov Ya.A. Solving boundary-value problems of elasticity theory for inhomogeneous layers / Ya.A. Naumov, V.I. Chistyak // Int. Appl. Mech. – 1975. – Vol. 11, Iss. 5. – P. 522–527.
150. Nayak A.K. Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher order theory / A.K. Nayak, S.S.J. Moy, R.A. Shenoi // Compo-sites. Part B: engineering. – 2002. – Vol. 33, Iss. 7. – P. 505–519.
151. Pagneux V. Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides / V. Pagneux, A. Maurel // Proc. Roy. Soc. London. A. – 2002. – Vol. 458, No 2024. – P. 1913–1930.
152. Pister K.S. Flexural vibrations of thin laminated plates / K.S. Pister // J. Acoust. Soc. Amer. – 1959. – Vol. 31, Iss. 2. – P. 233–234.
153. Qing G. Free vibration analysis of stiffened laminated plates / G. Qing, J. Qiu, Y. Liu // Int. J. Solids Struct. – 2006. – Vol. 43, No 6. – P. 1357–1371.
154. Qu Y. Three-dimensional elasticity solution for vibration analysis of functionally graded hollow and solid bodies of revolution. Part I: Theory / Y. Qu, G. Meng // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2014. – Vol. 44. – P. 222–233.
155. Reddy J.N. An evolution of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates / J.N. Reddy // Compos. Struct. – 1993. – Vol. 25, Iss. 1–4. – P. 21–35.
156. Reissner E. Finite deflections of sandwich plates / E. Reissner // J. Aeronautical Sci. – 1948. – Vol. 15, No 17. – P. 17–23.
157. Rokhlin S.I. Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids / S.I. Rokhlin, Y.J. Wang // J. Acoust. Soc. Amer. – 1991. – Vol. 89. – P. 503–513.
158. Rokhlin S.I. Recent advances in waves in layered media / S. I. Rokhlin // J. Phys. Sec.4. – 1992. – Vol. 2, No 1, Pt. 2. – P. 819–826.
159. Ryabov A.F. Bending of thick nonuniform plates through their thickness / A.F. Ryabov, A.O. Rasskazov // Int. Appl. Mech. – 1982. – Vol. 18, Iss. 3. – P. 230–234.
160. Safaeinili A. Floquet analysis of guided waves in periodically layered composites / A. Safaeinili, D.E. Chimenti // J. Acoust. Soc. Amer. – 1995. – Vol. 98, No 4. – P. 2336–2342.
161. Savoia M. A variational approach to three-dimensional elasticity solutions of laminated composite plates / M. Savoia, J.N. Reddy // J. Appl. Mech. ASME. – 1992. – Vol. 59, Iss. 2S. – P. S166–S175.
162. Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates / G.J. Nie, Z. Zhong // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2007. – Vol. 196, Iss. 49–52. – P. 4901–4910.
163. Srinivas S. A three-dimensional solutions for plates and laminates / S. Srinivas, K. Rao // Tr. Frunklin Inst. – 1971. – Vol. 291, No 6. – P. 469–481.

164. Srinivas S. Some results from an exact analysis of thick laminates in vibration and buckling / S. Srinivas, C.V. Joga Rao, A.K. Rao // J. Appl. Mech. – 1970. – Vol. 37, Iss. 3. – P. 868–870.
165. Study of energy distribution of guided waves in multilayered media / B. Zhang, W. Xiong, M. Yu, et al. // J. Acoust. Soc. Amer. – 1998. – Vol. 103, No 1. – P. 125–135.
166. Sun C.T. Continuum theory for a laminated medium / C.T. Sun, J.D. Achenbach, G. Herrmann // J. Appl. Mech. – 1968. – Vol. 35, Iss. 3. – P. 467–475.
167. Sun C.T. On the theories for the dynamic response of laminated plates / C.T. Sun, J.M. Whitney // J. Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics. – 1973. – Vol. 11, No 2. – P. 178–183.
168. Thai H.T. Efficient higher-order shear deformation theories for bending and free vibration analyses of functionally graded plates / H.T. Thai, D.H. Choi // Arch. Appl. Mech. – 2013. – Vol. 83, Iss. 12. – P. 1755–1771.
169. Three-dimensional steady state Green function for a layered isotropic plate / H. Bai, J. Zhu, A.H. Shah, N. Popplewell // J. Sound and Vibr. – 2004. – Vol. 269, No 1-2. – P. 251–271.
170. Toledano A. A high-order laminated plate theory with improved in-plane re-sponses / A. Toledano, H. Murakami // Int. J. Solids Struct. – 1987. – Vol. 23, Iss. 1. – P. 111–131.
171. Ugrimov S.V. Generalized theory of multilayer plates / S.V. Ugrimov // Int. J. Solids Struct. – 2002. – Vol. 39, No 4. – P. 819–839.
172. Ustinov Iu.A. On the completeness of a system of homogeneous solutions of the plates theory / Iu.A. Ustinov // J. Appl. Math. Mech. – 1976. – Vol. 40, Iss. 3. – P. 489–496.
173. Ustinov Yu.A. On critical modes of an inhomogeneous plate / Yu.A. Ustinov // Doklady Physics. – 2000. – Vol. 45, Iss. 2. – P. 80–83.
174. Vorovich I.I. Qualitative investigation of the stress-strain state of a sandwich plate / I.I. Vorovich, I.G. Kadamtssev // J. Appl. Math. Mech. – 1970. – Vol. 34, Iss. 5. – P. 830–836.
175. Алтухов Е.В. Деформация трехслойных пластин в случае смешанных граничных условий на торцах / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – № 2 (48). – С. 29–39.
176. Алтухов Е.В. Изгибные колебания упругих трехслойных пластин симметричного строения со свободными плоскими гранями / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2009. – № 1. – С. 117–124.
177. Алтухов Е.В. Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины с покрытыми диафрагмой торцами / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Тр. Ин-та прикладной математики и механики. – 2015. – Т. 29. – С. 3–9.
178. Алтухов Е.В. Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины со скользящей заделкой торцов / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вестник Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 4. – С. 3–10.
179. Алтухов Е.В. Колебания трехслойных пластин в случае граничных условий плоского торца и проскальзывания слоев / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2011. – № 2. – С. 36–41.
180. Алтухов Е.В. Колебания трехслойных пластин при проскальзывании слоев и с покрытыми диафрагмой торцами / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 5–14.
181. Алтухов Е.В. Колебания трехслойных пластин с жесткой заделкой торцов и при проскальзывании слоев / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – № 3 (49). – С. 38–50.
182. Алтухов Е.В. Однородные решения задач о равновесии и колебаниях изотропных слоисто-неоднородных упругих пластин / Е.В. Алтухов // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2013. – № 1. – С. 18–22.
183. Алтухов Е.В. Равновесие двухслойных пластин с жесткими торцами / Е.В. Алтухов, В.Н. Неспирный // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 34. – С. 43–47.
184. Алтухов Е.В. Равновесие и колебания упругих двухслойных изотропных пластин / Е.В. Алтухов // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: тр. VII Междунар. науч. конф. (п. Мелекино, 11–14 июня 2013 г.). – Донецк: ДонНУ, 2013. – Т. 1. – С. 33–36.
185. Алтухов Е.В. Равновесие трехслойной пластины с жесткими торцами / Е.В. Алтухов, И.Е. Кулиш // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2001. – № 1. – С. 314–321.
186. Алтухов Е.В. Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 146–153.
187. Алтухов Е.В. Упругие колебания двухслойной пластины со свободной от усилий верхней и защемленной нижней плоскими гранями / Е.В. Алтухов, Е.В. Симбратович, М.В. Фоменко // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. – Днепропетровск, 2012. – Вып. 19. – С. 3–9.
188. Алтухов Е.В. Упругие колебания двухслойных пластин со свободными от напряжений плоскими гранями / Е.В. Алтухов, Е.В. Симбратович // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 5–14.
189. Алтухов Е.В. Упругие колебания трехслойных пластин симметричного строения / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 3–10.
190. Алтухов Е.В. Упругое равновесие трехслойной пластины с неидеальным контактом слоев / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – № 1. – С. 17–22.
191. Алтухов Е.В. Упругое равновесие трехслойной пластины с покрытыми диафрагмой плоскими гранями / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2011. – № 1. – С. 19–26.
192. Алтухов Е.В. Установившиеся колебания упругих двухслойных пластин с жесткими плоскими гранями / Е.В. Алтухов, Е.В. Куцай, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – № 2. – С. 38–46.
193. Симбратович Е.В. Упругие колебания двухслойной пластины при отсутствии напряжений на торцах и скользящем контакте слоев / Е.В. Симбратович, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2012. – № 2. – С. 66–74.

194. Фоменко М.В. Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины с жесткими торцами / М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2013. – № 2. – С. 71–77.
195. Фоменко М.В. Колебания трехслойных пластин в случае смешанных граничных условий на торцах и скользящего контакта слоев / М.В. Фоменко // Теорет. и прикл. механика. – 2012. – № 5 (51). – С. 130–141.
196. Фоменко М.В. Кососимметричные колебания трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев / М.В. Фоменко // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 188–195.
197. Фоменко М.В. Однородные решения задач о равновесии упругих трехслойных пластин с несовершенным контактом слоев / М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2013. – № 1. – С. 75–82.
198. Шевченко В.П. Деформация трехслойных пластин со скользящей заделкой торцов и несовершенным контактом слоев / В.П. Шевченко, Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Доп. НАН України. – 2012. – № 8. – С. 61–66.
199. Шевченко В.П. Упругие колебания трехслойных пластин в случае плоского торца / В.П. Шевченко, Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Доп. НАН України. – 2011. – № 9. – С. 70–77.
200. Altukhov E.V. Elastic vibrations of sandwich plates with diaphragms at the edges / E.V. Altukhov, M.V. Fomenko // Int. Appl. Mech. – 2014. – Vol. 50, No 2. – P. 179–186.
201. Altukhov E.V. Steady-state vibrations of two-layer plates with rigidly fixed end faces and imperfect contact of the layers / E.V. Altukhov, E.V. Simbratovich, M.V. Fomenko // J. Math. Sci. – 2014. – Vol. 198, Iss. 1. – P. 39–53.
202. Altukhov E.V. Symmetric elastic vibrations of three-layer plates in the absence of stresses on their end faces and layer slip / E.V. Altukhov, M.V. Fomenko // J. Math. Sci. – 2012. – Vol. 185, No 6. – P. 837–851.
203. Aksentian O.K. The state of stress in a thin plate / O.K. Aksentian, I.I. Vorovich // J. Appl. Math. Mech. – 1963. – Vol. 27, Iss. 6. – P. 1621–1643.
204. Vorovich I.I. The state of stress in a thick plate / I.I. Vorovich, O.S. Malkina // J. Appl. Math. Mech. – 1967. – Vol. 31, Iss. 2. – P. 252–264.
205. Лурье А.И. К теории толстых плит / А.И. Лурье // Прикл. математика и механика. – 1942. – Т. 6, вып. 2-3. – С. 151–168.
206. Буланов Г.С. Решение смешанной задачи о концентрации напряжений в толстой пластине / Г.С. Буланов, В.А. Шалдырван // Теорет. и прикл. механика. – 1984. – Вып. 15. – С. 5–9.
207. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
208. Stoneley R. Elastic waves at the surface of separation of two solids / R. Stoneley // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1924. – Vol. 106, No 738. – P. 416–428.
209. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid / J.W. Rayleigh // Proc. Lond. Math. Soc. – 1885/1886. – Vol. 17, No 253. – P. 4–11.

Поступила в редакцию 21.05.2018 г.

HOMOGENEOUS SOLUTIONS OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF THE THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY THEORY OF EQUILIBRIUM AND VIBRATIONS OF ISOTROPIC TRANSVERSE INHOMOGENEOUS PLATES

E.V. Altukhov, M.V. Fomenko

The first part of the review is devoted to the analysis of the homogeneous solutions method in boundary-value problems of the three-dimensional elasticity theory of homogeneous plates. The second part of present paper contains the review of researches performed to the thickness inhomogeneous plates using the homogeneous solutions method.

Keywords: thickness inhomogeneous plates, functionally graded materials, two-layer and three-layer plates, boundary-value problems of the three-dimensional elasticity theory, homogeneous solution method, spectral problems, dispersion equations, normal mode spectra.

Алтухов Евгений Викторович

кандидат физико-математических наук, доцент;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».
E-mail: ealtukhov@ukr.net

Altukhov Evgenii Victorovich

Candidate of Phisico-Mathematical Sciences, Docent;
Donetsk National University, Donetsk

Фоменко Максим Владимирович

кандидат физико-математических наук;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».
E-mail: maxim_fom@mail.ru

Fomenko Maksim Vladimirovich

Candidate of Phisico-Mathematical Sciences;
Donetsk National University, Donetsk

УДК 531.38; 531.39

О РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ГИРОСТАТА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, В ДВУХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

© 2018. *Г.В. Горр, Т.В. Балаклицкая, В.В. Шенцова*

В статье изучены условия существования равномерных вращений гиростата, имеющего неподвижную точку. Рассмотрены две задачи: задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Получены условия на параметры, характеризующие распределение масс и действующие силы, при выполнении которых гиростат совершает равномерное вращение относительно наклонной оси.

Ключевые слова: гиростат, равномерные вращения, магнитное поле.

Введение. Равномерные вращения твердых тел, из которых состоят многие конструкции современной техники (роботы, манипуляторы, гироскопические системы) являются рабочими режимами. В связи с этим условия их существования и устойчивости представляют значительный интерес. Задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [1, 2] описывается шестью обыкновенными дифференциальными уравнениями, допускающими три первых интеграла. Данные уравнения можно линейным преобразованием привести к уравнениям движения тела в идеальной несжимаемой жидкости [3, 4]. В частном случае, когда действует только сила тяжести и отсутствует гиростатический момент, равномерные вращения изучены О. Штауде [5]. Устойчивость данных движений изучена в [6]. Обобщение результатов [5] в задаче о движении тяжелого гиростата дано П.В. Харламовым [7, 8]. В статье [9] исследованы свойства конуса осей равномерных вращений гиростата, предложенного в [8].

Задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона [10, 11] принципиально отличается от обсужденной выше задачи тем, что дифференциальные уравнения движения имеют только два первых интеграла. Это обстоятельство учтено в статьях [12, 13], в которых найдены новые случаи существования дополнительных первых интегралов.

Равномерные вращения имеют место и в задаче о движении гиростата с учетом переменности гиростатического момента [14, 15].

В статье исследуются условия существования равномерных вращений гиростата, имеющего неподвижную точку, в указанных выше задачах динамики. Предполагается, что вращение гиростата происходит вокруг оси, которая не совпадает с осью симметрии силовых полей. Найденные ограничения на распределение масс гиростата и значений угловой скорости сформулированы в виде алгебраических уравнений на характерные параметры задач.

Задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Рассмотрим в векторной форме уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [1]

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times Bv + v \times (Cv - s), \quad (1)$$

$$\dot{v} = v \times \omega. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) имеют три первых интеграла

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}(B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = k, \quad (A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) + (C\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2E, \quad (3)$$

где k, E – произвольные постоянные. В уравнениях (1), (2) и интегралах (3) введены следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение несомых тел; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, коллинеарный обобщенному вектору центра масс гиростата; $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции; $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – постоянная матрица, характеризующая гироскопические силы; $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – постоянная матрица, с помощью которой определяются потенциальные силы; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ обозначает относительную производную по времени t .

Содержательная постановка задачи состоит в том, что рассматривается движение заряженного и намагниченного гиростата под действием сил Ньютона, Кулона и Лоренца. Полагаем, что несомые гироскопы свободны от электрических зарядов и не намагничены.

Пусть движение гиростата является равномерным вращением относительно неподвижной в пространстве оси l с единичным вектором $\boldsymbol{\gamma}$, который не совпадает с вектором $\mathbf{v}$. То есть выполняются соотношения

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \boldsymbol{\gamma}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где $\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}$ – абсолютная производная вектора $\boldsymbol{\gamma}$, ω_0 – постоянная. На основании известной формулы, связывающей относительную производную $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ и абсолютную производную, приходим к выводу, что $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0}$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{\gamma}$ не изменяется и в гиростате. Обозначим через $\mathbf{a}$ вектор, связанный с гиростатом и совпадающий с $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда на основании первой формулы из (4) имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{a}. \quad (5)$$

Сформулируем задачу: определить условия на параметры уравнений (1) – (3), при выполнении которых уравнения (1), (2) допускают инвариантное соотношение (5).

Подставим значение (5) в уравнение (2):

$$\dot{\mathbf{v}} = \omega_0 (\mathbf{v} \times \mathbf{a}). \quad (6)$$

Умножая обе части уравнения (6) на вектор $\mathbf{a}$, получим второе инвариантное соотношение

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = a_0, \quad (7)$$

где $a_0 = \cos \theta_0$ ($\theta_0 = \angle(\mathbf{a}; \mathbf{v})$) – постоянный параметр. Для интегрирования уравнения (6) положим $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Тогда из (6) следует

$$\dot{v}_1 = \omega_0 (a_3 v_2 - a_2 v_3), \quad \dot{v}_2 = \omega_0 (a_1 v_3 - a_3 v_1), \quad \dot{v}_3 = \omega_0 (a_2 v_1 - a_1 v_2). \quad (8)$$

Поскольку для линейной системы (8) характеристическое уравнение имеет вид $\lambda_*(\lambda_*^2 + \omega_0^2) = 0$, где λ_* – корень характеристического уравнения, то можно указать вид общего решения этой системы

$$v_i = C_i^{(1)} + C_i^{(2)} \cos \omega_0 t + C_i^{(3)} \sin \omega_0 t \quad (i = \overline{1,3}). \quad (9)$$

Для задания компонент $a_i \quad (i = \overline{1,3})$ положим

$$a_1 = \sin \mu_0 \cos \sigma_0, \quad a_2 = \sin \mu_0 \sin \sigma_0, \quad a_3 = \cos \mu_0, \quad (10)$$

где $\mu_0 \in (0, \pi)$, $\sigma_0 \in [0, 2\pi]$. Соотношения (10) имеют особенности при $\mu_0 = 0, \pi$. Поэтому в этом случае будем считать, что $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$. Запишем общее решение (9) уравнений (8), используя инвариантное соотношение (7):

$$\begin{aligned} v_1 &= a_0 \sin \mu_0 \cos \sigma_0 - a'_0 (\sin \sigma_0 \cos \omega_0 t - \cos \sigma_0 \cos \mu_0 \sin \omega_0 t), \\ v_2 &= a_0 \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + a'_0 (\cos \sigma_0 \cos \omega_0 t + \sin \sigma_0 \cos \mu_0 \sin \omega_0 t), \\ v_3 &= a_0 \cos \mu_0 - a'_0 \sin \mu_0 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $a'_0 = \sin \theta_0$, а начальное значение t положено равным нулю.

Подставим выражение (5) в уравнение (1) и воспользуемся условием $\mathbf{s} = s\mathbf{a}$, которое получено в [1] при рассмотрении равномерных вращений гиростата относительно наклонной оси в предположении, что подвижная система координат не является главной. Тогда имеем

$$\mathbf{a} \times (\omega_0^2 A\mathbf{a} + \omega_0 \boldsymbol{\lambda} - s\mathbf{v} - \omega_0 B\mathbf{v}) + (C\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = 0. \quad (12)$$

В силу того, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{v}$ составляют базис, уравнение (12) рассмотрим в скалярном виде, применяя методику скалярного умножения левой части (12) на эти векторы. Нетрудно убедиться в том, что при скалярном умножении левой части (12) на векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ получим второе и третье соотношения из (3).

Умножим скалярно левую часть (12) на вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{v}$:

$$\omega_0 a_0 [\mathbf{a} \cdot (B\mathbf{v} - \boldsymbol{\lambda} - \omega_0 A\mathbf{a})] + [\mathbf{v} \cdot (\omega_0^2 A\mathbf{a} + \omega_0 \boldsymbol{\lambda} - \omega_0 B\mathbf{v} + C(\mathbf{a} - a_0 \mathbf{v}))] - s a_0'^2 = 0. \quad (13)$$

Таким образом, необходимо изучить условия, при выполнении которых второе и третье соотношения из системы (3) и уравнение (13) будут тождествами по t в силу равенств (11).

Из третьего соотношения системы (3) следует, что

$$C_1 v_1^2 + C_2 v_2^2 + C_3 v_3^2 = c_*, \quad c_* = 2(E + s a_0) - \omega_0 (A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + A_3 a_3^2). \quad (14)$$

Подставим величины (11) в уравнение (14) и потребуем, чтобы полученное уравнение было тождеством по t . Тогда получим равенства

$$\begin{aligned} (C_2 - C_1) \sin \sigma_0 \cos \sigma_0 \cos \mu_0 &= 0, \quad a_0 (C_2 - C_1) \sin \mu_0 \sin \sigma_0 \cos \sigma_0 = 0, \\ C_1 (\sin^2 \sigma_0 - \cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) + C_2 (\cos^2 \sigma_0 - \sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) - C_3 \sin^2 \mu_0 &= 0, \\ a_0 (C_1 \cos^2 \sigma_0 + C_2 \sin^2 \sigma_0 - C_3) \sin \mu_0 \cos \mu_0 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим случай $C_3 = C_2 = C_1$ (вариант 1.А). В силу вида правой части уравнения (1) можно полагать параметры C_i равными нулю. Тогда из второго равенства системы (14) можно определить значение постоянной E .

В варианте 2.А считаем $\mu_0 = 0$. Поскольку этот случай является особым в задании формул (10) (параметр σ_0 не определен), то выпишем уравнения (8), полагая $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$:

$$\dot{v}_1 = \omega_0 v_2, \quad \dot{v}_2 = -\omega_0 v_1, \quad \dot{v}_3 = 0. \quad (16)$$

Из уравнений (16) следует

$$v_1 = a'_0 \sin \omega_0 t, \quad v_2 = a'_0 \cos \omega_0 t, \quad v_3 = a_0, \quad (17)$$

где $a'_0 = \sin \theta_0$, $a_0 = \cos \theta_0$. Соотношение (14) в силу (17) должно быть тождеством по t . Поэтому для варианта 2.А имеем следующие условия:

$$C_2 = C_1, \quad c_* = C_1 a_0'^2 + C_3 a_0^2 \quad (C_3 \neq C_1). \quad (18)$$

Так как при выполнении условий $\sin \sigma_0 = 0$ ($\cos \mu_0 \neq 0$) и $\cos \sigma_0 = 0$ ($\cos \mu_0 \neq 0$) вектор $\mathbf{a}$ будет лежать в главной плоскости эллипсоида инерции, которая содержит особую ось ($\mu_0 = 0$), то в варианте 3.А считаем $\sin \sigma_0 = 0$, $\cos \mu_0 \neq 0$. Тогда из (15) найдем

$$a_0 = 0, \quad \sin^2 \mu_0 = \frac{C_2 - C_1}{C_3 - C_1}. \quad (19)$$

При этом формулы (11) упрощаются:

$$v_1 = \cos \mu_0 \sin \omega_0 t, \quad v_2 = \cos \omega_0 t, \quad v_3 = -\sin \mu_0 \sin \omega_0 t. \quad (20)$$

Рассмотрим вариант 4.А: $\mu_0 = \frac{\pi}{2}$ (случай $\mu_0 = \frac{3}{2}\pi$ симметричен данному). Из второго уравнения системы (15) следует $a_0 = 0$, а из третьего уравнения этой системы находим $\sin^2 \sigma_0$. Таким образом, вариант 4.А характеризуется условиями

$$a_0 = 0, \quad (21)$$

$$(C_2 - C_1) \sin^2 \sigma_0 + (C_3 - C_2) = 0. \quad (22)$$

Отметим, что для вариантов 3.А, 4.А вектор равномерного вращения гиростата ортогонален вектору $\mathbf{v}$. Таких случаев в классической задаче о движении тяжелого гиростата нет [2].

Рассмотрим второе соотношение из системы (3). Варианты условий на параметры, при которых оно будет тождеством в силу (5), (11) будем снабжать буквой В.

Для варианта 1.В положим $B_3 = B_2 = B_1$. Тогда из второго равенства системы (3) имеем

$$(\omega_0 A \mathbf{a} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} = k + \frac{1}{2} B_1. \quad (23)$$

Данное инвариантное соотношение должно быть следствием соотношения (7), то есть должны выполняться условия

$$\omega_0 Aa + \lambda = \kappa_0 a, \quad k + \frac{1}{2}B_1 = \kappa_0 a_0, \quad (24)$$

где κ_0 – постоянный параметр. Из первого векторного равенства системы (24) получим

$$\lambda_i = a_i (\kappa_0 - \omega_0 A_i) \quad (i = \overline{1,3}). \quad (25)$$

Значение параметра κ_0 зависит от величины a_0 : если $a_0 \neq 0$, то в силу (24)

$\kappa_0 = a_0^{-1}(k + \frac{1}{2}B_1)$; если $a_0 = 0$, то параметр κ_0 в (25) является произвольным, а постоянная $k = -B_1/2$.

Подставим величины (11) во второе равенство системы (3) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по t . Тогда получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$(B_2 - B_1)\sin \sigma_0 \cos \sigma_0 \cos \mu_0 = 0, \quad (26)$$

$$B_1(\sin^2 \sigma_0 - \cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) + B_2(\cos^2 \sigma_0 - \sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) - B_3 \sin^2 \mu_0 = 0, \quad (27)$$

$$a_0(B_3 - B_1 \cos^2 \sigma_0 - B_2 \sin^2 \sigma_0) \sin \mu_0 \cos \mu_0 + \\ + [(\omega_0 A_1 a_1 + \lambda_1) \cos \sigma_0 + (\omega_0 A_2 a_2 + \lambda_2) \sin \sigma_0] \cos \mu_0 - (\omega_0 A_3 a_3 + \lambda_3) \sin \mu_0 = 0, \quad (28)$$

$$a_0(B_1 - B_2) \sin \mu_0 \sin \sigma_0 \cos \sigma_0 + (\omega_0 A_2 a_2 + \lambda_2) \cos \sigma_0 - (\omega_0 A_1 a_1 + \lambda_1) \sin \sigma_0 = 0, \quad (29)$$

$$4a_0[\omega_0(A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + A_3 a_3^2) + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3] - \\ - a_0'^2[B_1(\sin^2 \sigma_0 - \cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) + B_2(\cos^2 \sigma_0 - \sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) - B_3 \sin^2 \mu_0] = 4k. \quad (30)$$

Рассмотрим вариант 2.В: $B_2 = B_1 \neq B_3$. Из уравнений (26), (27) получим $\mu_0 = 0$ (случай $\mu_0 = \pi$ симметричен данному). Тогда имеют место равенства (17). При рассмотрении условий (28), (29) необходимо положить $\sigma_0 = 0$ и в силу (10) считать $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Тогда из (28)–(30) следует

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad a_0(\omega_0 A_3 + \lambda_3) = k. \quad (31)$$

Следовательно, в варианте 2.В равенства (11) имеют вид (17) и выполняются условия (31).

Для варианта 3.В в (26)–(29) полагаем $\sigma_0 = 0$, $B_1 \neq B_2$ (случай $\sigma_0 = \pi/2$ симметричен данному). Из уравнения (27) получим

$$\sin^2 \mu_0 = \frac{B_2 - B_1}{B_3 - B_1} \quad (32)$$

и уравнения (28) – (30) приводятся к виду

$$\frac{1}{2}a_0(B_3 - B_1)\sin 2\mu_0 + (\omega_0 A_1 a_1 + \lambda_1)\cos \mu_0 - (\omega_0 A_3 a_3 + \lambda_3)\sin \mu_0 = 0, \quad (33)$$

$$\lambda_2 = 0, \quad a_0[\omega_0(A_1 a_1^2 + A_3 a_3^2) + \lambda_1 a_1 + \lambda_3 a_3] = k.$$

Из (32) следует, что оно выполняется при условиях

$$B_1 < B_2 < B_3, \quad B_3 < B_2 < B_1.$$

Пусть в системе (26)–(29) $\mu_0 = \pi/2$, $B_1 \neq B_2$ (вариант 4.В) (случай $\mu_0 = 3\pi/2$ симметричен данному). Тогда из (28)–(30) имеем

$$\begin{aligned} B_1 \sin^2 \sigma_0 + B_2 \cos^2 \sigma_0 - B_3 &= 0, \quad \lambda_3 + \omega_0 A_3 a_3 = 0, \\ \frac{1}{2} a_0 (B_1 - B_2) \sin 2\sigma_0 + (\omega_0 A_2 a_2 + \lambda_2) \cos \sigma_0 - (\omega_0 A_1 a_1 + \lambda_1) \sin \sigma_0 &= 0, \\ a_0 [\omega_0 (A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2) + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2] &= k. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим равенство (13). Преобразуем его с учетом условия $(Cv \cdot v) = c_*$, вытекающего из (14), и условия

$$Bv \cdot v = 2[\omega_0(Aa \cdot v) + (\lambda \cdot v) - k],$$

вытекающего из второго соотношения системы (3) с учетом (5). Тогда получим инвариантное соотношение

$$v \cdot b = c^*, \quad (35)$$

где

$$b = \omega_0(a_0 Ba - \lambda - \omega_0 Aa) + Ca, \quad (36)$$

$$c^* = a_0 c_* + s a_0'^2 + \omega_0[a_0 \omega_0(Aa \cdot a) + a_0(\lambda \cdot a) + 2k]. \quad (37)$$

Равенство (35) должно быть следствием соотношения (7). Поэтому необходимо положить $b = \varepsilon_0 a$, $c^* = \varepsilon_0 a_0$, где ε_0 – параметр. Учитывая выражение (36), из условия $b = \varepsilon_0 a$ в скалярной форме получим

$$\omega_0 \lambda_i = a_i(a_0 \omega_0 B_i - \omega_0^2 A_i + C_i - \varepsilon_0) \quad (i = \overline{1,3}). \quad (38)$$

Условие $c^* = \varepsilon_0 a_0$ в силу (37) таково

$$\varepsilon_0 a_0 = a_0 c_* + s a_0'^2 + \omega_0[a_0 \omega_0(A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + A_3 a_3^2) + 2k + a_0(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3)], \quad (39)$$

где a_i имеют значения (10). Отметим, что при $a_0 = 0$ из (39) следует

$$s + 2\omega_0 k = 0. \quad (40)$$

При условиях $a_0 = 0$ и (40) равенство (30) примет вид

$$2s + \omega_0[B_1(\cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0 - \sin^2 \sigma_0) + B_2(\sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0 - \cos^2 \sigma_0) + B_3 \sin^2 \mu_0] = 0. \quad (41)$$

Из формулы (41) можно определить параметр ω_0 . Если в равенстве (39) полагать $a_0 \neq 0$, то на основании (14), (30) получим значение параметра ε_0 через произвольную постоянную E и параметры задачи. В частном случае можно считать, что вектор $b = 0$, а параметр c^* равен нулю. Тогда можно использовать равенства (38), положив в них $\varepsilon_0 = 0$.

Согласно принятой в данной статье методике определения условий существования равномерных вращений, необходимо сопоставить полученные равенства для вариантов А и В с равенствами (38).

Рассмотрим случай $C_3 = C_2 = C_1$, $B_3 = B_2 = B_1$. На основании равенств (25), (38) имеем (полагаем, как отмечено выше, $C_i = 0$)

$$\lambda_i = a_i(\kappa_0 - \omega_0 A_i), \quad a\kappa_0 = k + \frac{1}{2}B_1, \quad \varepsilon_0 = \omega_0(\kappa_0 - a_0 B_1), \quad (42)$$

где считаем $a_0 \neq 0$. Из второго равенства системы (42) следует, что один из параметров κ_0 или k можно считать произвольным. Тогда из третьего равенства находим ε_0 . Параметры a_i имеют значения (10), а постоянная κ_0 выражается через постоянную k . Если при рассмотрении (25), (38) полагать $a_0 = 0$, то из (40) получим значение угловой скорости равномерного вращения

$$\omega_0 = \frac{s}{B_1}. \quad (43)$$

Следует отметить, что в данном случае нет ограничений на положение вектора $\mathbf{a}$, если первое равенство из (42) интерпретировать как условие на компоненты гиристатического момента.

Пусть $C_3 = C_2 = C_1$, $B_1 = B_2 \neq B_3$. Тогда в силу варианта 2.В имеем $a_1 = a_2 = 0$ ($\mu_0 = 0$), $a_3 = 1$. Из (31), (38) получим

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \omega_0 \lambda_3 = a_0 \omega_0 B_3 - \omega_0^2 A_3 - \varepsilon_0. \quad (44)$$

Параметр c^* удовлетворяет равенству $c^* = \varepsilon_0 a_0$. Из третьего равенства (44) определим параметр ε_0 . Используя условие $c^* = \varepsilon_0 a_0$ и выражение для c^* , из (37) найдем значение на постоянную k . При указанных ограничениях на параметры задачи компоненты v_i имеют вид (17).

При анализе вариантов 3.В, 4.В отметим, что они отвечают случаю, когда вектор $\mathbf{a}$ принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции. То есть условия их существования (32), (33) и (34) в этом смысле симметричны. Следовательно, достаточно рассмотреть вариант 3.В.

В связи с этим изучим случай $C_3 = C_2 = C_1$, $\sigma_0 = 0$. Тогда из (32), (33), (38) (полагаем $C_i = 0$) найдем

$$\begin{aligned} \sin^2 \mu_0 &= \frac{B_2 - B_1}{B_3 - B_1}, \quad \lambda_2 + \omega_0 a_2 A_2 = 0, \\ \omega_0 \lambda_1 &= (a_0 \omega_0 B_1 - \omega_0^2 A_3 - \varepsilon_0) \sin \mu_0, \quad \omega_0 \lambda_3 = (a_0 \omega_0 B_3 - \omega_0^2 A_3 - \varepsilon_0) \cos \mu_0, \\ k &= a_0 [\omega_0 (A_1 \sin^2 \mu_0 + A_3 \cos^2 \mu_0) + \lambda_1 \sin \mu_0 + \lambda_3 \cos \mu_0]. \end{aligned} \quad (45)$$

Равенство (39) служит для определения постоянной E . В случае (45) компоненты v_i из (11) получим в виде:

$$v_1 = a_0 \sin \mu_0 + a'_0 \cos \mu_0 \sin \omega_0 t, \quad v_2 = a'_0 \cos \omega_0 t, \quad v_3 = a_0 \cos \mu_0 - a'_0 \sin \mu_0 \sin \omega_0 t. \quad (46)$$

Отметим, что при $a_0 = 0$ постоянная $k = 0$, а условие (39) становится тождеством при $s = 0$ (центр масс гиростата неподвижен). Из системы (45) следует, что параметр ε_0 должен удовлетворять уравнению

$$\omega_0^2 \left[\frac{\lambda_1^2}{(a_0 \omega_0 B_1 - \omega_0^2 A_1 - \varepsilon_0)^2} + \frac{\lambda_3^2}{(a_0 \omega_0 B_3 - \omega_0^2 A_3 - \varepsilon_0)^2} \right] - 1 = 0,$$

действительности решения которого можно добиться выбором параметров λ_1, λ_3 , взяв, например, такие значения λ_1, λ_2 , чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\lambda_1^2}{(a_0 B_1 - \omega_0 A_1)^2} + \frac{\lambda_3^2}{(a_0 B_3 - \omega_0 A_3)^2} > 1.$$

Положим $C_2 = C_1 \neq C_3$, $B_3 = B_2 = B_1$. То есть параметр $\mu_0 = 0$ ($a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$). Из равенств (25), (38) следует

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \kappa_0 - \omega_0 A_3, \quad \varepsilon_0 = C_3 + \omega_0(a_0 B_1 - \kappa_0), \quad k + \frac{B_1}{2} = \kappa_0 a_0, \quad c^* = a_0 \varepsilon_0. \quad (47)$$

Третье равенство системы (47) служит для определения параметра κ_0 , а четвертое – для определения параметра ε_0 , пятое – для определения k , а шестое – для определения E . Компоненты v_i в рассматриваемом случае имеют вид (17).

Рассмотрим случай $C_2 = C_1 \neq C_3$, $B_2 = B_1 \neq B_3$. Из (31), (38) получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \varepsilon_0 &= \omega_0(-\lambda_3 + a_0 B_3 - \omega_0 A_3) + C_3, \\ k &= a_0(\omega_0 A_3 + \lambda_3), \quad c^* = \varepsilon_0 a_0. \end{aligned} \quad (48)$$

Связь условий (47), (48) очевидна. При их выполнении компоненты v_i находятся из формул (17).

Положим $C_2 = C_1 \neq C_3$, $B_2 \neq B_1$. Анализируя равенства (32), приходим к выводу о том, что в силу $\mu_0 = 0$ и принятых условий данный случай невозможен. Аналогичное утверждение имеет место и для случая $C_2 = C_1$, $\sigma_0 = 0$.

Рассмотрим вариант 3.А, который характеризуется условиями $C_2 \neq C_1$, $\sigma_0 = 0$. Для него выполняются условия (19), (20). Компоненты вектора $\mathbf{a}$ из (10) таковы

$$a_1 = \sin \mu_0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \cos \mu_0. \quad (49)$$

На основании равенств (19), (49) из формул (25), (38) следует, что случай $B_3 = B_2 = B_1$ невозможен, так как он приводит к равенству $C_3 = C_1$. Поэтому изучим случай $C_2 \neq C_1$, $\sigma_0 = 0$, $B_2 = B_1$. Так как при его рассмотрении ранее получено $\mu_0 = 0$, то он также приводит к уже рассмотренным вариантам.

Пусть $C_2 \neq C_1$, $\sigma_0 = 0$, $B_2 \neq B_1$. Принимая во внимание равенства (19), (32), (38), имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} a_3(\omega_0 A_1 a_1 + \lambda_1) - a_1(\omega_0 A_3 a_3 + \lambda_3) &= 0, \quad a_0 = 0, \\ \sin^2 \mu_0 &= \frac{C_2 - C_1}{C_3 - C_1} = \frac{B_2 - B_1}{B_3 - B_1}, \quad k = 0, \quad \lambda_2 = 0, \\ \omega_0 \lambda_1 &= a_1(C_1 - \omega_0^2 A_1 - \varepsilon_0), \quad \omega_0 \lambda_3 = a_3(C_3 - \omega_0^2 A_3 - \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь считаем $\mu_0 \neq 0$ ($a_1 \neq 0$). Выражая из последних двух уравнений системы (50) λ_1 и λ_2 и подставляя полученные значения в первое равенство данной системы, получим $B_2 = B_3$, $C_2 = C_3$. Это в силу (50) означает, что $\mu_0 = \frac{\pi}{2}$. То есть вектор $\mathbf{a}$ принадлежит первой координатной оси. Рассмотренный случай можно считать симметричным случаю $\mu_0 = 0$, в котором необходимо положить $a_0 = 0$.

Из полученных выше результатов следует, что вектор равномерного вращения может занимать положение не в главной плоскости эллипсоида инерции только в случае $C_3 = C_2 = C_1$, $B_3 = B_2 = B_1$. Это положение фиксировано и определяется значениями параметров задачи. Данный вектор может занимать положение в главной плоскости эллипсоида инерции только при $C_3 = C_2 = C_1$. При этом вектор гиросtatического момента $\boldsymbol{\lambda}$ будет лежать в той же плоскости, что и вектор $\mathbf{a}$. Положение вектора $\mathbf{a}$ в главной плоскости зависит от компонент матрицы $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$. Например, если $a_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$, то $\sin^2 \mu_0 = (B_2 - B_1)(B_3 - B_1)^{-1}$. Когда вектор равномерного вращения принадлежит главной оси эллипсоида инерции, то этой же оси принадлежит и вектор гиросtatического момента. В частном случае вектор $\mathbf{a}$ может в неподвижном пространстве занимать горизонтальное положение, то есть $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона. Дифференциальные уравнения, описывающие движение гиростата в данной задаче, в имеют вид [1]

$$A\boldsymbol{\omega} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (C\mathbf{v} - \mathbf{s}), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (51)$$

Уравнения (51), в отличие от уравнений (1), (2), допускают только два первых интеграла

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} = k. \quad (52)$$

В (51), (52) все обозначения и их физический смысл за исключением матрицы B совпадают. Отметим, что матрица B характеризует магнитный момент, который возникает при движении гиростата (класса ферромагнетик) в магнитном поле [10, 11]. Как уже отмечено во введении, существование только двух первых интегралов (52) затрудняет исследование решений уравнений (51) в квадратурах [12, 13].

Рассмотрим инвариантные соотношения (5), (7) для уравнений (51) с интегралами (52). Компоненты вектора $\mathbf{a}$ в главной подвижной системе координат зададим формулами (10). Тогда компоненты v_i ($i = \overline{1,3}$) имеют вид (11). Следовательно, для уравнения Пуассона из (51) найдено общее решение. Подставим выражение (5) во второй интеграл из (52):

$$(\omega_0 Aa + \lambda) \cdot v = k. \quad (53)$$

Соотношение (53) должно быть следствием соотношения (7), поэтому должны выполняться условия

$$\lambda = \kappa_0 a - \omega_0 Aa, \quad k = a_0 \kappa_0, \quad (54)$$

где κ_0 – параметр. Если $\kappa_0 = 0$, то необходимо считать $k = 0$; если $k = 0$, то имеют место два варианта: $\kappa_0 = 0$, $a_0 = 0$.

Подставим выражение (5) в первое уравнение системы (51) и учтем значение λ из (54):

$$(\omega_0 Ba + s - Cv) \times v = 0. \quad (55)$$

Полагая в (55)

$$C_i = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \quad s_i = -\omega_0 B_i a_i, \quad (56)$$

приходим к тождеству. Запишем первое равенство из (54) в скалярном виде

$$\lambda_i = a_i (\kappa_0 - \omega_{0i}), \quad i = (\overline{1,3}). \quad (57)$$

Из (56) следует (учитываем равенство $|a| = 1$)

$$a_i = -\frac{s_i}{\omega_0 B_i}, \quad \omega_0^2 = \frac{s_1^2}{B_1^2} + \frac{s_2^2}{B_2^2} + \frac{s_3^2}{B_3^2}. \quad (58)$$

Таким образом, условия $C_i = 0 \quad (i = \overline{1,3})$, (57), (58) представляют собой первый вариант разрешимости задачи о равномерных вращениях гиростата. При этом следует иметь ввиду, что при $a_0 = 0$ ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$) значение $k = 0$.

В дальнейшем будем полагать, что равенства (56) одновременно выполняться не могут. При умножении левой части (55) скалярно на вектор v получим тождество. Следовательно, достаточно рассмотреть проекции левой части (55) на векторы a и $a \times v$. Принимая во внимание равенства $a = (a_1, a_2, a_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $s = (s_1, s_2, s_3)$, получим два алгебраических уравнения

$$\omega_0(d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3) + a_1 v_2 v_3 (C_3 - C_2) + a_2 v_3 v_1 (C_1 - C_3) + a_3 v_1 v_2 (C_2 - C_1) = 0, \quad (59)$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + (C_1 v_1^2 + C_2 v_2^2 + C_3 v_3^2) a_0 + b_0 = 0. \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= s_3 a_2 - s_2 a_3 + a_2 a_3 (B_3 - B_2) \omega_0, \\ d_2 &= s_1 a_3 - s_3 a_1 + a_3 a_1 (B_1 - B_3) \omega_0, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} d_3 &= s_2 a_1 - s_1 a_2 + a_1 a_2 (B_2 - B_1) \omega_0; \\ b_1 &= -a_i C_i - a_0 (s_i + \omega_0 a_i B_i) \quad (i = \overline{1,3}), \quad b_0 = \sum_{i=1}^3 a_i (s_i + \omega_0 a_i B_i). \end{aligned} \quad (62)$$

Для получения условий существования равномерных вращений гиростата необходимо подставить выражения (11) в равенства (59), (60) и потребовать, чтобы полученные уравнения были тождествами по t . В данном методе целесообразно рассмотреть сначала особый случай (будем его относить к варианту 2). Пусть вектор $\mathbf{a}$ направлен по одной из главных осей; без ограничения общности положим

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1. \quad (63)$$

Тогда уравнения Пуассона принимают вид (16). Решение этих уравнений выписано в (17):

$$v_1 = a'_0 \sin \omega_0 t, \quad v_2 = a'_0 \cos \omega_0 t, \quad v_3 = a_0. \quad (64)$$

Вследствие равенств (64) из (59), (60) получим

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad C_2 = C_1, \quad a_0(C_1 a_0'^2 + C_3 a_0^2) + (\omega_0 B_3 + s_3) a_0'^2 = 0. \quad (65)$$

Учтем условия (63) и в формулах (54), (57):

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \kappa_0 - A_3, \quad k = a_0 \kappa_0. \quad (66)$$

Равенства (65), (66) определяют условия существования равномерных вращений гиростата в случае (63). Они имеют место и при $a_0 = 0$ (ось равномерного вращения горизонтальна), тогда $k = 0$ (постоянная интеграла моментов равна нулю). Далее будем полагать, что две компоненты вектора $\mathbf{a}$ одновременно не равны нулю.

К варианту 3 отнесем случай

$$C_3 = C_2 = C_1. \quad (67)$$

Так как при выполнении условия (67) матрица C в уравнения (51) не входит, то в дальнейшем в (59), (60) полагаем $C_i = 0$. Рассмотрим сначала уравнение (60). Так как $C_i = 0$, то

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 = -b_0. \quad (68)$$

Уравнение (68) при выполнении равенств

$$b_i = 0 \quad (i = \overline{0,3}) \quad (69)$$

становится тождеством. Если воспользуемся формулами (62), то получим

$$a_0(s_i + \omega_0 a_i B_i) = 0. \quad (70)$$

При условии $a_0 \neq 0$ из (70) следует равенство (56) варианта 1. Следовательно, в (70) необходимо положить $a_0 = 0$. Тогда в силу (62) имеем

$$\sum_{i=1}^3 a_i (s_i + \omega_0 a_i B_i) = 0. \quad (71)$$

Рассмотрим уравнение (59) при $C_i = 0$

$$d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 = 0. \quad (72)$$

Оно должно быть следствием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$, то есть должны выполняться условия $d_i = a_i \sigma_0$ (σ_0 – параметр). Данные равенства и равенство (71) рассмотрим с учетом обозначений (61). Их удобно представить в векторном виде. Введем вектор $\mathbf{s}^*$, его координаты обозначим через s_i^* , где $s_i^* = s_i + \omega_0 a_i B_i$. Тогда указанные выше соотношения запишем так:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{s}^* = \sigma_0 \mathbf{a}, \quad \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (73)$$

В силу $|\mathbf{a}| = 1$ из (73) делаем заключение, что вектор $\mathbf{s}^* \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{s}^* \parallel \mathbf{a}_*$, то есть вектор $\mathbf{s}^* = \mathbf{0}$. Следовательно, имеем рассмотренный выше вариант 1.

Изучим случай, когда в уравнении (68) параметры b_i удовлетворяют условию $b_i = \lambda_0 a_i$ (λ_0 – параметр). Тогда из (68) имеем $b_0 = -\lambda_0 a_0$ ($a_0 \neq 0$). Используя обозначения (62) и указанные условия, получим $a_0^2 = 1$, то есть $a_0' = 0$, что невозможно в силу постановки задачи. Итак, случай равенства величин C_i ($i = \overline{0,3}$) имеет место только в варианте 1.

Пусть $a_0 = 0$ и все C_i не равны между собой. Тогда инвариантное соотношение (7) и уравнение (60) примут вид

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0, \quad b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 = -b_0, \quad (74)$$

где $b_i = -a_i C_i$, и в силу (11)

$$\begin{aligned} v_1 &= -\sin \sigma_0 \cos \omega_0 t + \cos \sigma_0 \cos \mu_0 \sin \omega_0 t, & v_2 &= \cos \sigma_0 \cos \omega_0 t + \sin \sigma_0 \cos \mu_0 \sin \omega_0 t, \\ v_3 &= -\sin \mu_0 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (75)$$

Из (74) следует, что $b_0 = 0$, $b_i = \mu^* a_i$ (μ^* – параметр). Запишем эти равенства на основании (62):

$$(\mu^* + C_i) a_i = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \quad \sum_{i=1}^3 a_i (s_i + \omega_0 a_i B_i) = 0. \quad (76)$$

Подставим значения v_i ($i = \overline{1,3}$) из (75) в уравнение (59) и рассмотрим уравнения, которые следуют из требования, что коэффициенты при $\sin 2\omega_0$, $\cos 2\omega_0 t$ обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} [(C_1 - C_3) \sin^2 \sigma_0 - (C_3 - C_2) \cos^2 \sigma_0] \sin^2 \mu_0 + (C_2 - C_1) \cos^2 \mu_0 \cos 2\sigma_0 &= 0, \\ (C_2 - C_1) \sin 2\sigma_0 \cos \mu_0 &= 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Если $C_2 = C_1$, то из (77) следует, что $\mu_0 = 0$. То есть вектор $\mathbf{a}$ направлен по главной оси эллипсоида инерции. Этот случай позволяет в силу (10) из (76) получить равенства $\mu^* = -C_3$, $s_3 + \omega_0 B_3 = 0$. Тогда из уравнения (59) найдем условия: $s_2 = 0$, $s_1 = 0$. Следовательно, вариант $\mu_0 = 0$, $C_2 = C_1$ можно объединить с вариантом (64)–(66) и рассматривать его, как частный случай (64)–(66).

Пусть в системе (77) $\mu_0 = \pi/2$. Тогда из (10) получим $a_1 = \cos \sigma_0$, $a_2 = \sin \sigma_0$, $a_3 = 0$ (вектор $\mathbf{a}$ принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции). Из (76) следует, что $C_2 = C_1$, а из (77) – $C_3 = C_1$. Если в (77) полагать $\cos \sigma_0 = 0$, то имеем вариант, который можно трактовать, как вариант, симметричный варианту $\mu_0 = \pi/2$. Таким образом, доказано, что при $a_0 = 0$ ($\theta_0 = \pi/2$) имеем либо случай $C_3 = C_2 = C_1$, либо частный случай, описываемый соотношениями (63)–(66) при $a_0 = 0$.

В дальнейшем полагаем, что $a_0 \neq 0$ и значения C_i не удовлетворяют условию $C_3 = C_2 = C_1$.

Рассмотрим уравнения (59), (60) и примем во внимание, что v_i ($i = \overline{1,3}$) имеют общий вид (11). Подставим (11) в (59), (60) и потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по t . Тогда получим систему алгебраических уравнений, в состав которой входят уравнения (77). Случай $\mu_0 = 0$, $C_2 = C_1$, как показано выше, приводит к случаю (63)–(66). Случаи $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$, $\mu_0 = \frac{\pi}{2}$ характеризуются тем, что вектор $\mathbf{a}$ принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции. Поэтому в этом случае они являются симметричными и достаточно рассмотреть случай $\sigma_0 = 0$. Тогда из (11) следует

$$v_1 = a_0 \sin \mu_0 + a'_0 \cos \mu_0 \sin \omega_0 t, \quad v_2 = a'_0 \cos \omega_0 t, \quad v_3 = a_0 \cos \mu_0 - a'_0 \sin \mu_0 \sin \omega_0 t. \quad (78)$$

Внесем (78) в уравнения (59), (60). Преобразованные уравнения будут тождествами при выполнении следующих равенств

$$(C_2 - C_1) \cos^2 \mu_0 - (C_3 - C_2) \sin^2 \mu_0 = 0, \quad s_2 = 0, \quad (79)$$

$$a_0(C_1 - C_3) \cos 2\mu_0 + s_1 \sin \mu_0 + s_3 \cos \mu_0 + \omega_0(B_1 \sin^2 \mu_0 + B_3 \cos^2 \mu_0) = 0, \quad (80)$$

$$(C_3 - C_1)(a_0^2 - \frac{1}{2}) \sin 2\mu_0 + a_0[s_3 \sin \mu_0 - s_1 \cos \mu_0 + \frac{1}{2} \omega_0(B_3 - B_1) \sin 2\mu_0] = 0. \quad (81)$$

Из первого уравнения системы (79) находим значение μ_0 :

$$\operatorname{tg}^2 \mu_0 = \frac{C_2 - C_1}{C_3 - C_2} \quad (C_3 > C_2 > C_1). \quad (82)$$

Второе равенство из (79) означает, что вектор $\mathbf{s}$ лежит в той же плоскости, что и вектор $\mathbf{a}$. К уравнениям (79)–(81) необходимо добавить соотношения (54), которые в силу $a_1 = \sin \mu_0$, $a_2 = 0$, $a_3 = \cos \mu_0$ таковы

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = (\kappa_0 - \omega_0 A_1) \sin \mu_0, \quad \lambda_3 = (\kappa_0 - \omega_0 A_3) \cos \mu_0, \quad \kappa_0 = \frac{k}{a_0}. \quad (83)$$

Из (83) следует, что вектор $\boldsymbol{\lambda}$ лежит в главной плоскости, содержащей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{s}$. Уравнения (80), (81) являются линейными по s_1, s_3 уравнениями и поэтому они могут служить уравнениями для определения s_1, s_3 . Следовательно, при таком подходе параметр $a_0 \in (-1; 1)$, а параметр μ_0 удовлетворяет уравнению (82).

Таким образом, вектор $\mathbf{a}$, задающий равномерное вращение гиростата, может принадлежать либо главной оси, либо главной плоскости эллипсоида инерции, если выполнены соответственно условия (65), (66) и (79)–(81). В особом случае (56) вектор $\mathbf{a}$ может занимать и положение, не совпадающее с указанными. При этом отсутствует ограничение на угол θ_0 , которое обусловлено параметрами задачи.

Заключение. При рассмотрении условий существования равномерных вращений гиростата в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (задача 1) и в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона (задача 2) установлены следующие свойства. В задаче 1 равномерные вращения происходят вокруг барицентрической оси; в задаче 2 эти вращения могут иметь место и вокруг небарицентрической оси. Условия существования равномерных вращений гиростата в данных задачах имеют определенные отличия, которые характеризуются матрицей B . Совпадение данных условий может иметь место только в случае $B_3 = B_2 = B_1$. Вращения гиростата вокруг горизонтальной оси в пространстве характерно в обеих задачах, но при разных условиях на параметры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 394 с.
2. Горр Г.В. Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наукова думка, 2013. – Т. 8, серия «Задачи и методы: математика, механика». – 408 с.
3. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – Vol. 5, No 5. – P. 747–754.
4. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid / H.M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – Vol. 5, No 5. – P. 755–762.
5. Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt / O. Staude // J. reine und angew. Math. – 1894. – Bd. 113, H. 4. – P. 318–334.
6. Холостова О.В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде / О.В. Холостова. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2008. – 128 с.
7. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела / П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. гос. ун-та, 1965. – 221 с.
8. Харламов П.В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку / П.В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – Т. 29, вып. 2. – С. 373–375.
9. Ковалев А.М. О конусе осей равномерного вращения гиростата / А.М. Ковалев, А.М. Киселев // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 36–46.
10. Егармин И.Е. О магнитном поле сверхпроводящего тела / И.Е. Егармин // Аэрофизика и геокосмические исследования. – М.: Физ.-техн. ин-т, 1983. – С. 95–96.
11. Урман Ю.Н. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе / Ю.Н. Урман // Докл АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 6. – С. 1402–1404.
12. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле / В.А. Самсонов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
13. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле / В.В. Козлов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28–33.
14. Дружинин Э.И. О перманентных вращениях неавтономного гиростата / Э.И. Дружинин // Прикл. математика и механика. – 1999. – Т. 63, вып. 5. – С. 825–826.
15. Ковалева Л.М. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком / Л.М. Ковалева, Е.В. Позднякович // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.

Поступила в редакцию 15.05.2018 г.

ABOUT STEADY ROTATION OF GYROSTAT, HAVING FIXED POINT,
IN TWO PROBLEMS OF MECHANICS

G.V. Gorr, T.V. Balaklitskaya, V.V. Shentsova

The article researches the conditions of existence of steady rotations of gyrost, having fixed point. The following two problems have been considered: the problem of gyrost movement, affected by potential and gyroscopic forces, as well as the problem of gyrost movement in magnetic field with due consideration of Barnett-London effect. The conditions were received for parameters, characterizing mass distribution and acting forces, while performing of which gyrost completes steady rotation relatively to inclined axis.

Key words: gyrost, steady rotations, magnetic field.

Горр Геннадий Викторович

доктор физ.-мат. наук, профессор;
ГУ “Институт прикладной математики и механики”
(г. Донецк), главный научный сотрудник
E-mail: gvgorr@gmail.com.
Тел.: (062) 303-61-72

Gorr Gennadiy Viktorovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full
Professor,
Chief Resercher of the Department of Applied
Mechanics at the Institute of Applied Mathematics and
Mechanics (Donetsk)

Балаклицкая Татьяна Витальевна

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”
(г. Донецк), студент
E-mail: barilka@ukr.net
Тел.: (071) 394-04-36

Balaklitskaya Tatyana Vitalievna

Donetsk National University (Donetsk),
Student

Шенцова Валерия Вадимовна

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”
(г. Донецк), студент
E-mail: shentsovav@mail.ru
Тел.: (071) 310-50-68

Shentsova Valetiya Vadimovna

Donetsk National University (Donetsk),
Student

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, НАГРУЖЕННЫМ УСИЛИЯМИ

© 2018. В.Н. Чехов, С.В. Закора

Применение многозначных аналитических решений в рамках теории типа С.П. Тимошенко позволило получить уточненное аналитическое решение проблемы напряженного состояния в пологой сферической оболочке с круговым жестким включением, нагруженным тангенциальными или поперечными усилиями. В результате численных исследований установлено, что для этих вариантов нагружения при увеличении параметра поперечного сдвига и уменьшении радиуса жесткого включения относительные напряжения возрастают в несколько раз. Также обнаружено, что влияние поперечного сдвига особенно важно для относительно небольших диаметров жестких включений.

Ключевые слова: аналитическое решение, теория типа С.П. Тимошенко, полая сферическая оболочка, трансверсально-изотропный материал, жесткое включение, деформация поперечного сдвига, тангенциальные и поперечные усилия.

Введение. Тонкостенные оболочки широко применяются в качестве элементов несущих конструкций в промышленности и в строительстве. Поэтому исследования напряженного состояния оболочек с концентраторами напряжений в виде отверстий [1–5], включений [2, 5–7], сосредоточенных [8] и локальных воздействий [2, 3 (гл. 24)] остаются востребованными.

В классе задач о нагружении оболочек усилием и моментом через жесткое круговое включение аналитические решения и численные результаты получены лишь для изотропных (в рамках классической теории Кирхгофа-Лява) сферической [3 (гл. 24), 7] и цилиндрической [2] оболочек.

В тоже время, в связи с широким применением в технике композитных материалов, стали актуальными задачи для трансверсально-изотропных оболочек. Такие материалы, как правило, обладают низкой сдвиговой жесткостью, поэтому для них наиболее приемлемой является сдвиговая модель, сформулированная С.П. Тимошенко. На базе этой теории в [1] был предложен метод решения задач для трансверсально-изотропных оболочек с отверстиями и включениями. Затем, на базе этой - же сдвиговой модели, Пелех Б.Л. [4] предложил несколько упрощенный вариант уравнений «технической теории трансверсально-изотропных оболочек». Этими методами был решен ряд задач для трансверсально-изотропных оболочек с отверстиями, включениями и подкрепляющими кольцами [2, 4, 5]. Значительная часть результатов по изучению концентрации напряжений около отверстий и жестких включений в оболочках, изготовленных из металлических и композитных материалов, получена также с использованием вариационных конечно-разностных методов (например, в [9]) и наиболее полно изложена в обзорной статье [10]. Но все эти задачи и их решения предполагали нагружение оболочки равномерным внутренним давлением, растяжением или кручением.

В данной статье в рамках теории С.П. Тимошенко предлагается аналитическое решение задачи и численные исследования при нагружении усилиями, приложенными через круговое абсолютно жесткое включение в пологой трансверсально-изотропной сферической оболочке. При этом здесь в отличие от [11] применяются многозначные

решения [2], что позволило исследовать случаи нагружения не только поперечным, но и сдвигающим усилиями.

Постановка задачи. Рассмотрим пологую трансверсально-изотропную сферическую оболочку с круговым недеформируемым включением – рис. 1. Предполагаем, что жёсткая шайба может быть нагружена касательным усилием F_X , или поперечным усилием F_Z .

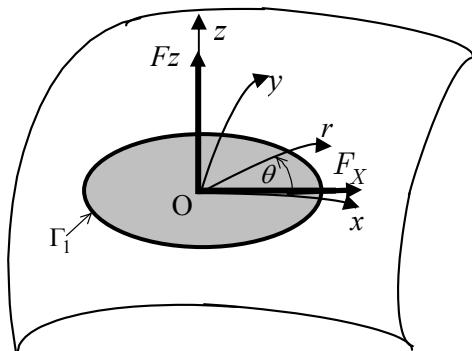


Рис. 1

Для решения задачи применялась система однородных разрешающих дифференциальных уравнений, основанных на уточнённой теории типа С.П. Тимошенко, учитывающей деформации поперечного сдвига [2]:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \nabla^2 U - \nabla^2 w &= 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 U - 2\delta \nabla^2 \nabla^2 U &= 0; \\ (1 - \nu) \delta \nabla^2 \chi - \chi &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь U, w, χ – искомые функции усилий, прогиба и поперечного сдвига; ν – коэффициент Пуассона,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad \text{– оператор Лапласа в}$$

полярной системе координат (ρ, θ) , где $\rho = \frac{r}{\sqrt{cR}}$ – безразмерный радиус – вектор,

$$r \cdot e^{i\theta} = x + iy; \quad \delta = \frac{Ehc}{2KR} \quad \text{– относительный безразмерный параметр податливости}$$

поперечным сдвигам, где $K = \mu G_1 h$, $c = h / \sqrt{12(1 - \nu^2)}$, E – модуль Юнга, G_1 – модуль трансверсального сдвига, $\mu = 5/6$ – коэффициент сдвига, R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, i – мнимая единица.

Построение аналитических решений. Решения системы дифференциальных уравнений (1) определим с помощью цилиндрической, полигармонической и аналитической частей:

$$U = U_c + i \frac{R}{2} U_a \quad (2)$$

$$w = w_c + \frac{R}{2} w_p. \quad (3)$$

В (2) аналитическая часть U_a согласно [2] имеет вид:

$$\begin{aligned}U_a(r, \theta) &= (\alpha_1 + \bar{\alpha}_2) [(1 + 2 \ln r) r \cos \theta - 2r \sin \theta] + \\ &+ (\beta_1 + \bar{\beta}_2) (1 + \ln r) + (\gamma_1 + \bar{\gamma}_2) \frac{1}{r} \cos \theta.\end{aligned}\quad (4)$$

При этом согласно [2] необходимо выполнить условия однозначности комплексных смещений:

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad \beta_1 = -\beta_2, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 4icR(1 + \nu)\bar{\alpha}_1 \quad (5)$$

Главный вектор и главный момент внешних усилий, приложенных к жёсткой шайбе, определяются согласно [2]:

$$F_X = 2\pi EhcR \operatorname{Im}(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (6)$$

$$F_Y = 2\pi EhcR \operatorname{Re}(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (7)$$

$$F_Z = \pi Ehc \operatorname{Im}(\beta_1 - \beta_2), \quad (8)$$

$$B_Z = -\pi EhcR \operatorname{Re}(\beta_1 - \beta_2), \quad (9)$$

$$B_X = \pi Ehc \operatorname{Re}[(\gamma_1 - \gamma_2) + 2icR(1 - \nu)(\alpha_1 + \alpha_2)], \quad (10)$$

$$B_Y = \pi Ehc \operatorname{Im}[(\gamma_1 - \gamma_2) - 2icR(1 - \nu)(\alpha_1 + \alpha_2)]. \quad (11)$$

Комплексные неизвестные постоянные α_j , β_j , γ_j ($j = \overline{1, 2}$) определяются из системы уравнений (5)–(11) при заданных значениях соответствующих компонент.

Аналитическое решение при заданном поперечном усилии. Задано $F_Z = -F_Z^0$, а остальные компоненты – равными нулю. Из системы уравнений (5) – (11) получим

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = -\frac{iF_Z^0}{2\pi Ehc}, \quad \beta_2 = \frac{iF_Z^0}{2\pi Ehc}, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

Аналитическая часть (4) упростится и примет вид:

$$U_a(r) = 2\beta_1(1 + \ln r) = -\frac{iF_Z^0(1 + \ln r)}{\pi Ehc} \quad (12)$$

Из (12) очевидно, что для этого случая нагружения цилиндрические части в (2) и (3) также будут содержать только 0-ю гармонику, а полигармоническая часть в (3) отсутствует $w_p = 0$. Цилиндрические части решения, убывающие по абсолютной величине при удалении от контура Γ_1 , имеют три различные аналитические формы в зависимости от диапазона изменения параметра податливости поперечным сдвигам δ [2]. Решение уравнений (1) запишем в полярных координатах ρ, θ на срединной поверхности оболочки в виде:

- в интервале $0 \leq \delta < 1$: $U_c = iaK_0(\sigma\rho)$, $w_c = i\sigma^2 aK_0(\sigma\rho)$;

- для $\delta = 1$: $U_c = AK_0(\rho) + B\rho K_1(\rho)$, $w_c = (A - 2B)K_0(\rho) + B\rho K_1(\rho)$;

- при $\delta > 1$: $U_c = AK_0(\omega\rho) + BK_0(\rho/\omega)$, $w_c = \omega^2 AK_0(\omega\rho) + \omega^{-2} BK_0(\rho/\omega)$.

Здесь $K_m(z)$ — цилиндрические функции Макдональда; $\omega = \sqrt{\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}}$,

$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1 + \delta} + i\sqrt{1 - \delta})$, $a = A + iB$, где A, B — вещественные постоянные.

На границе Γ_1 абсолютно жесткого включения ставили деформационные краевые условия

$$\varepsilon_{\tau\tau}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \kappa_{\tau\tau}|_{\Gamma_1} = 0, \quad (13)$$

или $\varepsilon_{\tau\tau}|_{\Gamma_1} = 0$, $\kappa_{n\tau}|_{\Gamma_1} = 0$, что эквивалентно (13), так как для деформационных краевых величин, записанных в виде (16), между коэффициентами при неизвестных постоянных

A, B для 0-й гармоники существуют зависимости $\rho \cdot \kappa_{\tau\tau}^0 \equiv -\kappa_{n\tau}^0 \sqrt{\frac{R}{c}}$, $\kappa_{\tau\nu}^0 \equiv 0$.

Аналитическое решение при заданном касательном усилии. Задано $F_X = F_X^0$, а остальные компоненты – равны нулю. Из системы уравнений (5)–(11) получим

$$\alpha_1 = \frac{iF_X^0}{4\pi EhcR}, \quad \alpha_2 = -\frac{iF_X^0}{4\pi EhcR}, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0,$$

$$\gamma_1 = \frac{(1+\nu)F_X^0}{2\pi Eh}, \quad \gamma_2 = \frac{(1+\nu)F_X^0}{2\pi Eh}$$

и аналитическая часть примет вид:

$$U_a(r, \theta) = \frac{iF_X^0}{2\pi EhcR} [(1+2\ln r)r \cos \theta - 2r \sin \theta] + \frac{(1+\nu)F_X^0}{\pi Ehr} \cos \theta \quad (14).$$

Цилиндрическая и полигармоническая части будут содержать только первую гармонику:

- в интервале $0 < \delta < 1$:

$$U_c = aK_1(\sigma\rho) \cos \theta, \quad w_c = \sigma^2 aK_1(\sigma\rho) \cos \theta ;$$

- для $\delta = 1$:

$$U_c = [AK_1(\rho) + B\rho K_0(\rho)] \cos \theta, \quad w_c = [(A - 2B)K_1(\rho) + B\rho K_0(\rho)] \cos \theta;$$

- при $\delta > 1$:

$$U_c = [AK_1(\omega\rho) + BK_1(\rho/\omega)] \cos \theta, \quad w_c = [\omega^2 AK_1(\omega\rho) + \omega^{-2} BK_1(\rho/\omega)] \cos \theta$$

Для всего диапазона δ : $\chi = M \cdot K_1(\lambda\rho) \sin \theta$, $w_p = F/r \cos \theta$. Здесь M и F — вещественные постоянные, $\lambda = 1/\sqrt{(1-\nu)\delta}$.

На границе Γ_1 абсолютно жесткого включения ставили деформационные краевые условия

$$\varepsilon_{\tau\tau}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \kappa_{\tau\tau}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \kappa_{nr}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \kappa_{\tau\nu}|_{\Gamma_1} = 0. \quad (15)$$

Выражения для деформационных краевых величин, усилий и моментов.
Выражения для деформационных краевых величин, вошедших в (13), (15) имеют вид:

$$Eh\varepsilon_{\tau\tau} = T_\theta - \nu T_\rho, \quad \frac{Eh^2}{2}\kappa_{\tau\tau} = \frac{6}{h}(G_\theta - \nu G_\rho) - \frac{\delta\sqrt{3-3\nu^2}}{\rho}\sqrt{\frac{R}{c}}Q_\rho,$$

$$\frac{Eh^2}{2}\kappa_{\tau\nu} = \frac{6(1+\nu)}{h}H_{r\theta} - \delta\sqrt{3-3\nu^2}\sqrt{\frac{R}{c}}\frac{dQ_\theta}{d\rho},$$

$$Eh\kappa_{nr} = \frac{dT}{dr} - (1+\nu)\frac{1}{r}\frac{dS_{\rho\theta}}{d\theta} - \delta\sqrt{\frac{R}{c}}Q_\rho. \quad (16)$$

Выражения для усилий и моментов, вошедших в (16), имеют вид:

$$T_\theta = \frac{Eh}{R}\operatorname{Re}\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}, \quad T_r = \frac{Eh}{R}\operatorname{Re}\nabla^2 U - T_\theta, \quad T = T_r + T_\theta,$$

$$H_{r\theta} = \frac{Eh}{R}(1-\nu)c\operatorname{Re}\left[\delta\left(\nabla^2 \chi - 2\frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\right],$$

$$G_r = \frac{Eh}{R}c\operatorname{Re}\left[\frac{2}{\chi^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \chi}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} - \nu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\right)\right],$$

$$S_{r\theta} = -\frac{Eh}{R} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \quad G_\theta = -\frac{Eh}{R} (1+\nu) c \operatorname{Re} \nabla^2 g - G_r,$$

$$Q_r = \frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 g \right), \quad Q_\theta = -\frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 g \right), \quad (17)$$

где $g = w + 2\delta \nabla^2 w - 4\delta^2 \nabla^2 U$.

Подставляя усилия и моменты (17) с учётом (16) в краевые условия (13), или (15) и приравнявая члены при одинаковых гармониках, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных вещественных постоянных A, B, F, M . Поскольку комплексные неизвестные постоянные $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = 1, 2$) предварительно найдены, то аналитическими частями (12) или (14) также определяются правые части системы.

После решения полученной системы были найдены безразмерные коэффициенты концентрации мембранных, изгибных и касательных напряжений

$$k_\theta^T = T_\theta/d, \quad k_r^T = T_r/d, \quad k_\theta^B = \frac{6G_\theta}{dh}, \quad k_r^B = 6G_r/dh, \quad \tau_{r\theta}^T = S_{r\theta}/d, \quad \tau_{r\theta}^B = 6H_{r\theta}/dh.$$

Здесь для варианта задания F_Z

$$d = \frac{F_Z^0}{\pi c \cdot sca}, \quad (18)$$

для варианта задания F_X

$$d = \frac{F_X^0}{\pi \sqrt{Rc} \cdot sca}, \quad (19)$$

где sca – масштабный множитель.

Затем были вычислены относительные эквивалентные напряжения по энергетической теории прочности [2]:

$$k_\theta = k_\theta^T \pm k_\theta^B, \quad k_r = k_r^T \pm k_r^B, \quad k_{r\theta} = \tau_{r\theta}^T \pm \tau_{r\theta}^B, \quad (20)$$

$$k_{eq} = \sqrt{k_r^2 + k_\theta^2 - k_r k_\theta + 3k_{r\theta}^2}. \quad (21)$$

Относительным эквивалентным напряжениям на наружной поверхности оболочки k_{eq}^{Ext} в формулах (20), (21) соответствует знак «+», а на внутренней k_{eq}^{Int} – знак «-».

Численные результаты. Были проведены расчёты для трансверсально-изотропной сферической оболочки с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ при различных значениях радиуса жёсткой шайбы ρ_0 в зависимости от параметра сдвига δ . В таблицах и на графиках для вариантов нагружения усилиями F_Z, F_X приведены значения вычисленных напряжений на контуре Γ_1 кругового жесткого включения в увеличенном масштабе 10:1, т.е. значение масштабного множителя в (18) и (19) $sca = 10$.

На рис. 2–4 приведены графики относительных напряжений в зависимости от параметра сдвига δ , а на рис. 5 – по контуру Γ_1 в зависимости от угла θ . На рисунках эквивалентные напряжения на наружной поверхности оболочки k_{eq}^{Ext} показаны

сплошными линиями, а на внутренней поверхности k_{eq}^{Int} – длинными штрих-пунктирными. На рис. 3 кроме k_{eq}^{Ext} приведены ещё мембранные напряжения k_r^T – штрих-двух-пунктирными линиями, k_θ^T – штрих-пунктирными; изгибные напряжения k_r^B – пунктирными линиями и k_θ^B – штриховыми линиями. Над линиями указаны соответствующие им значения радиуса жёсткой шайбы ρ_0 .

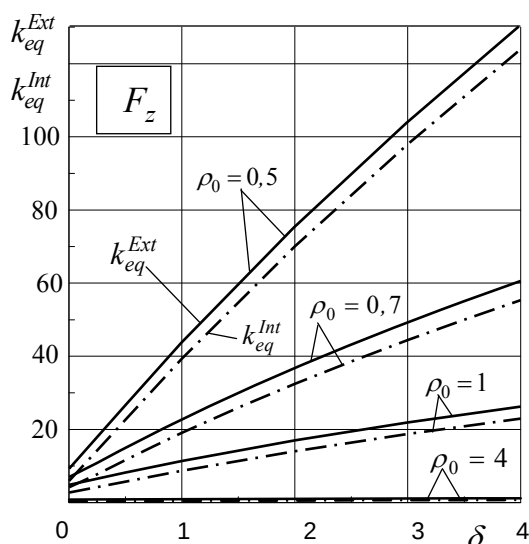


Рис. 2

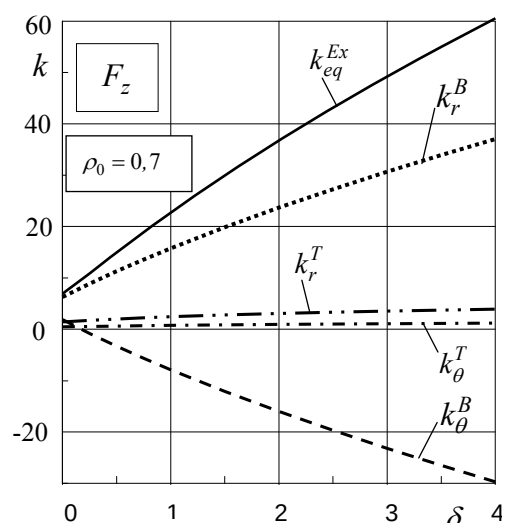


Рис. 3

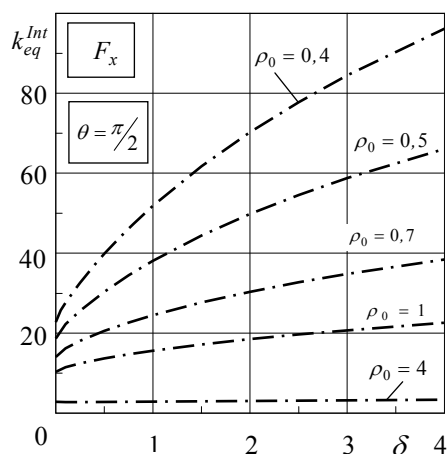


Рис. 4

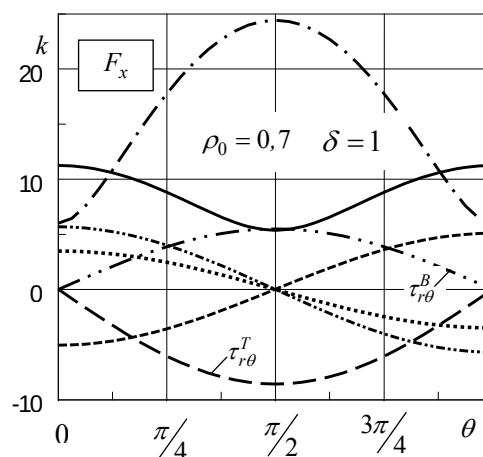


Рис. 5

Из рис. 2, 3 и табл. 1, 2 видно, что для варианта нагружения усилием F_Z наибольшими являются относительные эквивалентные напряжения k_{eq}^{Ext} на наружной поверхности оболочки. При этом из табл. 1, 2 и рис. 3 видно, что наибольший вклад в рост относительных эквивалентных напряжений k_{eq}^{Ext} , k_{eq}^{Int} вносят изгибные напряжения k_r^B и k_θ^B .

Таблица 1

Значения напряжений в зависимости от δ при $\rho_0 = 0,4$ при нагружении усилием F_z

δ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	$\tau_{r\theta}^T$	$\tau_{r\theta}^B$	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
0	2,113	0,634	10,217	3,065	0,000	0,000	10,959	7,203
0,5	3,303	0,991	27,871	-14,727	0,000	0,000	39,859	35,169
1	4,240	1,272	44,338	-31,326	0,000	0,000	68,724	63,068
2	5,691	1,707	74,789	-62,024	0,000	0,000	122,350	115,065
3	6,806	2,042	102,82	-90,307	0,000	0,000	171,739	163,163
4	7,716	2,315	129,139	-116,796	0,000	0,000	217,951	208,311

Таблица 2

Значения напряжений в зависимости от δ при $\rho_0 = 3$ при нагружении усилием F_z

δ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	$\tau_{r\theta}^T$	$\tau_{r\theta}^B$	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
0	0,315	0,095	0,901	0,270	0,000	0,000	1,081	0,521
0,5	0,348	0,105	1,019	0,135	0,000	0,000	1,265	0,656
1	0,370	0,111	1,109	0,026	0,000	0,000	1,416	0,785
2	0,398	0,119	1,251	-0,146	0,000	0,000	1,662	1,012
3	0,415	0,125	1,364	-0,286	0,000	0,000	1,865	1,207
4	0,428	0,128	1,460	-0,405	0,000	0,000	2,041	1,379
5	0,437	0,131	1,546	-0,512	0,000	0,000	2,199	1,535

Для варианта нагружения усилием F_X из табл. 3, 4 и рис. 5 видно, что более опасными становятся относительные эквивалентные напряжения на внутренней поверхности оболочки k_{eq}^{Int} в точке контура жёсткого включения $\theta = \pi/2$. Поэтому на рис. 4 приведены значения k_{eq}^{Int} в этой точке, как наибольшие в оболочке. Из рис. 4 и табл. 3, 4 видно, что при увеличении параметра δ и уменьшении радиуса жёсткой шайбы ρ_0 напряжения k_{eq}^{Int} значительно возрастают.

Таблица 3

Значения напряжений в зависимости от δ при $\rho_0 = 0,4$ при нагружении усилием F_x

δ	θ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	$\tau_{r\theta}^T$	$\tau_{r\theta}^B$	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
0	0	11,840	3,552	-2,486	-0,746	0,000	0,000	8,315	12,733
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-13,160	0,000	22,793	22,793
0,5	0	11,472	3,442	6,080	-8,666	0,000	0,000	20,666	10,507
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-13,528	9,470	7,027	39,834
1	0	11,210	3,363	13,134	-15,318	0,000	0,000	32,039	19,713
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-13,790	16,145	4,078	51,849
2	0	10,803	3,241	23,978	-25,650	0,000	0,000	49,913	37,268
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-14,197	26,373	21,090	70,268
3	0	10,485	3,145	32,301	-33,642	0,000	0,000	63,761	51,301
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-14,515	34,255	34,190	84,472
4	0	10,219	3,066	39,119	-40,221	0,000	0,000	75,153	62,928
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-14,781	40,740	44,963	96,166

Таблица 4

Значения напряжений в зависимости от δ при $\rho_0 = 2$ при нагружении усилием F_x

δ	θ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	$\tau_{r\theta}^T$	$\tau_{r\theta}^B$	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
0	0 $\pi/2$	1,686 0,000	0,506 0,000	0,189 0,000	0,057 0,000	0,000 -3,314	0,000 0,000	1,667 5,741	1,330 5,741
0,5	0 $\pi/2$	1,650 0,000	0,495 0,000	1,140 0,000	-0,264 0,000	0,000 -3,350	0,000 0,296	2,682 5,289	0,670 6,316
1	0 $\pi/2$	1,637 0,000	0,491 0,000	1,837 0,000	-0,582 0,000	0,000 -3,363	0,000 0,551	3,521 4,872	1,187 6,779
2	0 $\pi/2$	1,629 0,000	0,489 0,000	2,873 0,000	-1,162 0,000	0,000 -3,371	0,000 0,993	4,873 4,120	2,515 7,558
3	0 $\pi/2$	1,628 0,000	0,488 0,000	3,661 0,000	-1,670 0,000	0,000 -3,372	0,000 1,380	5,967 3,450	3,630 8,232
4	0 $\pi/2$	1,628 0,000	0,488 0,000	4,310 0,000	-2,123 0,000	0,000 -3,372	0,000 1,731	6,902 2,843	4,585 8,838

Рост напряжения k_{eq}^{Int} обусловлен увеличением касательных напряжений $\tau_{r\theta}^B$, $\tau_{r\theta}^T$, как это видно из табл. 3, 4 и рис. 5. На рис. 5 напряжения $\tau_{r\theta}^B$ показаны длинными штрих-двух-пунктирными линиями, а $\tau_{r\theta}^T$ – длинными штриховыми линиями; остальные напряжения показаны такими же линиями, как и на рис. 2, 3.

Из рис. 2, 3 и 4 видно, что для всех вариантов нагружения при увеличении параметра поперечного сдвига материала оболочки δ и уменьшении радиуса жёсткой шайбы ρ_0 относительные напряжения возрастают в несколько раз. Это подтверждается также и таблицами 1 – 4, где представлены результаты вычисленных напряжений для значений $\rho_0=0,4$ (табл. 1, 3); $\rho_0=2$ (табл. 4) и $\rho_0=3$ (табл. 2).

Следует также отметить следующее. Для варианта нагружения усилием F_Z из табл. 2 видно, что при $\rho_0=3$ и изменении δ от 0 до 4 напряжения k_{eq}^{Ext} увеличились в 1,9 раза. А из табл. 1 видно, что при $\rho_0=0,4$ и тех же изменениях δ напряжения k_{eq}^{Ext} увеличились уже в 19,9 раз. Для варианта нагружения усилием F_X из табл. 4 видно, что при $\rho_0=2$ и изменении δ от 0 до 4 наибольшие напряжения k_{eq}^{Ext} в точке $\theta = \pi/2$ увеличились в 1,5 раза. А из табл. 3 видно, что при $\rho_0=0,4$ и тех же изменениях δ напряжения k_{eq}^{Ext} увеличились уже в 4,2 раза. Таким образом, влияние деформации поперечного сдвига особенно существенно при малых площадках жестких шайб.

Достоверность полученных результатов. Все вычисления проводились в среде пакета Maple. Точность вычислений можно регулировать, задавая значение системной переменной *Digits*, которая здесь принималась *Digits* = 15.

Проверялась точность удовлетворения заданных граничных условий в точках контура. Так, для случаев, представленных в табл. 1, при численной реализации абсолютная погрешность выполнения граничных условий не превышала 10^{-9} ; при этом максимальное значение напряжений не превышало 220. В случаях, представленных в табл. 2 соответственно – 10^{-12} , при этом максимальное значение напряжений не превышало 2,2 (чем, по-видимому, и объясняется большая точность).

Проверялась точность выполнения исходных дифференциальных уравнений (1) с неизвестными коэффициентами и с коэффициентами, определёнными после решения системы. Абсолютная погрешность не превышала 10^{-9} и соответственно – 10^{-10} .

После решения системы вычислялись составляющие главного вектора и главного момента, определяемые как интегралы в соответствии с [2]. (Например:

$$B_z = \rho^2 \int_0^{2\pi} S_{r\theta} d\theta \text{ и т.д.). Получено хорошее совпадение с заданными компонентами:}$$

абсолютная погрешность не превышала 10^{-9} . При этом максимальное значение не превышало 20π .

Для сравнения были проведены расчёты при $\delta = 1$ и при $\delta = 1 \pm 10^{-12}$, т.е. близких к 1. Получено совпадение результатов, но полученных по разным формулам (для $\delta < 1$, $\delta = 1$ и $\delta > 1$).

Проведено сравнение с результатами работы [11] для аналогичной задачи при нагружении усилием F_z , полученных несколько иным способом. Получено полное совпадение результатов. (Например, для эквивалентных напряжений k_{eq}^{Ext} из табл. 2 с табл. 4 из [11] при $\rho_0 = 3$, $\delta = 0, 1, 2, 3, 4$.)

Для сравнения с результатами других авторов для изотропной сферической оболочки с одним жёстким включением были проведены расчёты при $\delta = 10^{-12}$, т.е. близких к 0. При сравнении с [3] было получено хорошее совпадение результатов: от 0,6 % до 4,8 % (для $\nu=0,25$). При расчётах с весьма малыми относительными радиусами жёстких включений ($\rho_0 = 0,02$) наблюдалось, что в рассмотренном здесь случае (с приложенной к шайбе нагрузкой) напряжённое состояние весьма близко приближается к случаю сосредоточенной силы, рассчитанному согласно [12].

Выводы. Таким образом, численные исследования для трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговыми жёстким включением, нагруженным усилиями, показали, что при увеличении параметра поперечного сдвига материала оболочки и уменьшении радиуса жёсткого включения относительные эквивалентные напряжения возрастают и могут увеличиться в несколько раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гузь А.Н. Сферические днища, ослабленные отверстиями / А.Н. Гузь, И.С.Чернышенко, К.И. Шнеренко – Киев: Наук. думка, 1970. – 323 с.
2. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал. Н. Чехов [и др.]. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. – Т. 1).
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т. / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.
4. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью / Б.Л. Пелех – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.
5. Пелех Б.Л. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках / Б.Л. Пелех, А.А. Сяский. – К.: Наук. думка, 1975. – 198 с.
6. Chekhov V.N. Stress concentration in a transversely isotropic spherical shell with two circular rigid inclusions / V.N. Chekhov, S.V. Zakora // Int. Appl. Mech. – 2011. – Vol. 47, No. 4. – P. 441–448.
7. Shevchenko V.P. Stresses in a Spherical Shell Loaded Through Rigid Inclusions / V.P. Shevchenko, S.V. Zakora // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51, No. 2 – P. 159–166.
8. Khizhnyak V.K. Stress-deformed state of transversally isotropic shells under concentrated loads / V.K. Khizhnyak, V.P. Shevchenko // Soviet Appl. Mech. – 1972. – Vol. 8, № 11 – P. 1188–1193.

9. Maksimyyuk V.A. Nonlinear deformation of thin isotropic and orthotropic shells of revolution with reinforced holes and rigid inclusions / V.A. Maksimyyuk, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech.–2013, - Vol. 49, No 6. – P. 685-692.
10. Maksimyyuk V.A. Variational-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V.A. Maksimyyuk, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech.–2012, - Vol. 48, No 6. – P. 613-687.
11. Чехов В. Н. Концентрация напряжений в трансверсально-изотропной сферической оболочке с жестким круговым включением, нагруженным нормальной силой / В. Н. Чехов, С. В. Загора // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017.– № 2(59) С. 27-39 .
12. Shevchenko V. P. On the solution of static problems for shallow shells under the actions of local loads / V. P. Shevchenko // Int. Appl. Mech. – 1971. – Vol. 7, No 6. – P. 612–616.

Поступила в редакцию 01.11.2018 г.

ON INFLUENCE OF THE TRANSVERSE SHEAR ON THE STRESS STATE IN A SPHERICAL SHELL WITH A RIGID INCLUSION LOADED BY EFFORTS.

V.N. Chekhov, S.V. Zakora

The application of many-valued analytic solutions in the framework of S.Timoshenko type theory made it possible to obtain a refined analytical solution to the problem of the stress state in the shallow spherical shell with a circular rigid inclusion loaded by tangential or transverse efforts. As a result of numerical studies, it has been established that for these loading options, as the parameter of the transverse shear of the shell material increases and the radius of the rigid inclusion decreases, the relative stresses increase several times. It was also found that the effect of the transverse shear is particularly important for relatively small areas of rigid inclusions.

Keywords: analytical solution, S.Timoshenko type theory, shallow spherical shell, transversal-isotropic material, rigid inclusion, transverse shear deformation, tangential and transverse efforts.

Чехов Валерий Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор;
Таврическая Академия Крымского федерального
университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь.
E-mail: chekhov40@mail.ru
Тел.: +79780622186

Chekhov Valery Nikolayevich

Doctor of Sciences in Physics and Mathematics,
Professor.
V.I. Vernadsky Crimean Federal University,
Simferopol.

Загора Сергей Владимирович

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник;
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”
E-mail: zakorasv3@gmail.com;
Тел.: +380995048807

Zakora Sergey Vladimirovich

Candidate of Sciences in Physics and
Mathematics,
Senior Research Officer;
Donetsk National University, Donetsk.

Ф И З И К А

УДК 004.386,535.8

ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ: КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ ПРОСТРАНСТВА

© 2018. В.А. Гмыря, В.В. Данилов

Исследована структура поля между двумя параллельными плоскостями однородного пространства (слой), при распространении электромагнитной волны, например, оптического диапазона, несущей информацию. Предполагая, что такой слой пространства, обладает свойствами инвариантности, по аналогии с радиоэлектронными инвариантными системами, сделано предположение существования коэффициента передачи и импульсной характеристики пространства.

Ключевые слова: пространство ограниченное параллельными плоскостями (слой пространства), комплексный коэффициент передачи пространства, амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики пространства.

Введение. Известное в радиофизике [1], скалярное волновое уравнение

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

позволяет найти поле в произвольной точке пространства. Получено оно на основе уравнений Максвелла

$$\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t; \quad \text{rot} \vec{H} = -\partial \vec{D} / \partial t, \quad \text{div} \vec{B} = 0.$$

Основными этапами получения уравнения (1) являются следующие. Делается предположение, что среда изотропна и однородна, т.е. $\varepsilon = \vec{D} / \vec{E} = \text{const}$; $\mu = \vec{B} / \vec{H} = \text{const}$. При распространении волн в свободном пространстве – $\text{div} \vec{D} = 0$. Если от обеих частей первого из уравнений (1) взять ротор и воспользоваться известным из векторной алгебры соотношением $\text{rot rot} \vec{E} = \text{grad div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$, а затем учесть, что

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad \text{и} \quad \text{rot} \vec{B} = \mu \text{rot} \vec{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \text{то получим выражение вида} \quad -\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Зная, что скорость распространения волн определяется из соотношения $c = 1 / \sqrt{\varepsilon \mu}$, получим уравнение вида (1). Используя такую же последовательность, можно получить уравнение для напряженности магнитного поля $\vec{H}$, векторного потенциала $\vec{A} = \text{rot}^{-1} \vec{B}$ и скалярного потенциала $\Phi = -\text{grad}^{-1} (\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t)$. При описании вектора через три определяющие его скалярные величины, векторное волновое уравнение распадется на три скалярных волновых уравнения типа уравнения (1). Следовательно, под величиной u в уравнении (1) можно понимать различные компоненты электрического или магнитного поля, векторного потенциала, или скалярного потенциала.

Сделав предположение, что величина u изменяется во времени по гармоническому закону $u = U e^{-i \omega t}$, уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0; \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (2)$$

где U – амплитуда, представляющая собой функцию пространственных координат.

Простыми решениями (1) являются уравнения описывающие однородную плоскую, симметричную сферическую волну. В случае плоской волны решение принимает вид:

$$u = U_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} = U_0 e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad U_0 = \text{const}, \quad (3)$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор; $\vec{r}$ – радиус-вектор, k_x ; k_y ; k_z проекции вектора $\vec{k}$ на оси x ; y ; z , соответственно. В декартовой системе координат, волновое уравнение (2) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0. \quad (4)$$

Используя (3) и (4), найдем $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, причем поверхность равных фаз определим в виде соотношения

$$k_x x + k_y y + k_z z = C = \text{const}, \quad (5)$$

т.е. уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки C/k_x , C/k_y , C/k_z

(рис. 1). Полное выражение для плоской волны имеет вид $u = U_0 e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z) - i\omega t}$.

В момент времени $t = 0$ уравнением волновой поверхности описывается уравнением (5), тогда при $t = t_1$, волновая поверхность будет описываться выражением $k_x x + k_y y + k_z z = C + \omega t_1 = C_1$, представляющим уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях отрезки $(C + \omega t_1)/k_x$; $(C + \omega t_1)/k_y$; $(C + \omega t_1)/k_z$. Такое математическое описание является доказательством того, что с течением времени плоская волновая поверхность перемещается параллельно самой себе. Нормаль к волновой поверхности, определяет направление распространения электромагнитной волны.

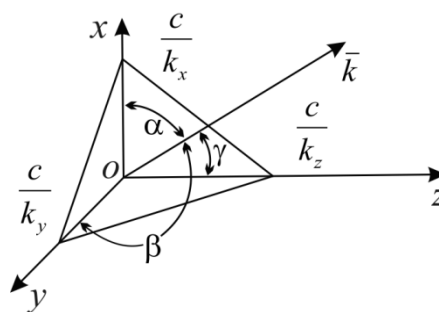


Рис. 1. Плоскость, отсекающая на осях координат отрезки C/k_x , C/k_y , и C/k_z

Структура электромагнитного поля. Введем единичные векторы j_x , j_y и j_z , направленные вдоль осей координат. Рассматривая C как функцию x ; y ; z и найдем $\text{grad } C = j_x \frac{\partial C}{\partial x} + j_y \frac{\partial C}{\partial y} + j_z \frac{\partial C}{\partial z}$. Однако, $\partial C / \partial x = k_x$, $\partial C / \partial y = k_y$, $\partial C / \partial z = k_z$, тогда, $\text{grad } C = j_x k_x + j_y k_y + j_z k_z$, откуда видно, что $\text{grad } C = \vec{k}$, т.е. электромагнитная волна при распространении совпадает по направлению с волновым вектором. Углы между вектором $\vec{k}$ и осями координат обозначим через α , β и γ , $\cos \alpha = k_x / k$; $\cos \beta = k_y / k$; $\cos \gamma = k_z / k$; и $\vec{k} = (j_x \cos \alpha + j_y \cos \beta + j_z \cos \gamma) k$. Тогда, для описания плоской волны получаем выражение вида:

$$U = U_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}, \quad (6)$$

учитывая, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (7)$$

Для параксиальных волн, направление распространения близко к направлению оси z , т. е. когда угол γ мал, а углы α и β близки к $\pi/2$. Если обозначить $\alpha_1 = \pi/2 - \alpha$; $\beta_1 = \pi/2 - \beta$ то $\cos \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha_1) = \sin(\alpha_1)$; $\cos \beta = \sin(\beta_1)$. При малости углов α и γ , $\cos \alpha \approx \alpha_1$, $\cos \beta \approx \beta_1$, $\cos \gamma = 1$, тогда выражение (6) для плоской волны принимает вид $U = U_0 e^{ik(\alpha_1 x + \beta_1 y + z)}$ или

$$U = U_0 e^{ikz} e^{ik\alpha_1 x + ik\beta_1 y}. \quad (8)$$

То, что волна распространяется вдоль оси z , указывает множитель e^{ikz} , при этом запаздывание определяется временем $t_a = (k/\omega)z$, множитель $e^{ik\alpha_1 x + ik\beta_1 y}$ показывает распределение комплексной амплитуды поля в плоскости, перпендикулярной оси z .

В соответствии с выражением (7) направление распространения электромагнитной волны определяется двумя углами. Находя их, направим вектор $\vec{k}$ на плоскости xoz и yoz (рис. 2). Направление распространения волн определяют углами между проекциями вектора $\vec{k}$ (μ_x и μ_y) и осью z . Так как проекции вектора $\vec{k}$ на плоскости xoz и yoz равны $\sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ и $\sqrt{k_y^2 + k_z^2}$, то

$$\sin \mu_x = k_x / \sqrt{k_x^2 + k_z^2}; \quad \sin \mu_y = k_y / \sqrt{k_y^2 + k_z^2}.$$

В параксиальном приближении $k_x \ll k_z$, $k_y \ll k_z$, $k_z \approx k$, откуда: $\sin \mu_x \approx k_x/k = \cos \alpha = \sin \alpha_1$, $\sin \mu_y \approx k_y/k = \cos \beta = \sin \beta_1$, что дает $\mu_x \approx \alpha_1$; $\mu_y \approx \beta_1$. Следовательно, можно считать, что в выражении (8) α_1 и β_1 , углы между осью z и проекциями волнового вектора на плоскости xoz и yoz .

Когда волновой фронт (частный случай) параллелен оси y , угол $\beta_1 = 0$ и в этом случае, для плоской волны получаем выражение вида $U = U_0 e^{ikz} e^{ik\alpha_1 x}$, а волна распространяется под углом α_1 к оси z .

При распределении поля в плоскости, перпендикулярной оси z , множитель $U = U_0 e^{ikz}$ опускают и в этом случае $U = e^{i(k\alpha_1 x + k\beta_1 y)}$. При значении $\beta_1 = 0$, $U = e^{ik\alpha_1 x}$. В радиоэлектронике, таким образом, описывают гармонические колебания, где роль временной координаты играет пространственная координата x , а роль частоты - пространственная частота $k\alpha_1$. Откуда, введя радиоэлектронные аналогии в оптике, предлагается плоскую волну вида $U = e^{ik(\alpha_1 x + \beta_1 y)}$ рассматривать как на двумерное гармоническое колебание с пространственными частотами $k\alpha_1$ и $k\beta_1$.

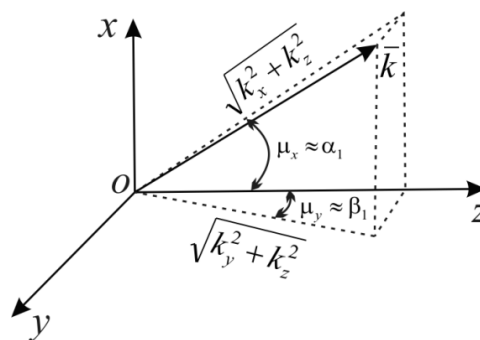


Рис. 2. Проекции вектора $\vec{k}$ на плоскости координат

Использование переменных r , θ и φ (рис. 3), в форме $x = r \sin \theta \cos \varphi$; $y = r \sin \theta \sin \varphi$; $z = r \cos \theta$, позволяет получить волновое уравнение в сферической системе координат

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = 0.$$

(9)

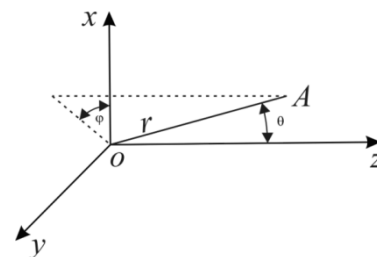


Рис. 3. Сферическая система координат

Поле волны, с круговой симметрией, не зависит от углов θ и φ . Сделав предположение, что $\partial U / \partial \theta = 0$ и

$\partial U / \partial \varphi = 0$, из (9) можно получить выражение вида $\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + k^2(rU) = 0$, откуда расходящаяся сферическая волна может быть представлена в виде $rU = ae^{ikr}$ или

$$U = a(e^{ikr} / r), \quad (10)$$

где a – постоянная.

Выражение $kr = \text{const}$, описывает поверхность равных фаз следовательно, выражение $r = \text{const}$ говорит о том, что данная поверхность сферическая. Направление распространения электромагнитной волны определяется вектором $\text{grad } C(x, y, z) = \text{grad}(kr) = k \text{ grad } r$. Учитывая, что $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, можно записать предыдущее выражение в виде:

$$k \text{ grad } r = \frac{k}{r} (xj_x + yj_y + zj_z) = \frac{k}{r} \vec{r}.$$

т. е. получили математическое описание того факта что волна распространяется вдоль радиуса-вектора $\vec{r}$. Сделав подстановку в (10) значения радиус-вектора $\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, получаем $U = a e^{ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Исходя из приведенного рассмотрения, можно прийти к выводу, что параксиальное приближение может иметь место в случае, когда z велико, а x и y малы, т.е. выполняется условия

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \approx z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z},$$

тогда справедливо выражение:

$$U \approx \frac{a}{z} e^{ikz} e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2z}}. \quad (11)$$

В выражении (11) множитель a/z показывает, что амплитуда поля симметричной сферической волны обратно пропорциональна расстоянию z , множитель e^{ikz} характеризует запаздывание волны во времени. Выражение $\exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)$, описывает распределение поля в плоскости, перпендикулярной оси z . Учитывая, что x и y малы, принимаем, что z приблизительно равно радиусу сферической волны r . Если распределение поля вдоль оси z не представляет интереса, то можно записать

$$U = a_1 e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2z}}. \quad (12)$$

В выражении (12) показана зависимость амплитуды поля только от координат x и y . Это выражение можно представить в форме $U = a_1 e^{i\varphi}$, причем $a_1 = \text{const}$, $\varphi = k(x^2 + y^2)/(2z)$. При $y = 0$, $\varphi = kx^2/(2z)$, и в зависимости от координаты x , фаза будет изменяться по квадратичному закону. При этом пространственная частота будет изменяться по линейному закону $\Omega = d\varphi/dt = kx/z$. Таким образом, сферическую волну, описываемую выражением (12), можно рассматривать тоже как двумерное колебание с постоянной амплитудой, однако с линейной частотной модуляцией.

Коэффициент передачи пространства. Рассмотрим процесс преобразования электромагнитной волны пространством между двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии z друг от друга. Будем искать общее решение волнового уравнения (4) при условии, что поле в плоскости xoy , известно. Будем предполагать, что в плоскостях I и II размещаются транспаранты, линзы, диафрагмы и т. п. В соответствии с поставленной задачей, поле на выходе одного оптического элемента в плоскости I известно. Необходимо определить поле на входе следующего элемента, помещенного в плоскости II . Следовательно, пространство, заключенное между двумя параллельными плоскостями, следуя вводимым радиоэлектронным аналогиям в оптике [2], может рассматриваться как четырехполюсник, имеющий вход и выход. Входное воздействие будет описываться функцией $U(x, y, 0)$, а реакция, соответственно, $U(x, y, z)$. Переменная z рассматривается как параметр, характеризующий слой пространства.

В качестве решения (4) воспользуемся двумерным преобразованием Фурье [3]. Прямое преобразование Фурье функции $U(x, y, z)$, дает двумерную спектральную плотность, зависящую от двух частот ω_1 и ω_2 ,

$$G(\omega_1, \omega_2, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy. \quad (13)$$

Реализовав обратное преобразование Фурье, найдем по известной спектральной плотности функцию координат

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_1, \omega_2, z) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2. \quad (14)$$

Для практического использования этих преобразований, умножим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 U(x, y, z) = 0,$$

на $e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)}$ и проинтегрируем по x и y в бесконечных пределах. Произведем вычисления интеграла $I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy$. Представив его в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2 y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 x} d \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \right) dy, \text{ и используем формулу интегрирования по частям:}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2 y} (e^{-i\omega_2 y} (e^{-i\omega_1 x} \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x})|_{-\infty}^{\infty} + i\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 x} \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} dy).$$

Сделав допущение, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = 0$, тогда

$$I = i\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2 y} (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 x} \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} dx) dy = i\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2 y} (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 x} dU(x, y, z)) dy.$$

Интегрируя еще раз по частям, получаем

$$I = i\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2 y} (e^{-i\omega_1 x} U(x, y, z))|_{x=-\infty}^{\infty} + i\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 x} U(x, y, z) dx dy.$$

Пусть $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, y, z) = \lim_{x \rightarrow -\infty} U(x, y, z) = 0$, а также учитывая формулу (13), можно получить, что $I = -i\omega_1^2 G(\omega_1, \omega_2, z)$. Можно показать [4, 5], что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy = -\omega_2^2 G(\omega_1, \omega_2, z),$$

тогда волновое уравнение можно представить в виде выражения:

$$-\omega_1^2 G(\omega_1, \omega_2, z) - \omega_2^2 G(\omega_1, \omega_2, z) + \frac{d^2 G(\omega_1, \omega_2, z)}{dz^2} + k^2 G(\omega_1, \omega_2, z) = 0,$$

или

$$\frac{d^2 G(\omega_1, \omega_2, z)}{dz^2} + (k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) G(\omega_1, \omega_2, z) = 0.$$

Представленная спектральная плотность от параметра z , это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, его решением является выражение

$$G(\omega_1, \omega_2, z) = C_1(\omega_1, \omega_2) e^{i\sqrt{k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2} z} + C_2(\omega_1, \omega_2) e^{-i\sqrt{k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2} z}, \quad (15)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, не зависящие от z , тем не менее, могут зависеть от частот ω_1 и ω_2 , которые определяются из граничных условий.

В выражении (15), первый компонент описывает прямую волну, а второй, обратную. При распространении волны в однородной среде, второй член равен нулю, т.е. $C_2 = 0$ и

$$G(\omega_1, \omega_2, z) = C_1(\omega_1, \omega_2, 0) e^{i\sqrt{k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2} z}. \quad (16)$$

Найдем постоянную $C_1(\omega_1, \omega_2)$. Известно поле при $z = 0$, т. е. функция $U(x, y, 0)$, а следовательно и ее двумерная спектральная плотность равна $G(\omega_1, \omega_2, 0)$. Из выражения (16) при $z = 0$ находим $C_1(\omega_1, \omega_2) = G(\omega_1, \omega_2, 0)$. Следовательно,

$$G(\omega_1, \omega_2, z) = G(\omega_1, \omega_2, 0) e^{i\sqrt{k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2} z} \quad (17)$$

Выражение (17) показывает, что для определения спектральной плотности выходного сигнала $G(\omega_1, \omega_2, z)$ нужно спектральную плотность входного сигнала $G(\omega_1, \omega_2, 0)$ умножить на функцию двух частот:

$$K(\omega_1, \omega_2) = e^{i\sqrt{k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2}z}. \quad (18)$$

Выражение (18) в радиоэлектронике имеет смысл комплексного коэффициента передачи четырехполюсника. Тогда следуя радиоэлектронным аналогиям в оптике, пространство, заключенное между двумя параллельными плоскостями (слой пространства) ведет себя как четырехполюсник (в частности, фильтр) с коэффициентом передачи, определяемым формулой (18), что показано на рис. 4. Применяя к формуле (17) обратное преобразование Фурье (14), получаем выходной сигнал

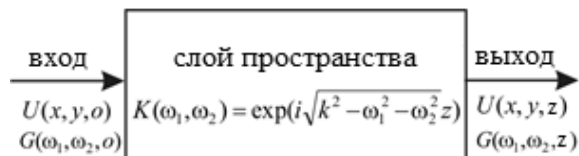


Рис. 4. Слой пространства как пространственно-инвариантная система

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_1, \omega_2, 0) e^{i\sqrt{k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2}z} \times e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2.$$

Итак, для нахождения поля в произвольной точке x, y, z по заданному его распределению в плоскости $z = 0$, необходимо, сначала, определить двумерную спектральную плотность заданного поля, потом, умножить ее на коэффициент передачи слоя пространства, определяемый выражением (18), и далее, от полученной функции взять обратное преобразование Фурье.

Таким образом, можно утверждать справедливость вводимого принципа радиоэлектронных аналогий в оптике, что доказывает существующий порядок рассмотрения расчета реакции на выходе частотного фильтра в радиоэлектронике [4].

Формула (18), показывает, что ограниченное пространство двумя параллельными плоскостями имеет комплексный коэффициент передачи, который может быть представлен в виде $K(\omega_1, \omega_2) = |K(\omega_1, \omega_2)| e^{i\varphi(\omega_1, \omega_2)}$, где $|K(\omega_1, \omega_2)|$ – амплитудно-частотная, а $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ – фазо-частотная характеристики.

Анализируя область частот $\omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2$ видно, что это круг радиуса k , $|K(\omega_1, \omega_2)| = 1$, $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 0$, $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, а в области частот, лежащей вне этого круга, $K(\omega_1, \omega_2) = e^{-i\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - k^2}z}$, $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 0$ (рис. 5). Из рисунка видно, что при

$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq k$ модуль коэффициента передачи постоянен, а при $\Omega > k$ он убывает по закону $e^{-\sqrt{\Omega^2 - k^2}z}$. Таким образом, пространство между двумя параллельными плоскостями, ведет себя как в радиоэлектронике фильтр нижних частот с полосой пропускания Ω_c равной волновому числу $k_c = 2\pi/\lambda_c$. Соотнесем Ω_c – пространственную частоту с $\Lambda_c = 2\pi/\Omega_c$ – длиной волны. Ясно, что $\Lambda_c = \lambda$. Если в

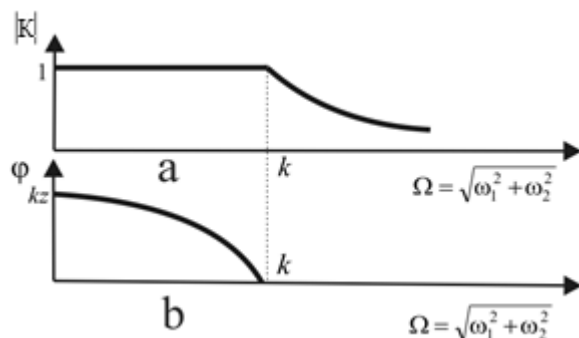


Рис. 5. Характеристики слоя пространства: а - амплитудно-частотная; б - фазо-частотная.

полосе пропускания пространственная частота распределения поля $\Omega < k$ то длина волны Λ , соответствующая Ω , не меньше λ . Пространственные гармонические состав-

ляющие распределения поля в плоскости $z = 0$ с длинами волн $\Lambda < \lambda$ попадают в полосу непропускания слоя пространства и при распространении электромагнитной волны с увеличением z быстро затухают. Показанное явление проявляется при достаточно больших длинах волн λ и очень мелкой структуре поля в плоскости $z = 0$. В диапазоне оптических колебаний даже наименьший размер неоднородности поля в плоскости $z = 0$ значительно больше длины волны λ , откуда следует, что рассмотренное явление можно не учитывать.

Импульсная характеристика пространства. В радиоэлектронике известно [4], что часто удобнее пользоваться не коэффициентом передачи, а импульсной характеристикой. Покажем, что в оптических информационных технологиях, существует импульсная характеристика пространства и она также имеет связь с коэффициентом передачи пространства посредством обратного преобразования Фурье

$$h(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k^2-\omega_1^2-\omega_2^2}z} e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2. \quad (19)$$

Если известно поле сферической волны в произвольной точке пространства, в виде: $U(x, y, z) = e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} / \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, то в плоскости $z = 0$, его можно представить выражением $U(x, y, 0) = e^{-ik\sqrt{x^2+y^2}} / \sqrt{x^2+y^2}$. При спектральной плотности этой функции $G(\omega_1, \omega_2, 0)$, спектральная плотность $U(x, y, z) = e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} / \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ будет $G(\omega_1, \omega_2, 0)e^{i\sqrt{k^2-\omega_1^2-\omega_2^2}z}$. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получаем

$$\frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} G(\omega_1, \omega_2, 0) e^{i\sqrt{k^2-\omega_1^2-\omega_2^2}z} e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2,$$

где

$$G(\omega_1, \omega_2, 0) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy.$$

Используя полярную систему координат, вычислим интеграл

$$G(\omega_1, \omega_2, 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} e^{-i\varphi\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\cos(\varphi-\psi)} \rho d\rho d\psi.$$

Определим переменную ψ из равенства $\cos\psi = \omega_1 / \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. Учитывая, что

$$\Omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad G(\Omega, 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\rho[k-\Omega\cos(\varphi-\psi)]} d\rho d\varphi. \quad \text{Найдем значение внутреннего ин-}$$

теграла, в предположении, что $\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{i\rho[k-\theta\cos(\varphi-\psi)]} = 0$ (следствие допущения, что

поле на бесконечности равно нулю). С точки зрения математики предполагается, что волновое число k содержит небольшую мнимую часть: $k \rightarrow k + i\alpha$, причем α очень

мало. Проведя интегрирование, получим $G(\Omega, 0) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{i[k - \Omega\cos(\varphi - \psi)]}$. Обозначим

$\varphi - \psi = \xi$. Тогда $G(\Omega, 0) = \int_{-\psi}^{2\pi-\psi} \frac{d\xi}{k - \Omega \cos \xi}$. Видно, что подынтегральное выражение

является периодической функцией ξ с периодом 2π . В соответствии с тем, что интегрирование ведется по промежутку, равному периоду изменения подынтегральной функции, значение интеграла не должно зависеть от ψ . Тогда интегрируем в пределах

от $-\pi$ до π : $G(\Omega, 0) = i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\xi}{k - \Omega \cos \xi} = 2i \int_0^{\pi} \frac{d\xi}{k - \Omega \cos \xi}$. Сделав замену $\cos \xi$ через $2 \cos^2 \frac{\xi}{2} - 1$, получим

$$G(\Omega, 0) = 2i \int_0^{\pi} \frac{d\xi}{k + \Omega - 2\Omega \cos^2 \frac{\xi}{2}} = 4i \int_0^{\pi} \frac{d \frac{\xi}{2}}{\cos^2 \frac{\xi}{2} \left(\frac{k + \Omega}{\cos^2 \frac{\xi}{2}} - 2\Omega \right)}.$$

Учитывая, что $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$; $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, тогда справедливо выражение

$$G(\Omega, 0) = 4i \int_0^{\pi} \frac{d \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}}{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2})(k + \Omega - 2\Omega)} = 4i \int_0^{\pi} \frac{d \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}}{k - \Omega + (k + \Omega) \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2}}.$$

Введем обозначение $\sqrt{\frac{k + \Omega}{k - \Omega}} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = y$, и сделаем преобразования

$$G(\Omega, 0) = 4i \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{k - \Omega}{k + \Omega}} dy}{k - \Omega + (k + \Omega) \frac{k - \Omega}{k + \Omega} y^2} = 4i \sqrt{\frac{k - \Omega}{k + \Omega}} \cdot \frac{1}{k - \Omega} \int_0^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{4i}{\sqrt{k^2 - \Omega^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} y \Big|_0^{\infty} = \frac{2\pi i}{\sqrt{k^2 - \Omega^2}}.$$

Тогда, $G(\omega_1, \omega_2, 0) = \frac{2\pi i}{\sqrt{k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2}}$, и окончательно получим выражение вида:

$$\frac{e^{-ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{2\pi i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2}z} e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)}}{\sqrt{k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2}} d\omega_1 d\omega_2. \quad (20)$$

Импульсную характеристику пространства ограниченного параллельными плоскостями (19), находят с помощью (20) дифференцируя его по z :

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2}z} e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dy = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dz} \cdot \frac{e^{ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Приняв обозначение вида $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ и сравнивая с (19), находим

$$h(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dz} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Используя интеграл Дюамеля, найдем поле в произвольной точке x, y, z с помощью импульсной характеристики $U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta, 0) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$. Для рассматриваемого случая получим выражение:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta, 0) \frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\xi d\eta$$

Физический смысл импульсной характеристики состоит в том, что она представляет собой поле точечного источника, моделью которого может служить маленькое прямоугольное отверстие в плоском экране с большой интенсивностью поля в отверстии (рис. 6). Т.е., импульсная характеристика, это поле в произвольной точке x, y, z , создаваемое двумерным точечным источником $U(x, y, 0) = \delta(x)\delta(y)$. Таким образом, спектральная плотность в плоскости $z = 0$ определяется в виде:

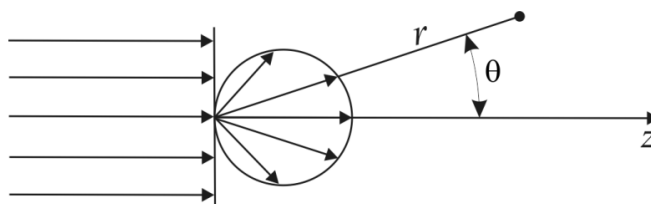


Рис. 6. Поле точечного источника

$$G(\omega_1, \omega_2, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega_1 x} dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) e^{-i\omega_2 y} dy$$

Учитывая, что спектральная плотность одномерной дельта-функции Дирака равна единице, то и $G(\omega_1, \omega_2, 0) = 1$, откуда следует, спектральная плотность на выходе пространства ограниченного параллельными плоскостями (слоя) равна коэффициенту передачи, а поле точечного источника будет равно обратному преобразованию Фурье от коэффициента передачи, т. е. импульсной характеристике.

Выводы. Электромагнитное (ЭМ) поле между двумя параллельными плоскостями однородного пространства (слой пространства), при движении в нем ЭМ волн обладает свойствами инвариантности из чего следует возможность предположить существование математического описания его аналогично принятому в радиоэлектронике, т.е. существование радиоэлектронных аналогий в оптических информационных технологиях.

Следуя радиоэлектронным аналогиям в оптике, пространство, заключенное между двумя параллельными плоскостями (слой пространства) ведет себя как четырехполюсник (в частности, фильтр) с коэффициентом передачи, определяемым формулой (18).

Для нахождения поля в произвольной точке x, y, z по заданному его распределению в плоскости $z = 0$, необходимо, сначала, определить двумерную спектральную плотность заданного поля, потом, умножить ее на коэффициент передачи слоя пространства, определяемый выражением (18), и далее, от полученной функции взять обратное преобразование Фурье.

Физический смысл импульсной характеристики состоит в том, что она представляет собой поле точечного источника, моделью которого может служить маленькое отверстие в плоском экране с большой интенсивностью поля в отверстии (рис. 6).

Поле точечного источника равно обратному преобразованию Фурье от коэффициента передачи, т. е. импульсной характеристике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ярив А. Квантовая электроника. Пер.с англ. / Под ред. Я.И. Ханина. – М.: Сов. Радио, 1980. – 488 с.
2. Киселев Г.Л. Квантовая и оптическая электроника / Г.Л. Киселев. – СПб.: Лань, 2011. – 320 с.
3. Парыгин В.Н. Оптическая обработка информации / В.Н. Парыгин, В.И. Балакший. – Москва: Изд. МГУ, 1987. – 142 с.
4. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники. Том 2. Под ред. Б.Х. Кривицкого. – Москва: Энергия, 1977. – 472 с.
5. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. Перевод с англ., под ред. В. И. Алексеева. – Москва: «Мир», 1971.– 495 с.

Поступила в редакцию 15.10.2018 г.

OPTICAL INFORMATION TECHNOLOGIES: TRANSMISSIVITY OF SPACE

V.A. Gmyrya, V.V. Danilov

The structure of the field between two parallel planes of a homogeneous space (layer) was investigated, with the propagation of an electromagnetic wave, for example, the optical range carrying information.

Assuming that such a layer of space, has the properties of invariance, by analogy with radio-electronic invariant systems, an assumption is made that the transmission coefficient and the impulse characteristic of space exist.

Keywords: space bounded by parallel planes (space layer), complex space transfer coefficient, amplitude-frequency and phase-frequency characteristics of space.

Гмыря Валерия Александровна,
инженер кафедры радиофизики и инфокоммуникационных технологий ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
ул. Университетская 24, Донецк, 83001.
E-mail: radiophysik99@mail.ru

Gmyrya Valery Aleksandrovna,
Engineer at the Department of Radiophysics and Infocommunication Technologies Donetsk National University,
st. University 24, Donetsk, 83001,
E-mail: radiophysik99@mail.ru

Данилов Владимир Васильевич,
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой радиофизики и инфокоммуникационных технологий ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».
E-mail: ut5iv@mail.ru

Danilov Vladimir Vasilyevich,
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Radiophysics and Information and Communication Technologies SEI HPE “Donetsk National University”,
E-mail: ut5iv@mail.ru

УДК 537.611.3+537.622 +538.221+539.216.2

**ИНДУЦИРОВАННЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ДОМЕННЫХ ГРАНИЦАХ
ЖЕСТКОЙ РЕШЕТКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ДОМЕНОВ**

© 2018. Ю.А Сирюк, А.В. Безус, Е.Д. Бондарь, В.В. Смирнов

Изучены индуцируемые магнитным полем фазовые переходы в доменной структуре феррит гранатовой пленки. При изменении магнитного поля происходят фазовые переходы первого рода как в доменной границе, так и в решетке ЦМД. Показано, что полевой интервал устойчивости решетки ЦМД зависит от структуры доменных границ.

Ключевые слова: доменная структура, фазовый переход, вертикальная блоховская линия, доменная граница.

Введение. Проблема устойчивости доменных структур при изменении магнитного поля смещения (H) давно привлекает внимание и экспериментаторов, и теоретиков. Магнитные доменные структуры (ДС) представляют собой периодически чередующиеся области с антипараллельным направлением намагниченности, разделенные доменными границами (ДГ). Так как доменная структура является термодинамической системой, то распределение доменов происходит таким образом, чтобы общая энергия системы была минимальна. Внешнее магнитное поле нарушает магнитное равновесие доменов, под его воздействием область доменов с противоположной полю намагниченностью уменьшается. Если это полосовые домены, то уменьшается их ширина, если цилиндрические магнитные домены (ЦМД) – то диаметр. При определенной величине $H < H_c$ такие домены исчезают, т.е. коллапсируют. Первыми коллапсируют полосовые домены, затем решетка ЦМД, а потом ЦМД.

Аналитическая теория решетки ЦМД развита в работах [1, 2], согласно которым учет поля не изменяет энергию доменных границ и магнитостатическую энергию. В то же время учет поля приводит к необходимости учета энергии взаимодействия намагниченности с магнитным полем. При приближении поля смещения к полю коллапса происходит перестройка доменов, связанная с развитием неустойчивости [2]. При этом должен коллапсировать каждый третий ЦМД и увеличиваться период решетки a . В [3] экспериментально наблюдалась перестройка решетки ЦМД вблизи поля коллапса, связанная с появлением динамической неустойчивости. Было обнаружено, что значения поля, при которых происходит перестройка, отделены друг от друга конечными интервалами, уменьшающимися с ростом периода решетки.

В [4] исследовалось влияние поля смещения на плотность и температурную стабильность решетки ЦМД в широком температурном интервале. Было показано, что при формировании решетки ЦМД в поле смещения возникает термодинамически равновесная решетка, а наложение внешнего поля на сформированную решетку приводит ее в неравновесное состояние. В [5] на основе экспериментальных результатов развита термодинамическая теория, позволяющая описать влияние внешних магнитных полей на фазовые переходы в решетке ЦМД. Теоретически были определены границы устойчивого, неустойчивого и метастабильного состояний решетки ЦМД в магнитных полях.

Но во всех этих работах не учитывалась роль доменных границ в фазовых переходах доменной структуры. В работах [6, 7] изучены спонтанные фазовые

переходы в ДС феррит-гранатовой пленки в температурном интервале от точки компенсации до температуры Нееля. Показано, что при изменении температуры фазовые переходы в доменной границе вызывают фазовые переходы в решетке ЦМД, а температурный интервал устойчивости решетки ЦМД зависит от структуры доменных границ. Таким образом, фазовые переходы в доменной структуре состоят из фазовых переходов в доменной границе и в самих доменах.

Цель настоящей работы – при постоянной температуре исследовать влияние магнитного поля смещения на решетку ЦМД, на домены и на доменные границы.

Это исследование актуально как для фундаментальной физики, так и в прикладном плане, например в микроэлектронике и спинтронике. Процессы, подобные тем, что наблюдаются в феррит-гранатовых пленках, происходят и в других твердых телах: упорядочение и разупорядочение, фазовые переходы и т.д., но, к сожалению, они недоступны для непосредственного наблюдения и изучаются косвенными методами. Преимущество феррит-гранатовых пленок в том, что в них возможна визуализация происходящих процессов благодаря эффекту Фарадея. Эпитаксиальные пленки ферритов-гранатов – это прекрасный модельный объект для изучения механизма фазовых переходов в твердых телах.

Для исследования выбрана пленка с развитой поверхностью $\langle 111 \rangle$, выращенная методом жидкофазной эпитаксии на гадолиний-галлиевой подложке состава $(TmBi)_3(FeGa)_5O_{12}$ ($T_N=437$ К, $T_C=120$ К), где T_N – температура Нееля, T_C – температура магнитной компенсации (рис. 1). Пленка имеет при комнатной температуре фактор качества $Q > 5$. При такой величине фактора качества в доменной границе действием импульсного магнитного поля создаются вертикальные блоховские линии (ВБЛ) [8]. Доменная структура наблюдается благодаря эффекту Фарадея.

Результаты и их обсуждение. Пленка имеет сильную одноосную анизотропию, вследствие чего в широком температурном интервале при $T > T_C$ наблюдается осевая фаза, т.е. создаются ЦМД. Свойства решетки ЦМД зависят от условий формирования. В работе исследуется при $T = 300$ К два вида решеток. Первая – РЦД₁, формируется импульсным магнитным полем, перпендикулярным плоскости пленки, при отсутствии поля смещения; вторая – РЦД₂, формируется импульсным полем в присутствии поля смещения. Затем импульсное поле выключается. Обе решетки являются равновесными, но при наложении поля смещения РЦД₁ оказывается неравновесной, а РЦД₂, формируемая при разных полях смещения, является равновесной. При эксперименте в качестве критерия равновесности применяются два фактора: 1 – решетка сохраняется неограниченное время при сохранении условий формирования; 2 – ее можно вновь создать с теми же параметрами (диаметром ЦМД d и периодом решетки a).

Под действием импульсного магнитного поля создаются жесткие доменные границы с большим количеством ВБЛ. В жестких доменах имеются две силы (сила отталкивания ВБЛ и магнитостатическая сила), которые уравниваются сжимающими силами поверхностного натяжения стенки Блоха. Стенки Блоха и поле

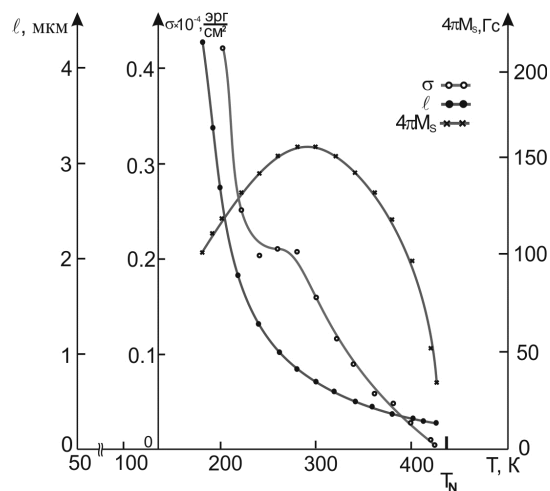


Рис. 1. Температурные зависимости магнитных характеристик пленки.

смещения дают статически устойчивый домен. Из теории [8] следует, что жесткие ЦМД квантуются, т.е. могут иметь дискретные состояния, различающиеся числом ВБЛ. Следовательно, квантуются и доменные границы. Обнаружено, что для типичных гранатовых пленок разница в размерах доменов с различными состояниями порядка 0.1 мкм или меньше. Поэтому из-за таких малых размеров не было обнаружено убедительных экспериментальных результатов квантования статических характеристик жестких доменов. В нашем эксперименте жесткие домены составляют решетку ЦМД, где действуют дипольные силы. В решетке ЦМД, как в любой термодинамической системе, происходит перераспределение сил таким образом, чтобы был минимум энергии. Поэтому в доменных границах ЦМД, составляющих решетку, импульсным магнитным полем хотя и формируется большое число ВБЛ, но, тем не менее, их количество меньше, чем в одиночных доменах.

Влияние внешнего магнитного поля на РЦД₁. При $T = 300\text{ K}$ и $H = 0$ создана решетка ЦМД (рис. 2 а). При формировании РЦД₁ импульсное поле создает такое количество ЦМД, при котором общая энергия решетки оказывается минимальной.

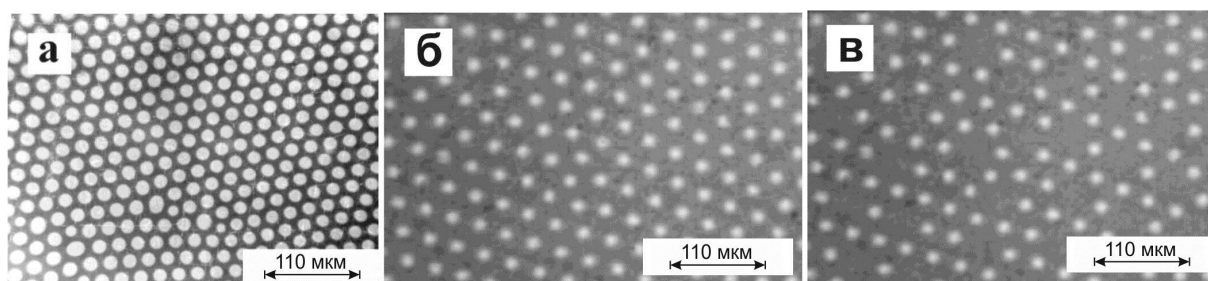


Рис. 2. Виды ДС пленки при различных магнитных полях: а– РЦД ($H=0$), б– $H>0$, в– $H=H_K$.

Плотность упаковки такой решетки $y = d/a = 0.74$ [9, 10]. При наложении поля смещения к магнитостатической энергии решетки добавляется зеемановская энергия, плотность которой различна внутри и вне домена, что приводит к изменению диаметра ЦМД. Но эти энергии не могут изменить количества ЦМД, поэтому период РЦД₁ остается постоянным при наложении поля смещения. Учитывая силы, действующие на доменную границу и температурные зависимости характеристик пленки (см. рис. 1), при температуре 300 K создается максимальное (N_0) число ВБЛ в доменной границе, в относительных единицах $N/N_0 = 1$. С увеличением поля смещения H диаметр ЦМД уменьшается, а период РЦД остается постоянным (рис. 2 б, рис. 3, кривые 1, 2). При $H = H_{C1}$ наблюдается коллапс РЦД₁, при котором исчезает каждый центральный домен гексагональной упаковки (рис. 2 в, рис. 4, т. С₁). Т.е. происходит фазовый переход первого рода в решетке ЦМД. Нарушается магнитное равновесие системы. При этом в доменной границе ЦМД резко уменьшается количество ВБЛ (рис. 4, отрезок С₁В). При кратковременном действии импульсного магнитного поля восстанавливается плотно гексагональная решетка ЦМД с меньшей плотностью упаковки y , с меньшим диаметром

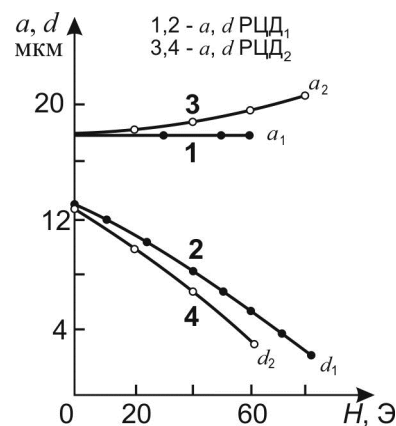


Рис. 3. Полевые зависимости периода РЦД (a) и диаметра ЦМД (d):
1, 2– РЦД формируется при $H=0$;
3, 4– РЦД формируется при $H \neq 0$.

домена и большим периодом a . Параметры этой решетки соответствуют параметрам РЦД₂ при значении поля $H = H_{C1}$ (рис. 3, кривые 3, 4).

Экспериментально наблюдается процесс последовательного коллапсирования решеток при увеличении магнитного поля смещения до $H = H_{C3} = H_{KЦМД}$ (рис. 4, рис. 3).

Из рис.4 видно, что значения полей, при которых происходит перестройка, отделены друг от друга конечными интервалами, уменьшающимися с ростом периода решетки ($DC_3 < BC_2 < AC_1$). Есть предельная, максимальная величина периода, при которой решетка может существовать в поле $H \leq H_C$ РЦД₂, т.е. $a \leq a_{CРЦД_2}$. Таким образом, как

процесс формирования РЦД₂ в поле $H \leq H_{C3}$, так и наблюдение последовательного коллапсирования решеток, полученных из исходной РЦД₁, приводит к одинаковому выводу: есть предельный, максимальный период, при котором еще может существовать решетка ЦМД, т.е. при котором еще силы дипольного взаимодействия удерживают систему в динамическом равновесии. Это хорошо иллюстрирует рис. 5. РЦД₁, сформированная при $H = 0$, неравновесна, но динамически устойчива в интервале поля $0 \leq H < H_{C1}$. В доменной границе ЦМД содержится максимальное число ВБЛ ($N/N_0 = 1$). При $H = H_{C1}$ динамическая устойчивость нарушается. В РЦД₁ происходит фазовый переход первого рода. При этом уменьшается диаметр ЦМД. Длина окружности ЦМД представляет собой граничное условие, которое заставляет линии Блоха сближаться до интервала $S = \pi d/2N$, где d – диаметр ЦМД, N – число оборотов спинов, $2N$ – число ВБЛ. В итоге при $H = H_{C1}$ происходит резкое уменьшение количества ВБЛ в доменной границе

путем аннигиляции, т.е. квантуется как сам домен, так и его доменная граница, что и было теоретически предсказано. В доменной границе происходит фазовый переход первого рода. На рис. 5 этот переход отмечен отрезком C_1B . Точка В лежит на кривой 2. Кривая 2 показывает полеую зависимость числа ВБЛ решетки РЦД₂, которая является равновесной. Таких переходов при увеличении поля наблюдается несколько.

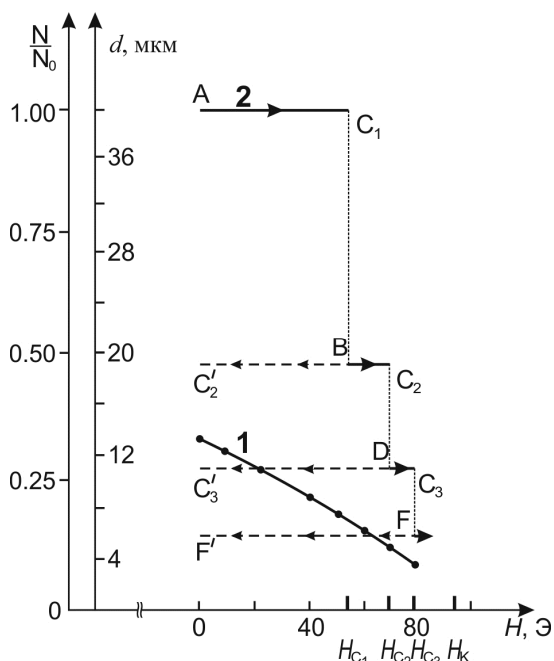


Рис. 4. Полевые зависимости параметров пленки при $T = \text{const}$:

1 – диаметр ЦМД равновесной РЦД₂;
2 – относительное число ВБЛ (N/N_0) в доменной границе неравновесной РЦД₁.

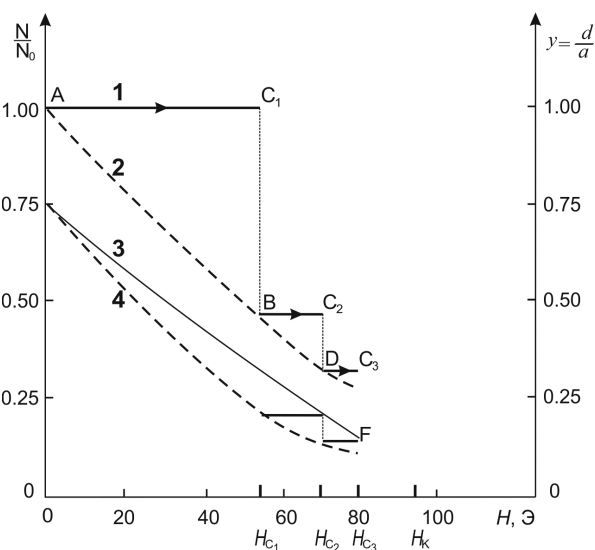


Рис. 5. Полевые зависимости пленки: 1 – (N/N_0) РЦД₁;
2 – (N/N_0) РЦД₂; 3 – (y) РЦД₁; 4 – (y) РЦД₂.

При всех фазовых переходах в решетках типа РЦД₁, ее доменах и доменных границах предельное значение периода решетки, диаметра домена d и числа ВБЛ в доменной границе определяются соответствующими величинами равновесной решетки РЦД₂. Кривые 3 и 4 на рис. 5 показывают полевые зависимости плотности упаковки неравновесной РЦД₁ и равновесной РЦД₂.

Экспериментально было обнаружено, что при изменении поля смещения исходная решетка РЦД₁ может существовать в интервале поля $0 \leq H < H_{C1}$ (рис. 4, отрезок АС₁), полученная при H_{C1} решетка сохраняется в интервале $0 < H < H_{C2}$ (рис. 4, отрезок С₂С₂[']) и, наконец, решетка, полученная при $H = H_{C2}$, может сохраняться в интервале поля $0 < H < H_{C3}$ (рис. 4, отрезок С₃С₃[']). Таким образом, полевой интервал динамической устойчивости решетки увеличивается с уменьшением числа ВБЛ в доменных границах ЦМД. При $H < H_K$ коллапса домен имеет простую блоховскую стенку. Решетка, созданная из таких доменов, сохраняется в максимальном полевом интервале (рис. 6).

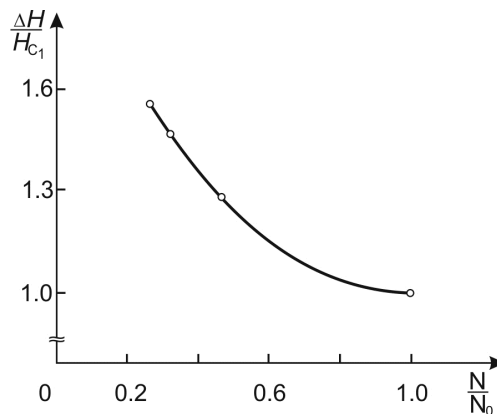


Рис. 6. Зависимость полевого интервала устойчивости РЦД₁ от количества ВБЛ в доменной границе пленки

Выводы. Изучено влияние магнитного поля на доменную структуру: решетку ЦМД, домен и доменную границу. Исследовано два вида решеток: неравновесной РЦД₁ и равновесной РЦД₂.

Экспериментально обнаружено, что при увеличении магнитного поля наблюдается процесс последовательных фазовых переходов в РЦД₁, в домене и доменной границе. При фазовом переходе в решетке исчезает каждый центральный домен в гексагональной упаковке, диаметр оставшихся доменов уменьшается, а период решетки увеличивается. Фазовый переход в границе ЦМД происходит путем аннигиляции ВБЛ. Параметры неравновесной РЦД₁ приобретают значения, равные параметрам равновесной РЦД₂ при данной величине поля смещения.

Значения полей, при которых происходят переходы, отделены друг от друга конечными интервалами, уменьшающимися с ростом периода решетки.

Полевой интервал динамической устойчивости решетки увеличивается с уменьшением количества ВБЛ в доменных границах ЦМД. При поле, близком к полю коллапса ЦМД, домен имеет простую блоховскую стенку. Решетка, созданная из таких доменов, сохраняется в максимальном полевом интервале.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барьяхтар В.Г. Теория цилиндрической доменной структуры в тонких ферромагнитных пленках / В.Г. Барьяхтар, В.В. Ганн, Ю.И. Горобец // Журнал технической физики. – 1975. – Т. 45, № 2. – С. 386-395.
2. Барьяхтар В.Г. Волны в решетке цилиндрических доменов / В.Г. Барьяхтар, В.В. Ганн, Ю.И. Горобец // Физика твердого тела. – 1976. – Т. 18, № 7. – С. 1990-1995.
3. Динамическая перестройка решетки цилиндрических магнитных доменов / В.Г. Барьяхтар, Ю.И. Горобец, О.В. Ильчишин, Н.В. Петров // Физика твердого тела. – 1977. – Т. 24, № 9. – С. 1829-1830.
4. Мамалуй Ю.А. Влияние магнитного поля на фазовые переходы в гексагональных решетках ЦМД. Препринт / Ю.А. Мамалуй, Ю.А. Сирюк. – Донецк: ДонФТИ АН УССР, 1986. – 38 с.
5. Заблоцкий В.А. Фазовые превращения в решетках цилиндрических магнитных доменов. Препринт / В.А. Заблоцкий, Ю.А. Мамалуй, Ю.А. Сирюк. – Д.: ДонФТИ АН УССР, 1989. – 33 с.

6. Сирюк Ю.А. Спонтанные фазовые переходы в феррит-гранатовых пленках / Ю.А. Сирюк, А.В. Безус // Физика твердого тела. – 2013. – Т. 55, № 3. – С. 547-551.
7. Температурная стабильность решеток ЦМД в одноосной феррит-гранатовой пленке / Ю.А. Сирюк, А.В. Безус, Е.Д. Бондарь, В.В. Смирнов // Физика и техника высоких давлений. – 2017. – Т. 27, № 4. – С. 110-115.
8. Малоземов А. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами / А. Малоземов, Дж. Слонзуски. – М.: Мир, 1982. – 384 с.
9. Мамалуй Ю.А. Решетки цилиндрических магнитных доменов вблизи точки компенсации / Ю.А. Мамалуй, Ю.А. Сирюк, А.В. Безус // Физика твердого тела. – 2003. – Т. 45, № 9. – С. 1645-1652.
10. Мамалуй Ю.А. Фазовые переходы в гексагональных решетках ЦМД. Препринт / Ю.А. Мамалуй, Ю.А. Сирюк. – Д.: ДонФТИ АН УССР, 1986. – 43 с.

Поступила в редакцию 25.06.2018 г.

INDUCED PHASE TRANSITIONS IN DOMAIN WALLS OF HARD LATTICE OF THE CYLINDRICAL MAGNETIC DOMAINS

Ju.A. Siryuk, A.V. Bezus, E.D. Bondar, V.V. Smirnov

The phase transitions induced by magnetic field in a domain structure of ferrite-garnet film have been studied. The first-order phase transitions occur both in a domain wall and in a bubble lattice at the change of magnetic field. It shown, the stability interval of bubble lattice in magnetic field depends of the domain wall structure.

Keywords: domain structure, phase transition, vertical Bloch lines, domain boundary.

Сирюк Юлия Андреевна

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
83001, Донецк-55, ул. Университетская, 24.
Тел.: (0622) 93-30-28.
E-mail: juliasiryuk@gmail.com

Siryuk Julia Andreevna

Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher,
Donetsk National University
E-mail: juliasiryuk@gmail.com

Безус Алексей Викторович

кандидат физико-математических наук,
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
83001, Донецк-55, ул. Университетская, 24.
Тел.: (0622) 93-30-28.
E-mail: coyote_mobile@mail.ru

Bezus Aleksey Victorovich

Candidate of Physics and Mathematics sciences,
Donetsk National University
E-mail: coyote_mobile@mail.ru

Бондарь Елена Дмитриевна

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
83001, Донецк-55, ул. Университетская, 24.
Тел.: (0622) 93-30-28.
E-mail: newexog@i.ua

Bondar Elena Dmitrievna

Donetsk National University
E-mail: newexog@i.ua

Смирнов Виталий Валерьевич

ГУ «Донецкий физико-технический институт
им. А.А. Галкина»,
83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 72.
Тел.: (062) 311-52-27.
E-mail: newexog@i.ua

Smirnov Vitalii Valerievich

Donetsk Institute for Physics and Engineering
E-mail: newexog@i.ua

Х И М И Ч Е С К И Е Н А У К И

УДК 547.552 : 542.97

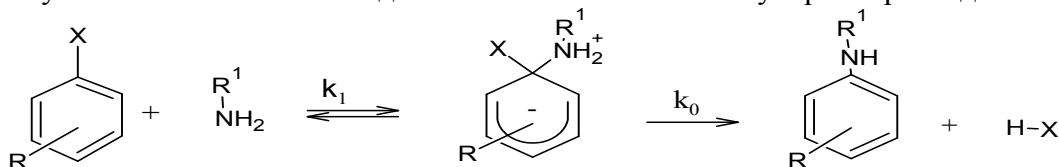
КАТАЛИЗ РЕАКЦИЙ S_NAr МОЛЕКУЛАМИ ОРГАНИЧЕСКИХ ОСНОВАНИЙ
В ПРОТОИНЕРТНЫХ НЕПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ. СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ
ЭФФЕКТ СОВМЕСТНОГО КАТАЛИЗА НУКЛЕОФИЛОМ И ОСНОВАНИЕМ
ДЛЯ РЕАКЦИЙ С ПЕРВИЧНЫМИ АМИНАМИ

© 2018. Т.П. Кулишова

Рассмотрены известные механизмы катализа органическими основаниями реакций S_NAr в неполярных средах. Показана зависимость максимального порядка реакции по основанию-катализатору от лимитирующей стадии процесса и класса амина. В случае наиболее медленной стадии образования σ -комплекса катализ должен осуществляться только добавленным основанием и только при действии ассоциатов нуклеофила с основанием. Для лимитирующей стадии распада – только постадийно с участием неассоциированных молекул основания и нуклеофила. Для вторичных аминов максимальным является первый порядок реакции по катализатору, а для первичных – второй. Для реакций первичных аминов показана возможность совместного катализа молекулами основания и нуклеофила, константы которых оказываются более высоким, чем аддитивный вклад отдельных катализаторов. Это приводит к возникновению эффекта синергизма. Предложены возможные переходные состояния для всех потоков процесса.

Ключевые слова: нуклеофильное ароматическое замещение, катализ органическими основаниями, первичные и вторичные амины синергизм

В литературе имеется большое количество работ, посвященных изучению механизма реакций нуклеофильного ароматического замещения с участием активированных производных бензола, и влиянию на эти механизмы различных факторов. Их результаты обобщены в обзорах и монографиях [1–2]. Известно, что они протекают по механизму S_NAr , который включает в себя обратимое образование промежуточного σ -комплекса и дальнейший его мономолекулярный распад.



Большинство исследований этих процессов относилось к случаям катализа молекулами амина, катализ другими основаниями системно не изучался.

Многие реакции органического синтеза в определенных условиях катализируются различными органическими соединениями. К ним относятся соединения протодонорного характера, проявляющие кислотные свойства и образующие при отщеплении протон (фенол, спирты и т.д.), а также вещества, обладающие только электродонорной (протоноакцепторной) природой. К последней группе можно причислить третичные амины, гетероциклические азотистые основания, анионы кислот и их соли. Если каталитическое действие оказывают исходные реагенты, это проявляется в более высоком порядке по реагенту, чем требуется стехиометрией.

Рассмотрим возможные механизмы каталитического действия органических оснований для неполярных сред.

Известно, что реакции активированных производных бензола с первичными или вторичными аминами в условиях избытка последних, подвержены катализу

органическими основаниями, в роли которых могут выступать как сам амин, так и различные органические соединения с неподеленной парой электронов. При наличии катализа классический ход таких реакций представлялся схемой на рис. 1

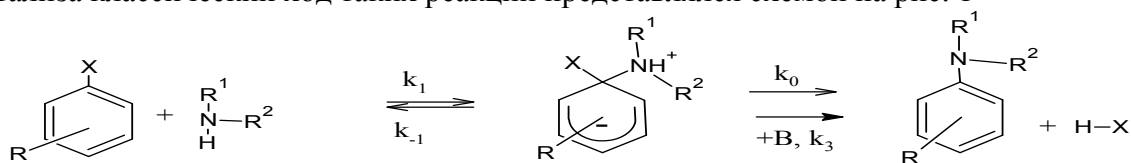
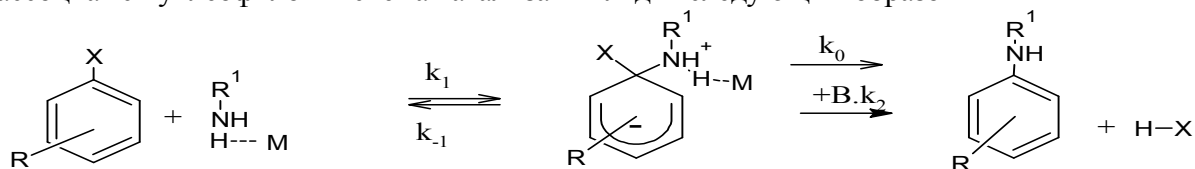


Рис. 1. Схема основного катализа реакций S_NAr

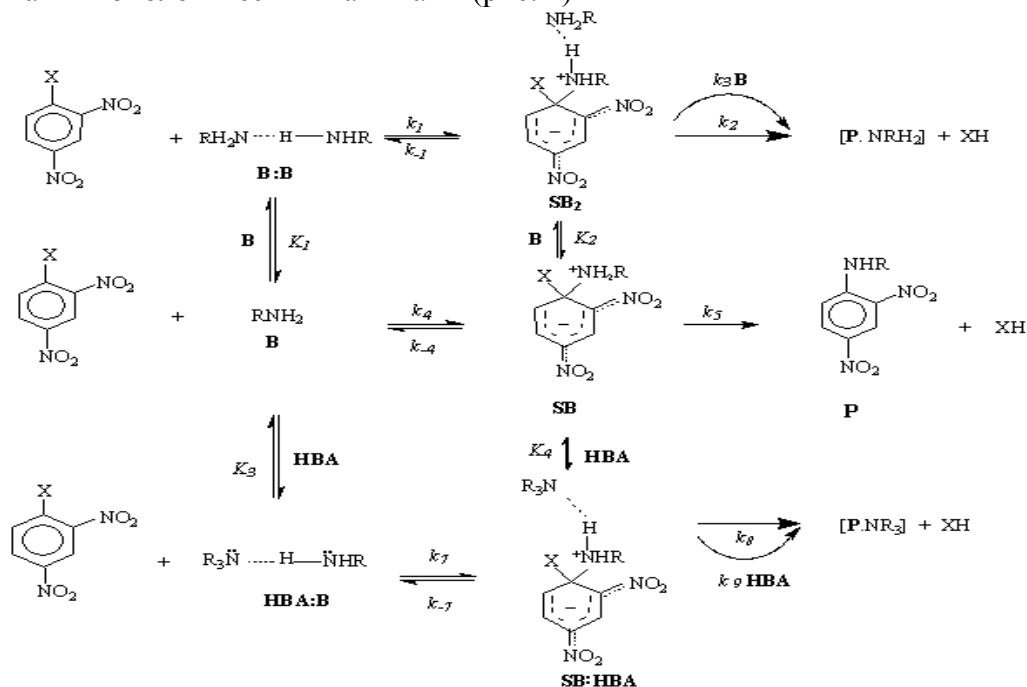
Под В понимают любое основание или молекулу нуклеофила. Таким образом, не акцентировалось различие между каталитическим действием нуклеофила и любого другого обычного основания. Катализ основанием и катализ нуклеофилом считались однотипными процессами.

Существует два основных взгляда на механизм катализа этих реакций органическими основаниями.

«Димерный» механизм [3, 4] предполагает атаку на субстрат ассоциата нуклеофил-основание, который, по мнению авторов, должен обладать большей реакционной способностью. Обозначим молекулу органического основания М, она может образовывать ассоциат с нуклеофилом и схема катализа выглядит следующим образом



Дальнейшее развитие этой теории привело к изучению реакционных серий с диаминами и биологическими аминами (рис. 2)



X = F, Cl

B = $R(Ph)NH_2$, NHR_2 , $NH R(Ph)_2$, $NH_2 R(Ph)NH_2$

HBA = R_3N , R_2CO , R_2O

Рис. 2. Общая схема потоков для «димерного» механизма катализа реакций S_NAr

Положительными сторонами этой теории катализа явилось вычленение ассоциатов нуклеофила с основанием как реакционных частиц.

Однако при этом возникал ряд вопросов, на которые эта теория авторов не дает ответы.

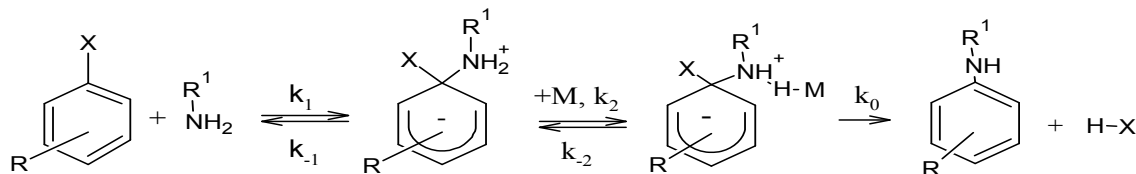
Если «димеры» нуклеофила с основанием более реакционноспособны, почему это относится только к первичным аминам? «Димеры» с участием вторичных аминов не образуются? Или они менее реакционноспособны?

Какие промежуточные продукты образуются при основном содействии распада комплекса SB:HBA основанием HBA? Почему невозможен каталитический распад этого комплекса под действием нуклеофила В?

Если ассоциаты с основанием более активны, почему они действуют только при образовании промежуточных продуктов, а на стадии распада – нет?

Почему каталитическое действие основания проявляется как на стадии образования комплекса (в виде ассоциата), так и на стадии распада его (в мономерной форме) не зависимо от лимитирующей стадии процесса ?

«Циклический» механизм катализа [5, 6] предполагает каталитический вклад основания на стадии распада σ -комплекса с образованием циклических переходных состояний



В последнее время авторы этой теории стали придерживаться комбинированного взгляда на процесс катализа основанием, допуская атаку на субстрат ассоциата нуклеофила с основанием, но затем основание отщепляется и действует уже на стадии распада промежуточного продукта (рис. 3).

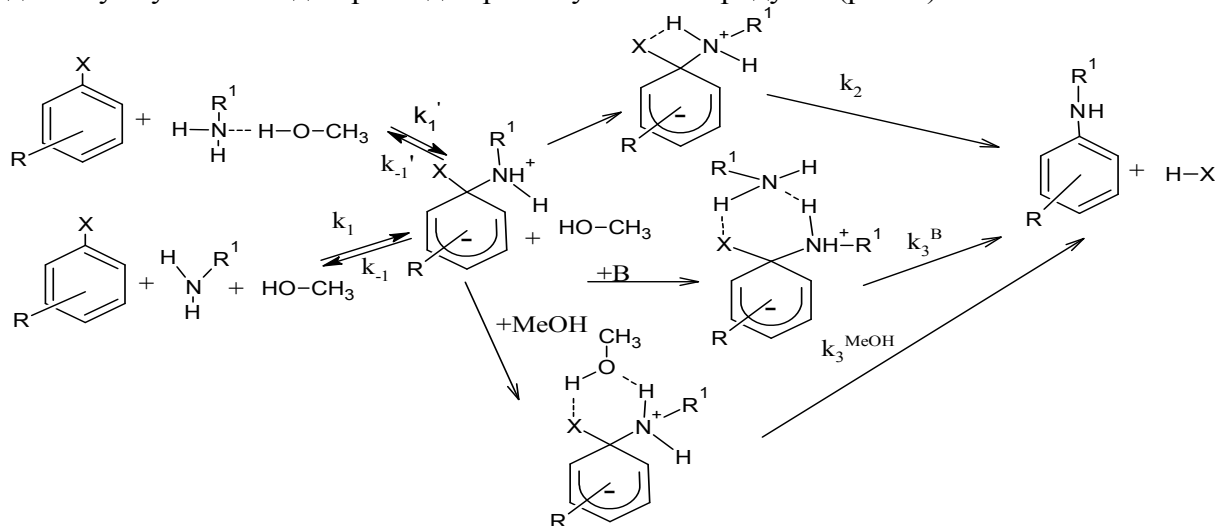


Рис. 3. Общая схема потоков для «циклического» механизма катализа реакций S_NAr

Вычисленные ими термодинамические параметры говорят о циклическом переходном состоянии. На этом основании авторы считают преобладание «циклического» механизма над «димерным».

Однако и в этом случае остается ряд вопросов.

Какой эффект в действии ассоциата основания с нуклеофилом, если после образования комплекса он отщепляется, а затем действует как свободное основание?

Почему участие основания как катализатора проявляется как на стадии образования комплекса (в виде ассоциата), так и на стадии распада его (в мономерной форме), не зависимо от лимитирующей стадии процесса ?

Если наблюдается катализ нуклеофилом, то это говорит о медленном распаде σ -комплекса, значит, его образование проходит быстро. Зачем ускорять стадию, которая и так происходит быстро? Различно ли действие катализатора на стадии, которая протекает быстро?

Если есть свидетельства циклического строения промежуточных продуктов, почему невозможно другое строение циклических состояний с участием такого же числа участников?

Получается, что этот механизм применим только для бифункциональных катализаторов, когда одна молекула действует как основание, а вторая – как кислота?

Доказательства преобладания «циклического» механизма над «димерным» нельзя признать полным и строгим.

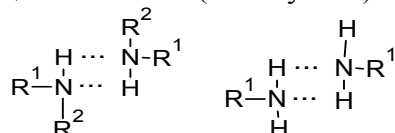
Несмотря на имеющийся объем материала по исследованию каталитических реакций в неполярных средах, данные этих работ являются несколько противоречивыми и предлагаемые механизмы не всегда в состоянии адекватно отразить экспериментальные зависимости. Тот факт, что кинетические зависимости не всегда находятся в соответствии со схемами каталитических процессов, свидетельствует о несовершенстве имеющихся механизмов катализа.

Целью настоящей работы явилось исследование катализа реакций арилирования органическими основаниями в неполярных средах для различных классов аминов в качестве нуклеофилов при различных лимитирующих стадиях процесса.

Основная часть. Как показал анализ литературных данных, все разновидности механизмов катализа основанием базируются на общности катализа как нуклеофилом, так и любым другим соединением с неподеленной парой электронов. Однако, как было показано ранее [7–8], различие в их действии все же существует – для некоторых реакций катализа нуклеофилом нет (подтверждено КИЭ) [9], а катализ другими основаниями есть. Очевидно, что существует в некоторых случаях разница между каталитическим действием оснований и нуклеофилов. Этот тезис был обоснован для реакций вторичных и первичных аминов [10–13]. Были составлены общие кинетические схемы, предполагающие равновероятное действие как ассоциированных, так и неассоциированных между собой молекул нуклеофила и основания. Рассмотрим эту схему на примере вторичных аминов (рис. 4).

В результате анализа этих схем был сделан вывод о том, что при наиболее медленной стадии образования промежуточных продуктов должны действовать ассоциаты нуклеофила с основанием или самоассоциаты нуклеофила (димеры) (рис. 5).

А так как критерием этой стадии является отсутствие катализа нуклеофилом, был сделан вывод о том, что самоассоциаты нуклеофила не обладают реакционной способностью вследствие их циклического (замкнутого) строения



а не линейной формы, предполагаемой авторами



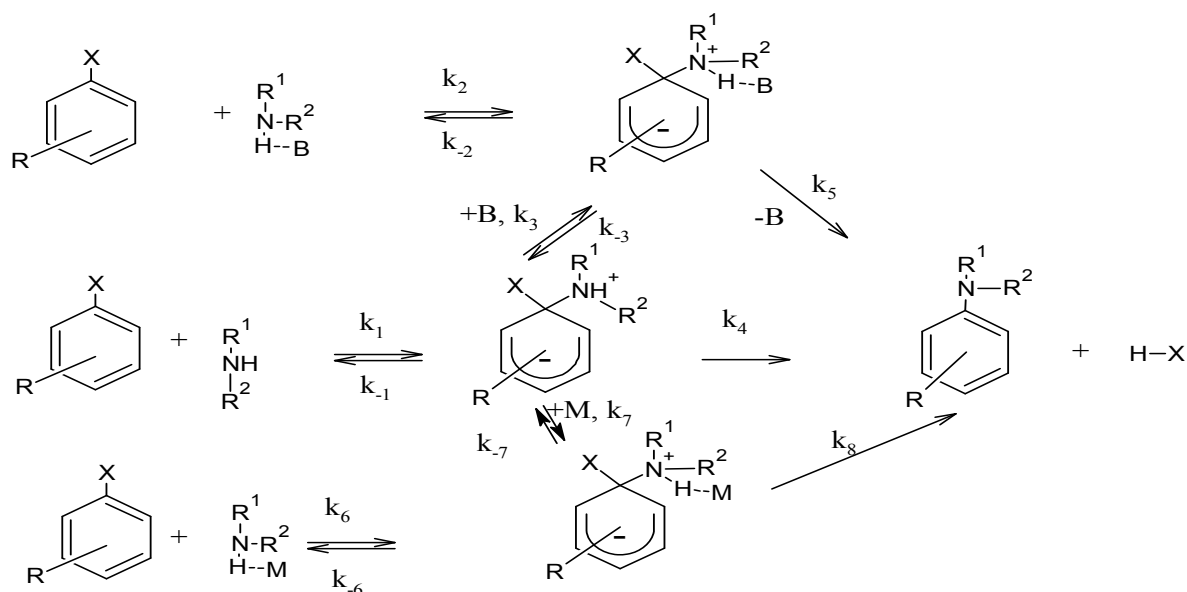


Рис.4. Общая схема равновероятного существования потоков с ассоциированными молекулами нуклеофила и свободными основаниями для реакций S_NAr с участием вторичных аминов

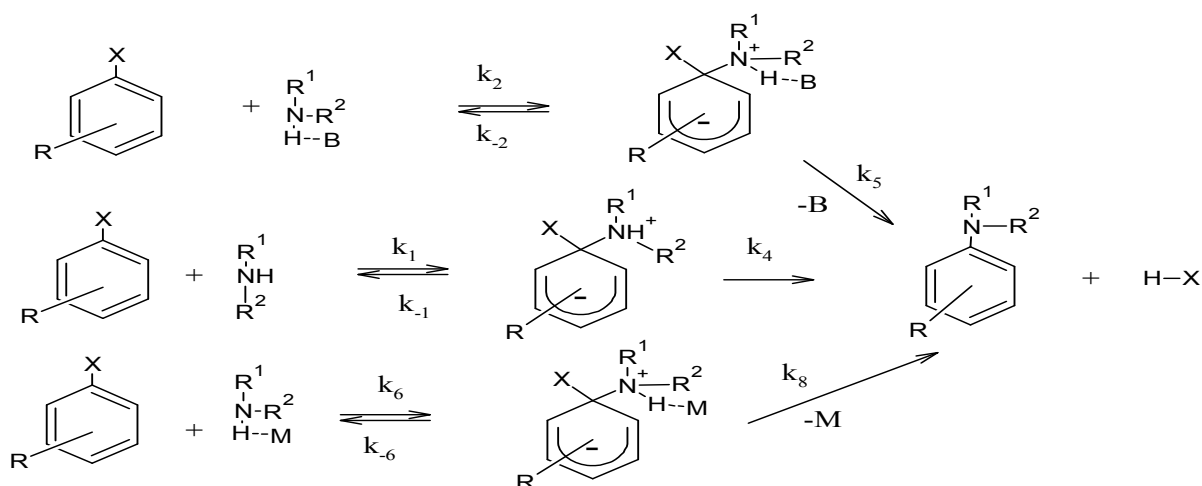


Рис. 5. Схема потоков для реакций S_NAr с участием вторичных аминов при наиболее медленной стадии образования σ -комплексов

В отличие от самоассоциатов нуклеофила, ассоциаты основания с нуклеофилом являются реакционноспособными, но действуют при наиболее медленной стадии образования промежуточного продукта и схема на рис. 5 преобразуется в рис. 6.

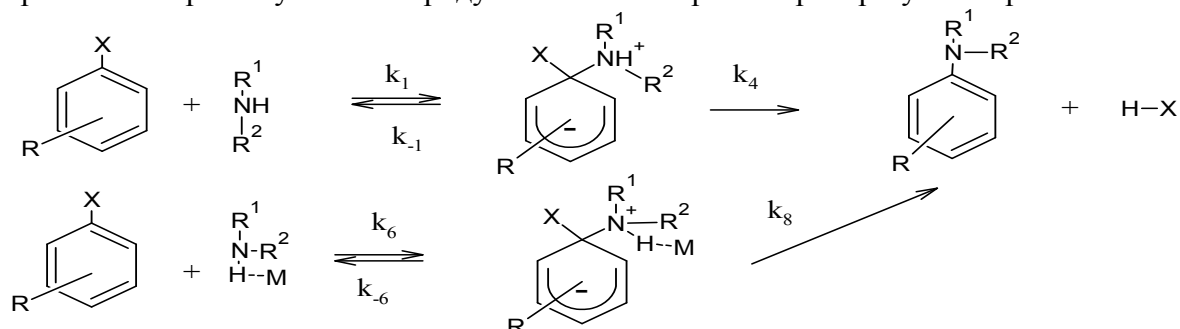


Рис. 6. Схема потоков для реакций S_NAr с участием вторичных аминов при наиболее медленной стадии образования σ -комплексов без участия самоассоциатов нуклеофила

Поэтому катализ ассоциатами основания с нуклеофилом может наблюдаться только в случае отсутствия катализа нуклеофилом. Это нашло экспериментальное подтверждение для реакции 2,4-динитробензолсульфоната с пиперидином в бензоле [7–8].

В случае лимитирующей стадии распада σ -комплексов, каталитическое действие оказывают неассоциированные молекулы нуклеофила и основания, а катализ нуклеофилом может осуществляться только мономерной формой по классическому стадийному пути (рис. 7).

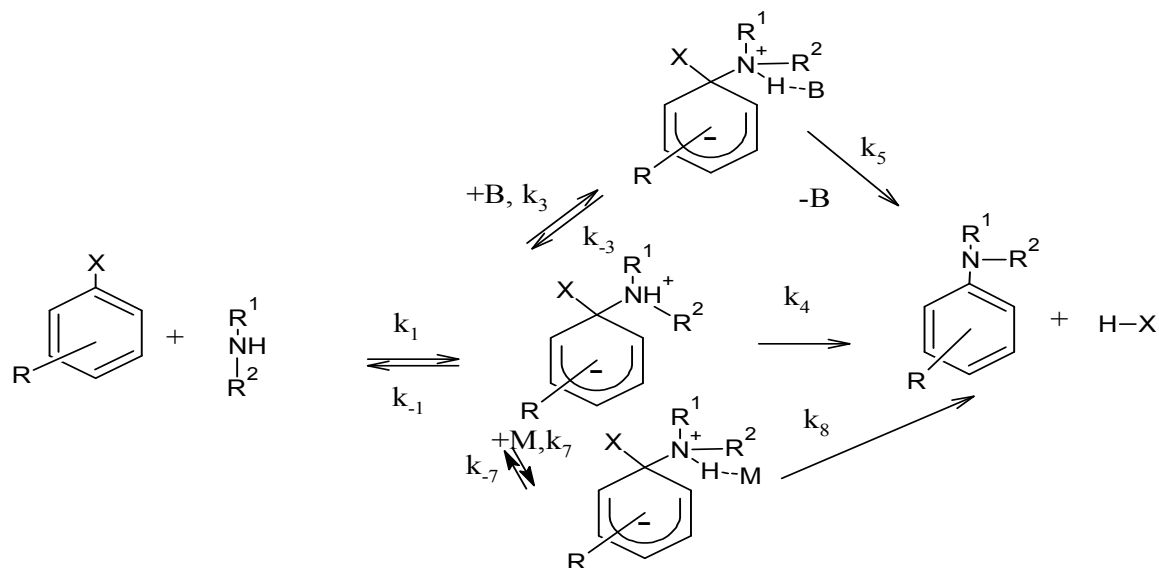


Рис. 7. Схема потоков при наиболее медленной стадии распада σ -комплексов для реакций S_NAr с участием вторичных аминов

Этот вывод относится для реакций как вторичных, так и для первичных аминов.

Для реакций арилирования с участием первичных аминов было сделано обоснованное предположение о возможном пути катализа ассоциатами с участием как одной, так и двух молекул основания



Такое предположение является возможным, потому что в молекулах первичных аминов есть два атома водорода, способных образовывать водородные связи с основаниями.

Анализ таких схем [12–13] показал, что в реакции с этими нуклеофилами может наблюдаться квадратичная зависимость наблюдаемой константы скорости по концентрации основания. Каталитическое действие основания может быть как в виде ассоциата первичного амина с одной или двумя молекулами основания (для скоростьопределяющей стадии образования промежуточных продуктов), так и в неассоциированном виде при медленном их распаде. Последнему случаю получено экспериментальное подтверждение этой зависимости в работе [14], для реакции 3'-фенил-2,4,6-тринитрофенилового эфира с анилином в бензоле, катализируемой пиридин-N-оксидом. Исходная реакция субстрата с нуклеофилом катализируется одной и двумя молекулами амина, некаталитический поток распада статистически незначим. Поскольку наблюдался катализ нуклеофилом, то это стало основанием считать лимитирующей стадией распада промежуточных продуктов. Поэтому действие катализатора было возможно только в неассоциированном виде с участием одной или двух молекул основания (рис. 8).

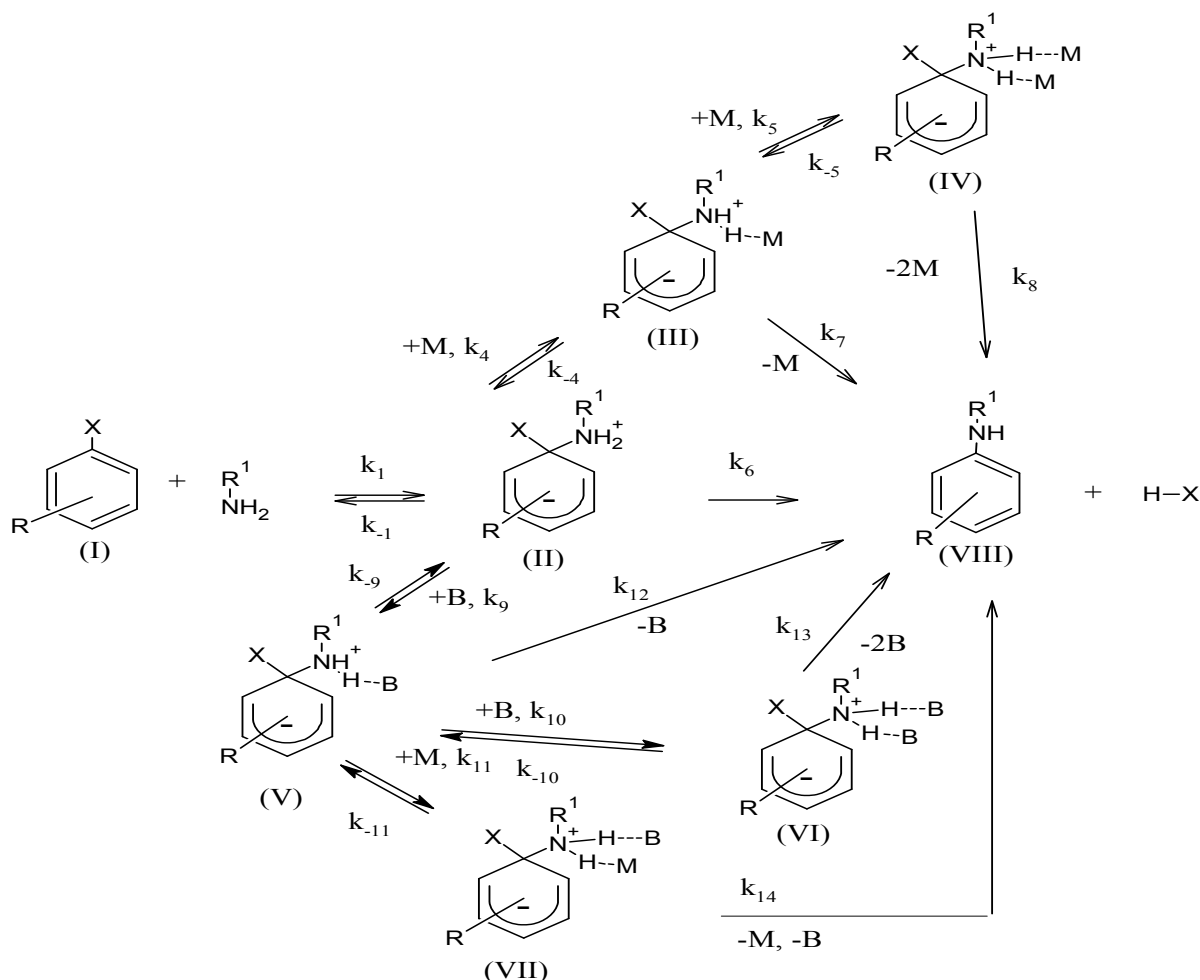


Рис. 8. Схема потоков для реакции S_NAr с участием с первичных аминов, катализируемой основанием M и нуклеофилом B (лимитирует стадия распада промежуточных продуктов)

При такой схеме действия катализаторов наблюдаемая константа скорости второго порядка должна иметь вид

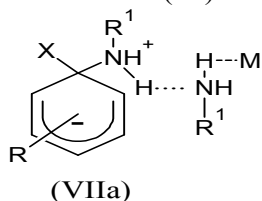
$$k_H = k_0 + k_B[B] + k_{2B}[B]^2 + k_M[M] + k_{2M}[M]^2 + k_{BM}[B][M],$$

где k_0 – константа скорости некаталитического потока, k_B – константа скорости потока, катализируемого одной молекулой нуклеофила без добавки основания, k_{2B} – константа скорости потока, катализируемого двумя молекулами нуклеофила без добавки основания, k_M – константа скорости потока, катализируемого одной молекулой основания, k_{2M} – константа скорости потока, катализируемого двумя молекулами основания, k_{BM} – константа скорости потока, катализируемого одной молекулой основания и одной молекулой нуклеофила.

Действительно, наблюдаемая константа скорости второго порядка имела квадратичную зависимость от концентрации нуклеофила в отсутствии основания и при добавке основания впервые обнаружена квадратичная зависимость от концентрации добавленного катализатора – пиридин-N-оксида. со следующими значениями для констант всех потоков

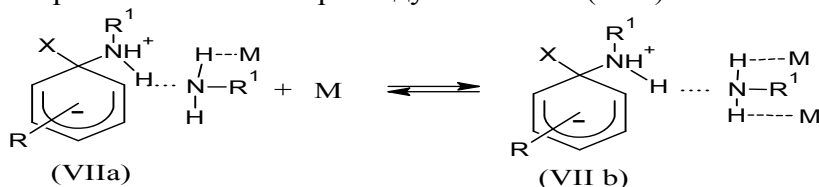
$$k_H = 4,60 \cdot 10^{-3}[B] + 0,123[B]^2 + 0,534[M] + 28,52[M]^2 + 27,12[B][M] + 1174[B][M]^2.$$

Численные значения полученных констант скорости позволяют сделать вывод о том, что субстрат с нуклеофилом реагируют быстро с образованием интермедиата (II), который без каталитического воздействия практически не распадается. Каталитическое действие одной молекулы анилина (или даже двух) дает очень небольшой эффект, что делает возможным атаку на комплексы (II),(V) молекул основания. Поскольку пиридин-N-оксид обладает большей основностью, чем анилин, каталитические потоки в этом случае являются более эффективными, судя по численным значениям. Примечательно, что константа скорости потока перекрестного катализа (основания и нуклеофила) оказывается сравнимой с константой скорости катализа с участием двух молекул основания (k_{2M}). Очевидно, катализ с совместным участием нуклеофила и основания имеет синергетический эффект. Если бы действие катализаторов носило характер, аналогичный действию только основания и только нуклеофила (комплексы (III, IV, V, VI), то вклад каждого из катализаторов был бы аддитивным. А поскольку наблюдается синергетический эффект действия различных катализаторов, можно предположить, что наряду с комплексом (VII) может существовать и комплекс (VIIa), который образуется при атаке М на комплекс (III).



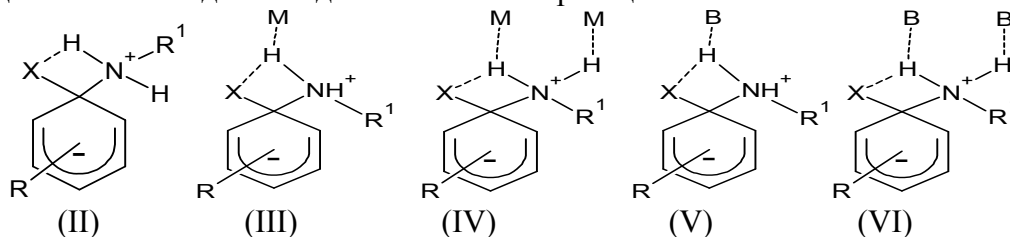
Аналогичная ситуация и с самым эффективным потоком катализа – одна молекула нуклеофила и две молекулы основания (k_{B2M}). Этот поток катализа не предполагался ранее, но он оказался самым эффективным, значение каталитической константы в этом потоке максимально.

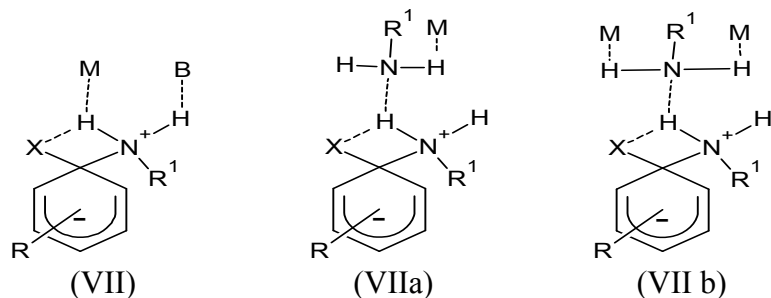
Единственным возможным вариантом такого потока является каталитическое содействие со стороны основания М распаду комплекса (VIIa)



Очевидно, что комплекс (III) распадается медленно (k_B имеет самое маленькое значение), поэтому он существует достаточное время для образования водородных связей с молекулами основания. Ассоциация двух молекул основания и одной молекулы нуклеофила с атомами водорода по аналогии с (IV) и (VI) является невозможной. Кроме того, только такой путь объясняет возможность этого потока и синергетический эффект совместного каталитического влияния основания и нуклеофила.

Распад промежуточных продуктов (II–VIIб), вероятнее всего, будет осуществляться через циклические переходные состояния согласно термодинамическим данным для аналогичных реакций.





Существование таких переходных состояний, в которых образуется трехкоординированный атом водорода, вполне допустимо, т.к. орбиталь $1s$ атома водорода обладает сферической симметрией и может перекрываться орбиталями трех других атомов. Но образование всех связей происходит не синхронно. Вначале быстро образуются связи с молекулами основания, а затем медленно катализируется распад связи $C-X$. Наличие переходных состояний (II-VIIb) более полно отражает механизм каталитического действия основных катализаторов, находится в согласии с высокими значениями $-\Delta S$ и объясняет различный порядок каталитических реакций с участием первичных и вторичных аминов.

Вывод. В результате проведенных исследований действия органических оснований как катализаторов реакций арилирования в неполярных средах было выявлено их некоторое отличие от каталитического действия нуклеофила. При наиболее медленной стадии образования промежуточных продуктов основания действуют только в виде ассоциатов с нуклеофилом, самоассоциаты нуклеофила не реакционноспособны. Для медленной стадии распада комплексов каталитического действия оснований и нуклеофилов аналогичны – в свободном, не ассоциированном виде. В зависимости от класса реагирующего амина может наблюдаться как первый (для вторичных), так и второй (для первичных) порядок реакции по концентрации основного катализатора. Для первичных аминов в качестве нуклеофилов показана возможность совместного катализа молекулами основания и нуклеофила, который оказывается более высоким, чем аддитивный вклад отдельных катализаторов. Это приводит к возникновению эффекта синергизма. Предложены возможные переходные состояния для распада по всем потокам процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Crampton, M. R. Aromatic Substitution / Organic Reaction Mechanisms. – Canada: John Wiley & Sons, Inc, 2013. – P. 217-271.
2. Hirst, J. Mechanism of aromatic nucleophilic substitution reactions by amines in solvent of low relative permittivity / J. Hirst // J. Phys. Org. Chem. – 1994. – No 2. – P. 98–120
3. Alvaro, C. S. Comprehensive Mechanism for Aromatic Nucleophilic Substitution in Aprotic Solvents: Derivation of the Whole Reaction Scheme for Third Order in Amine Kinetic Law / C.S. Alvaro, N. S. Nudelman // Physical Chemistry. – 2013. – Vol. 3, No 2. – P. 39-47.
4. Alvaro, C. S. The “dimer nucleophile mechanism” for reactions with rate-determining first step: Derivation of the whole kinetic law and further treatment of kinetic results / C. S. Alvaro, N. S. Nudelman // Int J. Chem Kinet. – 2010. – Vol. 42, No 12. – P. 735–742.
5. Babatunde, A. I. Kinetics of the reactions of 1-chloro-2,4,6-trinitrobenzene and phenyl-2,4,6-trinitrophenyl ether with aromatic amines in mixed solvents: Effect of amine basicity on hydrogen-bond interactions in toluene-methanol mixtures / A. I. Babatunde, A. M. Olusegun, C. Isanbor // Pelagia Research Library Advances in Applied Science Research. – 2013. – No 4(4). – P. 266-273.
6. Isanbor, C. Kinetics of S_NAr reactions of 1-phenoxy-nitrobenzenes with aliphatic amines in toluene: ring substituent and solvent effects on reaction pathways / C. Isanbor, A. I. Babatunde // J. Phys. Org. Chem. – 2009. – Vol. 22, No 11. – P. 1078–1085.

7. Общий основной катализ органическими основаниями реакций активированных производных бензола с пиперидином в бензоле / Р.В. Визгерт, С.Г. Шейко, Т.П. Кулишова, Л.Е. Сухаревская // Журн. орган. химии. – 1989. – Vol. 25, № 6. – С. 1158-1163.
8. Некоторые особенности общесовместного механизма катализа реакции 2,4-динитробензолсульфоната с пиперидином в бензоле / С. Г. Шейко, Т.П. Кулишова, А. П. Коростылев, Р. В. Визгерт // Укр. хим. журн. – 1994. – Т. 60, № 9. – С. 652-656.
9. Влияние уходящей группы и дейтериевый изотопный эффект в реакциях активированных производных бензола с пиперидином / Р.В. Визгерт, С.Г. Шейко, Т.П. Кулишова, Г.Д. Тицкий // Журнал орг. химии. – 1989. – Т. 25, № 8. – С. 1739-1743.
10. Кулишова, Т. П. Анализ общей кинетической схемы реакций 1-Х-2,4-динитробензолов с пиперидином в бензоле в присутствии органических оснований / Т. П. Кулишова, С. Г. Шейко, Р. В. Визгерт // Журн. орган. химии. – 1991. – Т. 17, № 12. – С. 2610-2615.
11. Кулишова, Т. П. Реакции нитропроизводных бензола в неполярных средах. I. Общая кинетическая схема катализа нуклеофилом / Т. П. Кулишова, Р. В. Визгерт // Укр. хим. журн. – 1994 – Т. 60, № 1. – С. 74-79
12. Кулишова Т. П. Анализ общей кинетической схемы катализа только основаниями реакций активированных производных бензола с первичными аминами в неполярных средах / Т. П. Кулишова // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 1. – С. 85-91
13. Кулишова Т. П. Анализ общей схемы совместного катализа органическими основаниями и первичными аминами реакций активированных производных бензола с первичными аминами в неполярных средах / Т. П. Кулишова // Башкирский химический журнал. – 2017. – Т. 24, № 3. – С. 13-18.
14. Кулишова Т.П. Катализ пиридин – N – оксидом реакции 3'- нитрофенил-2,4,6-тринитрофенилового эфира с анилином в бензоле / Т. П. Кулишова // Вестник ДонНУ, Серия А. Естественные науки. – 2017. – № 4. – С. 97-107.

Поступила в редакцию 28.06.2018 г.

CATALYSIS OF S_NAr REACTIONS BY ORGANIC BASE MOLECULES IN APROTIC NON-POLAR MEDIA. SYNERGETIC EFFECT PARTICIPATORY CATALYSIS BY NUCLEOPHILES AND THE BASIS FOR REACTIONS WITH PRIMARY AMINES

T.P. Kulishova

The known mechanisms of catalysis by organic bases of S_NAr reactions in nonpolar media are studied.. The dependence of the reaction maximum order by the base-catalyst on the limiting stage of the process and the amine class is shown In the case of the slowest stage of formation of σ -complex, catalysis should be carried out only by the added base and only under the action of base associates with the nucleophile. For the limiting stage of the destruction – only stepwise with the participation of non-associated molecules of the base and nucleophile. For secondary amines, the maximum is the first order of the reaction on the catalyst, and for primary amines – the second. For reactions primary amine , the possibility of joint catalysis by molecules base and nucleophile is shown, which turns out to be higher than the additive contribution of individual catalysts. This leads to a synergistic effect. The of transition States in the all process threads is proposed.

Keywords: nucleophilic aromatic substitution, catalysis by organic bases, primary and secondary amines, synergy

Кулишова Татьяна Петровна

кандидат химических наук, доцент,
доцент кафедры общей химии ГОУ ВПО «Донецкий
национальный технический университет», г. Донецк
E-mail: tpk2006@mail.ru
Тел.: +38 (062) 301-03-21

Kulishova Tatyana Petrovna

Cand. Sci.(Chem.), Docent,
Associate Professor at the Department of General
Chemistry, Donetsk National Technical University,
Donetsk
E-mail: tpk2006@mail.ru
tel.: +38 (062) 301-03-21

УДК 678

ПОЛИМЕРНЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ НА ОСНОВЕ ЭПОКСИДНОЙ СМОЛЫ И ТЕРМОРАСШИРЕННОГО ГРАФИТА

© 2018. *М.В. Сайфутдинова, В.М. Михальчук, М.В. Савоськин, Ю.В. Берестнева*

Описано получение композиционных материалов на основе диглицидилового эфира дициклогексилпропана, полиаминного отвердителя, терморасширенного графита и диоксида кремния. Термомеханический анализ полученных эпоксидно-графитовых композитов показал, что углеродный наполнитель оказывает пластифицирующее действие на эпоксидную полимерную матрицу. Изучено влияние устойчивости получаемых материалов к термической деградации и термоокислительной деструкции. Установлено, что терморасширенный графит и кремнезём при небольших их количествах повышают термостойкость полимерных образцов.

Ключевые слова: композиты; аминное отверждение; эпоксидная смола; терморасширенный графит, кремнезём.

Введение. Известно, что терморасширенный графит (ТРГ) применяется в качестве нанонаполнителя при получении композиционных материалов на основе эпоксидных смол [1–5]. Терморасширенный графит вызывает особый интерес в качестве наполнителя композитов вследствие его низкой стоимости, высокого теплового сопротивления, высокой электрической проводимости и теплопроводности. К тому же, по сравнению с «сырым» графитом, частицы терморасширенного графита могут иметь кислородсодержащие функциональные группы, что улучшает совместимость графита с различными матричными полимерами. Так, хорошая диспергируемость ТРГ в эпоксидных смолах обеспечивает возможность получения материалов с высокими механическими и тепловыми показателями [1–4]. Однако, по сравнению с другими модификациями графита, терморасширенный графит в меньшей степени изучен как наполнитель полимерных композиционных материалов.

Анализ литературных данных также показал, что положительный модифицирующий эффект добавок ТРГ наблюдается при относительно высоких их концентрациях. Например, введение в композит терморасширенного графита в количестве от 3 до 9 масс. % снижает скорость термической деструкции эпоксидной матрицы, а температура, соответствующая максимальной скорости разложения композитов увеличивается на 20–140 °С по сравнению с немодифицированным эпоксидным полимером [1]. Существует мнение, что более высокая температура разложения композитов может быть объяснена так называемым барьерным эффектом наполнителя, при котором терморасширенный графит повышает устойчивость графитовых композитов к термическому разрушению, препятствуя диффузии продуктов разложения, из полимера в газовую фазу.

Обычно нанонаполнители проявляют высокий модифицирующий эффект при малых их концентрациях. Так, например, кремнезём при его содержании 0,5–3 масс. % снижает максимальную скорость термической деградации и высокотемпературного окисления, повышает устойчивость композитов к агрессивным средам и эффективность антикоррозионной защиты алюминиевого сплава по сравнению с немодифицированным полимером [6–8]. Терморасширенный графит имеет высокую удельную поверхность, а значит и большую поверхность контакта полимера и наполнителя. В этом случае возможно достижение модифицирующего эффекта при

малых концентрациях нанонаполнителя. Однако, данных о модифицирующем влиянии терморасширенного графита на свойства полимерной матрицы при низком содержании наполнителя (до 1 масс. %) недостаточно.

Эпоксидные полимерные матрицы и композиты на их основе, в том числе, наполненные терморасширенным графитом, чаще всего формируют по механизму аминного отверждения, поскольку такой способ получения не требует больших энергозатрат: реакция поликонденсации (полиприсоединения) алифатических аминов с эпоксидными смолами идет с высокой скоростью уже при комнатной температуре. Кроме того, известно, что аминные отвердители могут взаимодействовать с функциональными группами на поверхности как окисленного терморасширенного графита, так и кремнезёма, что приводит к улучшенной совместимости ТРГ с эпоксидной матрицей [5, 9]. При совместном присутствии полиамина, терморасширенного графита и кремнезёмных частиц, возможно образование единой ковалентно-связанной системы.

Целью данного исследования является получение и исследование свойств композиционных материалов аминного отверждения на основе низковязкой циклоалифатической эпоксидной смолы, терморасширенного графита и кремнезёма с низкими концентрациями нанонаполнителей.

Экспериментальная часть. В качестве исходных соединений для формирования полимерной матрицы использовали диглицидиловый эфир дициклогексилпропана (EPONEX 1510) и циклоалифатический полиамин (ANCAMINE 2579) при стехиометрическом соотношении их функциональных групп. Процесс отверждения проводили при 25 °С в течении 24 ч. с последующим доотверждением (при 100 °С – 3 ч.). Эпоксидный полимер наполняли чешуйчатым терморасширенным графитом ($K_v = 357 \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1}$), полученным из нитрата графита, соинтеркалированного этилформиатом и 1,4-диоксаном. Содержание ТРГ в образцах варьировали от 0,5 до 1,5 масс. %.

Золь частиц диоксида кремния формировали *in situ* гидролитической поликонденсацией тетраэтоксисилана (ТЭОС) в эпоксидно-аминной реакционной смеси. Расчетное количество ТЭОС тщательно перемешивали с эпоксидной смолой. Затем в полученной смеси диспергировали терморасширенный графит, вводили аминный отвердитель и повторно перемешивали все компоненты. После этого в реакционной смеси одновременно начинались два процесса – формирование эпоксидной полимерной сетки по реакции поликонденсации эпоксидной смолы с аминным отвердителем, и гидролитическая поликонденсация тетраэтоксисилана с образованием кремнеземного золя. Гидролиз ТЭОС протекал за счет воды, содержащейся в исходном полиамине. Реакции гидролиза и поликонденсации катализировались аминными группами отвердителя. Содержание кремнеземного наполнителя составляло 5 масс. % в перерасчёте на диоксид кремния. Образцы полимера и композитов получали в виде плёнок толщиной $0,2 \pm 0,01$ мм между стёкол, обработанных антиадгезивом.

Микрофотографии получали с использованием микроскопа МБС-2, оборудованного цифровой фотокамерой. Температуры стеклования (T_c) и высокоэластичности ($T_{вэ}$) эпоксидного полимера и композитов определяли методом термомеханического анализа на автоматической лабораторной установке, состоящей из термокриокамеры ТК-500 с программированным регулятором температуры, электронной измерительной системы М-217 и двухкоординатного самопишущего потенциометра. Измерения проводили на плёночных образцах ($25 \times 6 \times 0,2$ мм) при скорости нагревания $4 \text{ }^\circ\text{С} \cdot \text{мин}^{-1}$. T_c определяли как температуру начала α -

релаксационного перехода, $T_{вз}$ – как температуру его завершения. Выход золь-фракции ($W_{золь}$) получаемых композитов определяли экстракцией низкомолекулярных веществ ацетоном при температуре 50 °С в течение 24 часов с периодической заменой растворителя и последующим взвешиванием высушенных до постоянной массы пленочных образцов, определяемой с точностью до 0,0002 г.

Термическое старение эпоксидно-графитовых композитов в изотермических условиях проводили при 180 °С и доступе кислорода воздуха, определяли скорость потери массы пленочных образцов композитов (W). Температуры, соответствующие 50 %-ной потере массы (T_{50}), началу ($T_{нач}$) и окончанию основной стадии деструкции ($T_{кон}$), а также максимальной скорости деструкции ($T_{макс}$) полимера и композитов определяли на дериватографе Q1500D системы Paulik–Paulik–Erdey (Венгрия) в динамическом режиме в диапазоне температур 20 – 850 °С при скорости нагревания 10 °С·мин⁻¹ в среде кислорода воздуха. Скорость поглощения кислорода ($V_{макс}$) плёночными образцами эпоксидного полимера и композитов толщиной 0,2 мм и массой 150 – 200 мг определяли газовольюметрическим методом при 180 °С и давлении кислорода 1 бар.

Анализ результатов. При отверждении эпоксидной смолы, наполненной терморасширенным графитом, а также терморасширенным графитом и кремнезёмом, получены плёночные образцы стеклообразных композитных материалов чёрного цвета. Для оценки параметров, связанных с топологической структурой полимерной матрицы композитов были проведены термомеханические исследования и определён выход золь-фракции. Установлено, что температура стеклования и температура высокоэластичности композита, содержащего 1 масс. % терморасширенного графита, находятся на уровне соответствующих T_c и $T_{вз}$ немодифицированного полимера (табл. 1).

Таблица 1

Зависимости температуры стеклования (T_c), температуры высокоэластичности ($T_{вз}$), выхода золь-фракции ($W_{золь}$) и скорости потери массы (W) эпоксидного полимера и графитовых композитов

Содержание ТРГ, масс. %	Содержание SiO ₂ , масс. %	T_c , °С	$T_{вз}$, °С	$W_{золь}$, %	$W \cdot 10^5$, г/с
0	0	66	90	11,9	2,2
0	5	60	66	10,3	2,4
1	0	67	86	12,0	1,2
1 (содержит ацетон)	0	45	61	13,8	1,4
1	5	47	68	13,2	2,0

На практике для улучшения диспергируемости терморасширенного графита в эпоксидных смолах часто используют органические растворители. Проведенное нами предварительное диспергирование ТРГ (1 масс. %) в ацетоне, с последующим смешением со связующим и вакуумированием при температуре 60 °С в течение 1 часа при остаточном давлении 0,1 МПа не оказывает заметного влияния на указанные выше свойства композитов: температура стеклования и содержание экстрагируемых низкомолекулярных веществ (выход золь-фракции) остаётся почти неизменным, а интервал температур α -релаксационного перехода несколько сужается (см. табл. 1). Это дает основание считать, что уже при обычном механическом перемешивании компонентов обеспечивается высокая степень диспергирования ТРГ в эпоксидной смоле.

Композиты, содержащие в своём составе одновременно 1 масс. % терморасширенного графита и 5 масс. % кремнийоксидного наполнителя, характеризуются более низкой плотностью сшивания полимерной матрицы, что проявляется в уменьшении значений T_c и $T_{вз}$. Снижение температур стеклования и

высокоэластичности, а также увеличение выхода золь-фракции (табл. 1) объясняется пластифицирующим действием этанола, образующегося при гидролитической поликонденсации тетраэтоксисилана. При добавлении терморасширенного графита в эпоксидный олигомер повышается вязкость системы, что затрудняет удаление низкомолекулярных продуктов гидролитической поликонденсации алкоксида кремния при синтезе композитов. Подобный эффект снижения температуры стеклования наблюдался при высоком содержании диоксида кремния (более 3 масс. %) в эпоксидно-кремнезёмных композитах аминного и ангидридного отверждения [6, 8].

Устойчивость эпоксидного полимера и композитов к действию высоких температур в присутствии кислорода воздуха была изучена в изотермических условиях при 180 °С, а также методом неізотермической термогравиметрии (дериватографии). На кривых ТГ и ДТГ дериватограмм для немодифицированного полимера, а также композитов, наполненных терморасширенным графитом и кремнезёмом можно выделить две широкие температурные области потери массы. Низкотемпературная область с максимумами скорости потери массы 175–180 °С соответствует улетучиванию адсорбированной влаги (около 1 %) и остаточных низкомолекулярных продуктов гидролитической поликонденсации тетраэтоксисилана. Потеря массы на данном участке кривой (рис. 1а) составляет 10–14 % от массы полимерного образца, что приблизительно равно выходу золь-фракции. С введением возрастающего количества терморасширенного графита положение первого максимума несколько смещается в сторону больших температур, что подтверждает ранее отмеченное замедление удаления летучих компонентов в присутствии ТРГ – слоистого наполнителя.

Высокотемпературная область потери массы (выше 230 °С) соответствует основным стадиям деструкции – окислительному и пиролизическому разрыву химических связей полимерных цепей. В этой области температур на кривых скорости потери массы наблюдается наложение, по крайней мере, трёх пиков (рис. 1б), что указывает на сложный многостадийный характер термоокислительной деструкции и затрудняет точное определение температур начала ($T_{нач}$) и окончания ($T_{кон}$) основных стадий термического разложения. Эти температуры незначительно изменяются на 3–6 °С (табл. 2, рис. 1). Изменение температуры, соответствующей максимальной скорости потери массы является более надёжным критерием оценки влияния модификаторов на термическую стабильность полимеров. Из данных, представленных в табл. 2 видно, что терморасширенный графит уже при малых его концентрациях (0,5–1,5 масс. %) повышает устойчивость к термической деструкции эпоксидно-аминных полимеров и для всех изученных эпоксидно-графитовых композитов $T_{макс}$ на 7–13 °С выше, чем для немодифицированного полимера.

Таблица 2

Температуры, соответствующие 50 %-ной потери массы (T_{50}), началу ($T_{нач}$) и окончанию основной стадии деструкции ($T_{кон}$), а также максимальной скорости деструкции ($T_{макс}$) полимера и композитов

Содержание ТРГ, масс. %	Содержание SiO ₂ , масс. %	$T_{нач}$, °С	T_{50} , °С	$T_{кон}$, °С	$T_{макс}$, °С
0	0	247	293	344	275
	5	249	291	317	275
0,5	0	251	294	348	284
	5	246	289	332	282
1	0	238	290	350	286
	5	246	291	339	286
1,5	0	233	290	347	288
	5	229	286	331	284

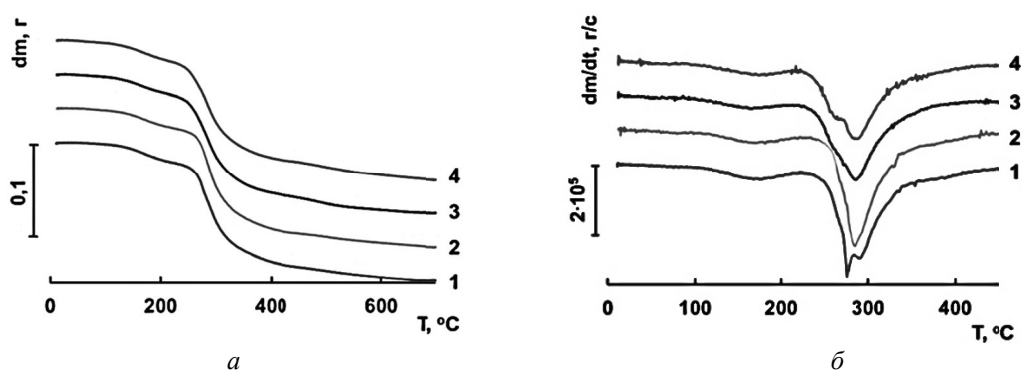


Рис. 1. Дериватографические кривые зависимости (а) потери массы (ТГ) и (б) скорости потери массы (ДТГ) эпоксидного полимера и графитовых композитов аминного отверждения; содержание ТРГ: 1 – 0; 2 – 0,5; 3 – 1, 4 – 1,5 масс. %

Известно, что эксплуатационные свойства полимеров, такие, как предел прочности при разрыве, относительное удлинение при разрыве, оптические свойства и другие резко снижаются уже на начальных стадиях термоокислительной деструкции – при потере массы 5–10 % [10].

Более чёткое повышение устойчивости к термоокислительной деструкции видно при проведении эксперимента в изотермических условиях при 180 °С (рис. 2). В течении первого часа на кривых потери массы образцов графитонаполненных композитов наблюдается потеря массы с большой скоростью, обусловленная улетучиванием низкомолекулярных компонентов, не связанных с полимерной матрицей, содержание которых в композите коррелирует с количеством низкомолекулярных продуктов (выход золь-фракции) гидролитической поликонденсации тетраэтоксисилана (вода, этанол). На второй стадии в последние 60–150 минут скорость потери массы (W) пленочных образцов полимеров становится практически постоянной и её значение характеризует устойчивость полимерного композита к термоокислительной деструкции. Как видно из данных, приведённых в табл. 1 введение терморасширенного графита, а также оксиднокремниевое наполнителя приводит к снижению скорости термического разложения в 2 и более раз по сравнению с исходным немодифицированным полимером.

Замедление термоокислительной деструкции графитонаполненных композитов можно объяснить тем, что пластинчатые нанонаполнители, в частности, терморасширенный графит, замедляют встречную диффузию кислорода в полимер и продуктов деструкции из полимера [1].

После завершения дериватографического эксперимента образцы немодифицированного полимера и композитов, содержащих только терморасширенный графит, практически полностью выгорают: остаточная масса не превышает 0,3 %. Для композитов, содержащих кремнезём в качестве

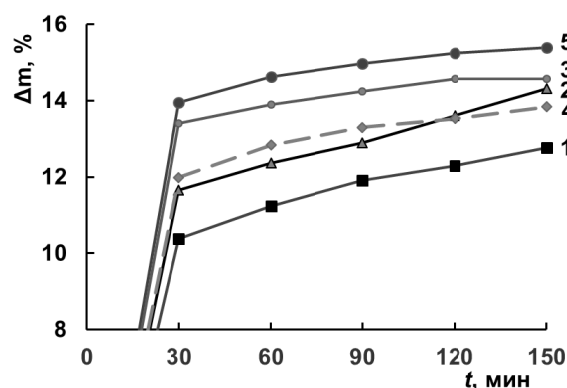


Рис. 2. Кривые потери массы (Δm) эпоксидного полимера и графитовых композитов; содержание ТРГ: 1 – 0; 2, 3, 4 – 1 масс. %; содержание SiO_2 : 1, 2, 3 – 0; 4 – 5 масс. %; 3 – содержит растворитель

модифицирующей добавки, остаточная масса составляет 5 %, что совпадает с расчётным значением концентрации диоксида кремния. Следует отметить, что в условиях непрерывной подачи воздуха и удаления (вакуумирования) продуктов деструкции из печи дериватографа образуются пластинки аэрогеля, которые формируются при спекании частиц кремнезёма в однородную пространственную «сетку». Размер и форма пластинок аэрогеля сохраняет форму плёночных образцов композитов (рис. 3).

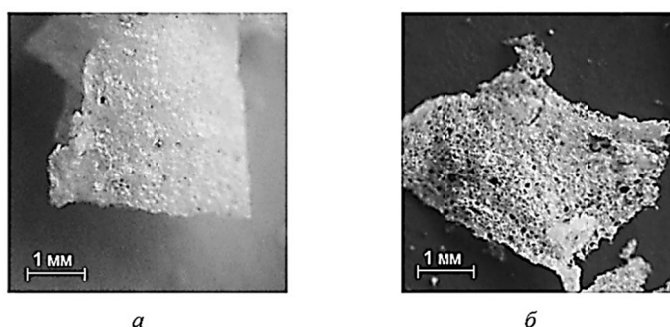


Рис. 3. Микрофотографии эпоксидно-графитовых композитов, содержащих кремнезем ($w(\text{SiO}_2) = 5$ масс. %), после высокотемпературного отжига; содержание ТРГ: а – 0,5; б – 1,5 масс. %

Из представленных на рис. 3 микрофотографий частиц аэрогеля видно, что при низких концентрациях терморасширенного графита в композитах образуется плотная кремнезёмная сетка (рис. 3а) с редкими крупными сквозными отверстиями. С повышением содержания терморасширенного графита увеличивается количество и размер больших пустот в структуре аэрогеля (рис. 3б). При этом кремнеземная сетка в целом становится более рыхлой. Образование крупных отверстий может быть обусловлено наличием в композите крупных частиц недиспергированного терморасширенного графита.

Известно, что кремнийоксидный наполнитель может ингибировать процесс термического окисления, что определяется непосредственным окружением атома кремния, в частности, наличием ОН-групп, которые образуются при получении частиц SiO_2 золь-гель технологией [9]. Также существует мнение, что на поверхности смолы может образовываться термостойкий слой вследствие низкой потенциальной энергии поверхности кремнезёма [11].

В исследуемых системах ингибирующее действие кремнезёмной составляющей проявляется в снижении максимальной скорости поглощения кислорода ($V_{\text{макс}}$). Методом газовольюметрии установлено, что для немодифицированного полимера и композита, содержащего 0,5 масс. % терморасширенного графита, окисление развивается с короткими периодами индукции (τ), а максимальная скорость окисления практически одинакова (рис. 4, табл. 3). Композиты, содержащие 5 масс. % кремнезёмного наполнителя и 0,5 масс. % ТРГ проявили более высокую устойчивость

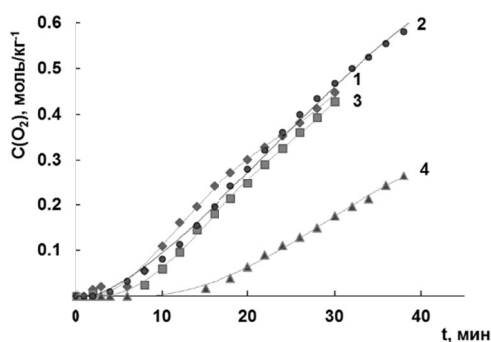


Рис. 4. Кинетические кривые поглощения кислорода полимером и эпоксидно-графитными композитами аминного отверждения; содержание ТРГ: 1, 2 – 0; 3, 4 – 0,5 масс. %; содержание SiO_2 : 1, 3 – 0; 2, 4 – 5 масс. %

к высокотемпературному окислению кислородом. Добавка кремнезёмной составляющей приводит к изменению вида кинетической кривой поглощения кислорода: появляется период индукции (около 16 минут), после завершения которого окисление развивается с низкой скоростью, меньшей максимальной скорости окисления немодифицированного полимера (табл. 3).

Таблица 3

Зависимость периода индукции (τ) и максимальной скорости поглощения кислорода ($V_{\text{макс}}$) от содержания терморасширенного графита и диоксида кремния

Содержание ТРГ, масс. %	Содержание SiO ₂ , масс. %	τ , мин	$V_{\text{макс}} \cdot 10^4$, моль·кг ⁻¹ ·с ⁻¹
0	0	–	3,0
	5	–	3,3
0,5	0	–	3,1
	5	16	2,3

Таким образом, введение терморасширенного графита как пластинчатого нанонаполнителя замедляет термоокислительную деструкцию эпоксидных полимеров аминного отверждения: скорости потери массы начальной стадии деструкции уменьшаются вдвое. При этом максимальная скорость поглощения кислорода практически не изменяется. Дополнительное введение в графитонаполненные композиты кремнезёмного нанонаполнителя снижает скорость окисления, однако это не отражается на скорости потери массы образцов.

Наличие остаточных низкомолекулярных компонентов практически не отражается на скорости термической деструкции композитов. Такие композиты могут быть использованы для получения покрытий на открытой поверхности, с которой низкомолекулярные компоненты удаляются проще. Кремнезёмная составляющая композитов замедляет процесс окислительной деструкции полимерной матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gantayat S. Expanded graphite as a filler for epoxy matrix composites to improve their thermal, mechanical and electrical properties / S. Gantayat, G. Prusty, D.R. Rout, S.K. Swain // *New Carbon Mat.* – 2015. – Vol. 30, № 5. – P. 432–437.
2. Mechanical properties of Fe₃O₄/GO/chitosan composites / M. Yadav, K.Y. Rhee, S.J. Park, D. Hui // *Compos. Part B Eng.* – 2014. – Vol. 66. – P. 89–96.
3. Dimiev A. Pristine graphite oxide / A. Dimiev [et al] // *J. Am. Chem. Soc.* – 2012. – Vol. 134, № 28. – P. 15–22.
4. Pokharel P. Multi-step microwave reduction of graphite oxide and its use in the formation of electrically conductive graphene/epoxy composites / P. Pokharel, Q.T. Truong // *Compos. Part B Eng.* – 2014. – Vol. 64, № 1. – P. 87–93.
5. Wang Z. Thermal conductivity improvement of epoxy composite filled with expanded graphite / Z. Wang, R. Qi, J. Wang, S. Qin // *Ceram. Int.* – 2015. – № 9. – P. 52–59.
6. Жильцова С.В. Устойчивость эпоксидно-силоксановых композитов, полученных золь-гель методом, к воздействию агрессивных сред / С.В. Жильцова и др. // *Вісник Дон. нац. ун-ту, Сер. А: Прир. науки*, 2010. – № 1. – С. 186–190.
7. Леонова Н.Г. Устойчивость к термоокислительной деструкции композитных плёночных покрытий на основе эпоксидно-полисилоксановых систем катионной полимеризации / Н.Г. Леонова, В.М. Михальчук, В.А. Белошенко // *Вісник Дон. нац. ун-ту, Сер. А: Прир. науки*, 2010. – № 1. – С. 191–195.
8. Михальчук В.М. Особенности формирования и свойства эпоксидно-кремнезёмных композитов аминного отверждения / В.М. Михальчук и др // *Вестник Новг. гос. ун-та.* – 2015. – № 6(89). – С. 81–85.

9. Haeria S.Z. Enhancement of the mechanical properties of an epoxy composite through inclusion of graphene oxide nanosheets functionalized with silica nanoparticles through one and two steps sol-gel routes / S.Z.Haeria, M.Asgharia, B.Ramezanzadeh // Prog. Org. Coat. – 2017. – Vol. 111 – P. 1–12.
10. Крюк Т.В. Влияние ацетилацетонатов на свойства сетчатых эпоксидных полимеров в процессе термоокислительной деградации / Т.В. Крюк и др. // Пластические массы. – 2001. – № 3. – С. 12–14.
11. Liu, Y.-L. Thermal stability of epoxy-silica hybrid materials by thermogravimetric analysis / Y.-L. Liu, W.-L. Wei, K.-Y. Hsu, W.-H. Ho // Thermochim. Acta. – 2004. – Vol. 412. – P. 139–147.

Поступила в редакцию 20.11.2018 г.

POLYMER COMPOSITES BASED ON EPOXY RESIN AND EXPANDED GRAPHITE

M.V. Saifutdinova, V.M. Mikhal'chuk, M.V. Savoskin, Y.V. Berestneva

In this paper the preparation of composite materials based on diglycidyl ether of dicyclohexylolpropane, a polyamine curing agent, thermally expanded graphite and silicon dioxide is described. Thermomechanical analysis of the obtained epoxy-graphite composites showed that the carbon filler has a plasticizing effect on the epoxy polymer matrix. The influence of the stability of the resulting materials on thermal degradation and thermal-oxidative degradation is studied. It is established that thermally expanded graphite and silica with small amounts increase the thermal stability of polymer samples. Keywords: composites; amine curing; epoxy resin; thermally expanded graphite, silica.

Сайфутдинова Мария Викторовна

Аспирант ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк),
ул. Щорса, 17а, г. Донецк-01, ДНР
E-mail: sayfutdinovam@list.ru
Тел.: (071) 998-09-71

Saifutdinova Mariia Viktorovna

Graduate student Donetsk National University,
Donetsk, DPR

Михальчук Владимир Михайлович

Доктор химических наук, профессор;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк),
ул. Щорса 17а, г. Донецк-01, ДНР
E-mail: volodymyr@mykhalchuk.com
Тел.: (062) 302-07-17

Mikhal'chuk Vladimir Mihaylovich

Doctor of Chemical Sciences, Full professor
Donetsk National University, Donetsk, DPR

Савоськин Михаил Виталиевич

Кандидат химических наук, ст. науч. сотр.,
директор ГУ «ИНФОУ»
Институт физико-органической химии и
углехимии им. Л.М. Литвиненко (г. Донецк),
ул. Розы Люксембург, 70, г. Донецк-114, ДНР
E-mail: m-savoskin@yandex.ua

Savoskin Michael Vitalievich

Candidate of Chemical Sciences, Senior Research
Officer, director
L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and
Coal Chemistry, Donetsk, DPR

Берестнева Юлия Васильевна

Кандидат химических наук, научный сотрудник
Институт физико-органической химии и
углехимии им. Л.М. Литвиненко (г. Донецк),
ул. Розы Люксембург, 70, г. Донецк-114, ДНР
E-mail: berestnevayuv@mail.ru

Berestneva Juliya Vasilievna

Candidate of Chemical Sciences, Research Officer
L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and
Coal Chemistry, Donetsk, DPR

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 577.0; 57.042; 57.033

БИОМОНИТОРИНГ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД В УСЛОВИЯХ АНТРОПОГЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ПРИМЕРЕ РЕКИ КАЛЬМИУС

© 2018. *С.В. Беспалова, С.В. Чуфицкий, С.М. Романчук, А.С. Кривякин*

Проведено исследование отдельного участка русла реки Кальмиус, подвергавшегося интенсивному антропогенному воздействию. В ходе исследования проанализирован физико-химический состав проб воды, проведен анализ состояния фитопланктона на основании анализа кривых индукции флуоресценции хлорофилла с помощью метода флуориметрии. Показано негативное воздействие промышленных сточных вод на протекание процессов фотосинтеза в фотосинтетическом аппарате фитопланктона р. Кальмиус. Выделен ряд тест-функций, наиболее эффективно отражающих степень влияния загрязнения на биоту.

Ключевые слова: р. Кальмиус; флуориметрия; биомониторинг; фитопланктон; сточные воды.

Введение. Основной водной артерией, протекающей через г. Донецк, является река Кальмиус. Речная и балочная сеть реки на территории города зарегулирована водохранилищами и прудами, предназначенными для различных целей (техническое водоснабжение, рекреация). Для Донецка река Кальмиус имеет важное историческое, хозяйственное и рекреационное значение, в связи с чем проблема охраны её бассейна и рационального водопользования требует особого внимания, и разработка пространственно-распределенной системы биомониторинга для реализации подобных задач является наиболее перспективной [1–3].

В современных условиях разработка подобных систем мониторинга выполняет все возрастающую роль при изучении и предотвращении антропогенного загрязнения окружающей среды. Такой подход позволяет четко обозначить район для проведения исследований, а также точно выделить закономерности биогеохимических циклов внутри бассейна водного объекта благодаря известным направлениям потоков вещества [1–7].

Целью настоящего исследования являлось проведение пространственно-распределенного мониторинга поверхностных вод реки Кальмиус с применением метода флуориметрии.

Материал и методы исследования. Проведение биомониторинга и оценка качества воды р. Кальмиус включало в себя решение нескольких задач.

1. Анализ физико-химических параметров проб воды из р. Кальмиус.
2. Исследование параметров флуоресценции хлорофилла микроводорослей р. Кальмиус.
3. Разработка методики пространственно-распределенного биомониторинга поверхностных вод с применением метода флуориметрии.

В рамках исследования был выбран ряд мониторинговых точек, как показано на рис. 1.

Мониторинговая точка 1 располагалась перед Нижнекальмиусским водохранилищем и принималась за контрольную. Точка 2 располагалась в месте перехода водохранилища в русло реки Кальмиус. Выбор расположения мониторинговых точек 1

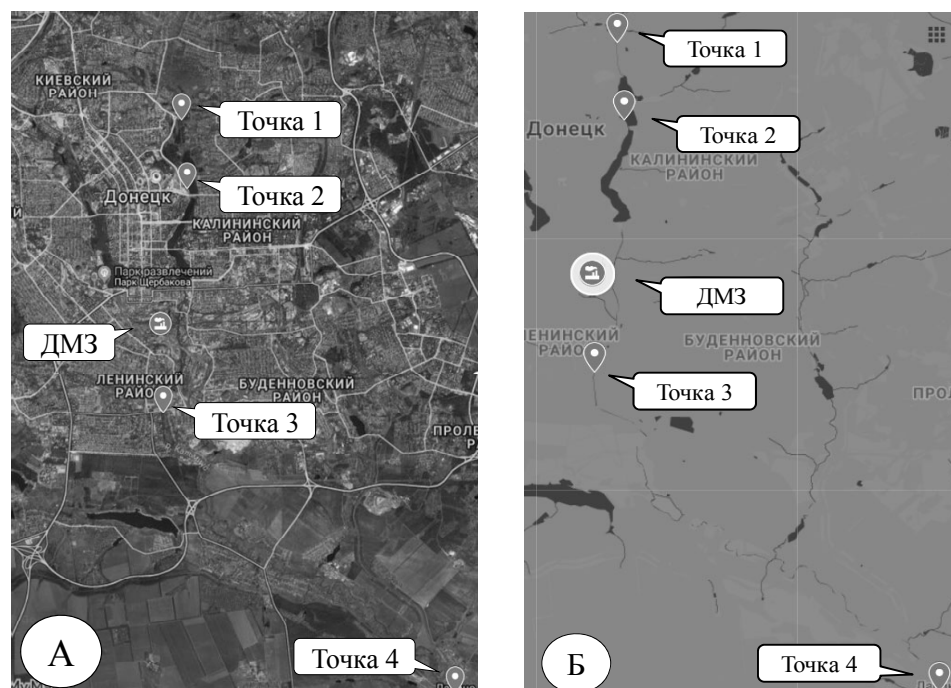


Рис. 1. Карта расположения мониторинговых точек на участке русла р. Кальмиус:
А – физическая карта местности; Б – карта с отображением русла реки

и 2 обусловлен значительным возрастанием биомассы фитопланктона в водохранилище. Русло реки проходит около ПАО «Донецкий металлургический завод» (обозначено как «ДМЗ» на рис. 1), сточные воды которого способны оказывать негативное воздействие на биоту, что обусловило выбор расположения мониторинговой точки 3. Точка 4 расположена за чертой города Донецка на территории поселка городского типа Ларино.

Для отобранных проб воды проводился анализ физико-химических показателей. Измерения выполняли на базе кафедры аналитической химии химического факультета Донецкого национального университета. Определяли содержание натрия, калия, свинца, магния, железа, ртути, нитратов и нитритов, фосфатов. Полученные значения сравнивали с предельно допустимыми концентрациями согласно ГН 2.1.5.1315-03 [8].

Для оценки качества воды согласно РД 52.24.643-2002 определяли класс. Для оценки качества воды согласно РД 52.24.643-2002 определяли класс загрязненности воды на основании определения удельного комбинаторного индекса загрязненности воды (УКИЗВ), а также количество критических показателей загрязненности [9]. Для этого рассчитывали:

- баллы кратности превышения ПДК: $K_i = \frac{C_i}{\text{ПДК}_i}$;
- баллы повторяемости случаев превышения ПДК: $H_i = \frac{N_{\text{пдк}_i}}{N_i}$;
- общий оценочный балл: $B_i = K_i \times H_i$;
- УКИЗВ: $\text{УКИЗВ} = \sum_{i=0}^n B_i$;

где C_i – концентрация i -го вещества в пробе воды; ПДК_i – предельно допустимая концентрация i -го вещества в пробе воды; $N_{\text{пдк}_i}$ – число превышений значения ПДК

для i -го вещества; N_i – общее число измерений содержания i -го вещества в среде [9].

Класс загрязненности определяли согласно коэффициенту, вычисленному из следующего соотношения: $\frac{\text{УКИЗВ}}{k}$, где k – коэффициент запаса, который рассчитывается в зависимости от числа критических показателей загрязненности (КПЗ или F), согласно выражению: $k = 1 - 0.1 \times F$. По значению полученного коэффициента определяли класс загрязненности воды [9].

Кроме того, проводился флуориметрический анализ проб воды с помощью двух импульсных флуориметров: Phyto-PAM (фирмы Walz, Германия), а также разработанного на базе СКТБ «Турбулентность» макета флуориметра ФС-2. В ходе исследования проводили измерение общего содержания хлорофилла по сигналу флуоресценции на 470, 520, 645 и 685 нм, а также следующих показателей флуоресценции:

F_0 – минимальный уровень флуоресценции, соответствующий состоянию, когда все реакционные центры (РЦ) фотосистемы II (ФС II) открыты;

F_m – максимальный уровень флуоресценции, соответствующий состоянию, когда все РЦ ФС II закрыты;

$F_v = F_m - F_0$ – переменная или вариабельная флуоресценция, отражает соотношение между константами скоростей реакций фотохимического и нефотохимического использования энергии возбуждения реакционного центра;

$\Phi_0 = \frac{F_m - F_0}{F_m}$ – квантовый выход флуоресценции, показатель эффективности

протекания первичной фотохимической реакции в ФС II [10–13].

Также с помощью флуориметра ФС-2 получали кривые индукции флуоресценции хлорофилла. На основании полученных кривых и параметров ОЛР-теста [4, 11, 12, 14, 15] проводили анализ состояния микроводорослей. При анализе индукционных кривых получали следующие параметры:

T_{F_m} – время, необходимое для достижения максимального уровня флуоресценции (миллисекунды);

A_0 или $A_{\text{геа}}$ – площадь над индукционной кривой;

$V_t = \frac{F_t - F_0}{F_m - F_0}$ – относительная величина переменной флуоресценции в момент времени t ;

$V_J = \frac{F_J - F_0}{F_m - F_0}$ – относительная величина переменной флуоресценции в фазе J

(после 2 мс освещения); отражает количество закрытых РЦ по отношению к общему числу РЦ, которые могут быть закрыты;

$V_I = \frac{F_I - F_0}{F_m - F_0}$ – относительная величина переменной флуоресценции во время фазы

I (30 мс), связанная с промежуточным стационарным уровнем восстановления пула пластохинонов; отражает способность ФС I и ее акцепторов окислять PQH₂;

M_0 – усредненная величина начального наклона (в мс^{-1}) относительной переменной флуоресценции хлорофилла а; этот параметр отражает скорость закрывания реакционных центров ФС II;

PI – тотальный индекс производительности – показатель функциональной активности ФС 2, ФС 1 и цепи переноса электронов между ними [10–12, 14– 17].

Статистическую обработку полученных результатов исследования проводили с помощью программ «Statistica 8» (StatSoft Inc.) и «Excel 2003» (Microsoft Corporation). Достоверность отличий средних значений полученных данных определяли с использованием t-теста и критерия Вилкоксона.

Анализ результатов. Вода в русле реки Кальмиус по своим органолептическим свойствам не имела отклонений от нормы.

В ходе анализа физико-химических показателей проб воды превышений предельно допустимых концентраций для исследуемых веществ обнаружено не было. Исключение составило содержание ионов магния, превышающее предельно допустимую концентрацию для данного вещества (табл. 1).

Таблица 1
Физико-химические показатели проб воды р. Кальмиус в летний период 2018 года

Показатель	Точка 1		Точка 2		Точка 3		Точка 4		ПДК, мг/л		В _i	
	Июнь	Июль	Июнь	Июль	Июнь	Июль	Июнь	Июль	Июнь	Июль	Июнь	Июль
Na ⁺ , мг/л	114	162	111	165	116	161	108	170	200	200	0	0
K ⁺ , мг/л	22	8	21	8	23	10	26	21	–	–	0	0
Pb ²⁺ , мкг/л	14	9	8	5	7	22	18	9	0,01	0,01	0	0
NO ₃ ⁻ , мг/л	<10	<10	<10	<10	15	15	<10	10	45	45	0	0
NO ₂ ⁻ , мг/л	<1	<1	<1	<1	3	2	<1	2	3,3	3,3	0	0
PO ₄ ³⁻ , мг/л	0,04	0,03	0,03	0,04	0,06	0,07	0,03	0,06	3,5	3,5	0	0
Mg ²⁺ , мг/л	95*	58*	93*	68*	99*	68*	102*	77*	50	50	7,78	5,46
Fe общ., мг/л	0,3	0,4*	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0	0,33
Hg общ., мг/л	<0,05	–	<0,05	–	0,1	–	<0,05	–	0,0005	0,0005	0	0

Примечание: * – случаи превышения предельно допустимых концентраций.

Показатель удельного комбинаторного индекса загрязненности воды (УКИЗВ) в период с июня по июль, с учетом содержания магния в отобранных пробах воды, характеризует воду в р. Кальмиус как грязную (класс 4 а – б) [9]. Однако, в литературе не указано никаких сведений о негативном воздействии зарегистрированных концентраций магния на водные организмы. Для сульфатных и гидрокарбонатно-сульфатных вод рек земного шара содержание Mg²⁺ колеблется в более широких пределах – от 0,5 до 101 мг/л [17]. Также отмечено, что повышение содержания ионов Mg²⁺ характерно для периодов летней и зимней межени, когда питание реки осуществляется за счет грунтовых вод [17]. Таким образом, повышенное содержание магния можно считать характерным для исследуемого водного объекта. Значения УКИЗВ рассчитанные для периода с июня по июль, не принимая во внимание содержание ионов Mg²⁺, характеризуют воду в р. Кальмиус как условно чистую [9].

При анализе химических показателей природных поверхностных вод значительное внимание уделяется определению содержания биогенных веществ. Для этого оценивали концентрации нитратов, нитритов и фосфатов в исследуемых пробах воды. Для содержания PO₄³⁻ были характерны низкие значения. Это позволяет сделать

предположение о том, что данный показатель является фактором, лимитирующим рост фитопланктона в реке [17, 18].

Кроме того, в июле наблюдали разовое превышение ПДК по содержанию железа в точке 1 на 0,1 мг/л (см. табл. 1).

Концентрацию хлорофилла в пробах воды определяли с помощью метода флуориметрии по интенсивности минимальной флуоресценции (F_0) фитопланктона. Изменение содержания хлорофилла в пробах воды имело сходный характер в различные временные периоды (рис. 2) – происходило нарастание концентрации фотопигмента в мониторинговой точке 2, а затем значительное ее снижение в точке 3.

Рост содержания хлорофилла связан, прежде всего, с изменением гидрорежима. Река из узкого русла с быстрым течением переходит водохранилище, где скорость течения значительно снижается, а инсоляция и температура воды возрастают. Показатель содержания хлорофилла в июне был наиболее низким, что связано с низкой среднесуточной температурой. Наибольшее возрастание концентрации хлорофилла в точке 3 наблюдалось в период с августа по сентябрь (см. рис. 2). В конце августа – начале сентября наблюдали интенсивное развитие сине-зеленых водорослей. Для проб воды, отобранных в точках 3 и 4, было характерно более низкое, в сравнении с точкой 3, содержание хлорофилла. Достоверные отличия по содержанию фотопигмента между точками 3 и 4 наблюдались только в осенний период (сентябрь–октябрь). Значительное снижение содержания хлорофилла в пробах воды можно связать с воздействием сточных вод ПАО «Донецкий металлургический завод», расположенного между мониторинговыми точками 2 и 3 (см. рис. 1).

Для анализа состояния фитопланктона регистрировали кривые индукции флуоресценции. Полученные кривые анализировали с помощью ОЛР-теста. Полученные параметры флуоресценции приведены в табл. 2.

Согласно полученным данным, изменение показателей минимального (F_0) и максимального уровней (F_m) флуоресценции фитопланктона, а также содержания хлорофилла в пробах воды изменялись согласованно, с нарастанием в точке 3 и последующим снижением в точках 3 и 4. Показатели, отражающие величину флуоресценции фитопланктона в различные промежутки времени (V_k , V_j , V_i , T_{F_m}), не давали достоверного отличия и не являлись информативными. Также неинформативными являлись показатели скорости закрытия реакционных центров ФС II (M_0), а также значение площади над индукционной кривой (Area).

Наиболее информативными показателями являлись тотальный индекс производительности ФСII (PI), а также квантовый выход флуоресценции хлорофилла (Φ_0). Сходный характер изменения показателя PI наблюдали в осенний период (сентябрь–

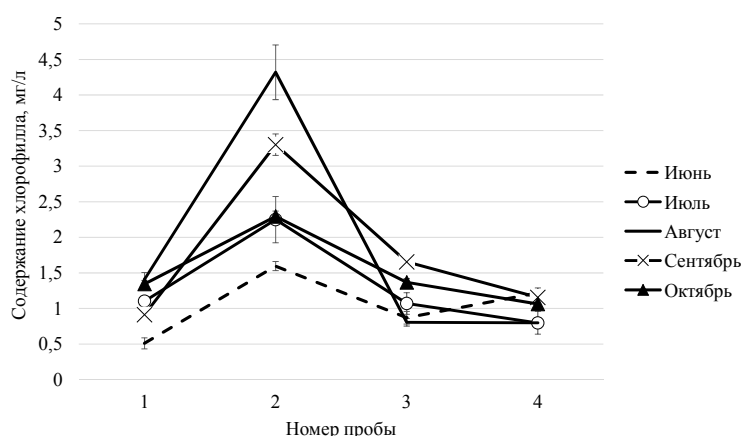


Рис. 2. Изменение суммарной концентрации хлорофилла в пробах воды

Таблица 2

Основные параметры флуоресценции, полученные с помощью ОЛР-теста

Проба	Месяц	F_o	F_m	T_{F_m}	M_o	Φ_o	Area	V_k	V_j	V_I
Проба 1	Июнь	1696	3742	–	4,63	0,56	–	0,29	0,46	0,75
	Июль	198	4740	91	5,64	0,59	2763	0,25	0,57	0,92
	Август	149±1	506±4	212±20	3,55±0,52	0,71±0,01	6947±594	0,25±0,01	0,51±0,02	0,87±0,01
	Сентябрь	172±1	490±4	261±21	4,08±0,52	0,65±0,01	4879±390	0,27±0,01	0,56±0,01	0,92±0,02
	Октябрь	211±6	558±8	208±62	5,00±0,43	0,62±0,01	5213±1059	0,32±0,03	0,62±0,03	0,95±0,01
Проба 2	Июнь	2216	4686	–	5,35	0,57	–	0,20	0,46	0,70
	Июль	238	587	198	5,18	0,61	5743	0,26	0,54	0,87
	Август	283±9	902±30	30±1	2,98±0,23	0,69±0,01	2630±105	0,34±0,01	0,63±0,02	1,00±0,01
	Сентябрь	285±8	847±18	261±2	2,46±0,25	0,66±0,01	3454±162	0,30±0,01	0,58±0,01	0,97±0,01
	Октябрь	248±8	674±18	231±46	3,77±0,59	0,63±0,01	8192±1155	0,28±0,02	0,54±0,02	0,89±0,02
Проба 3	Июнь	1828	4113	–	6,46	0,60	–	0,29	0,48	0,78
	Июль	215	503	78	5,09	0,57	1866	0,32	0,61	0,99
	Август	124±8	341±5	134±17	4,99±0,36	0,64±0,01	2801±104	0,28±0,04	0,56±0,08	0,93±0,05
	Сентябрь	206±3	568±7	82±70	4,09±0,58	0,64±0,01	3363±1242	0,28±0,01	0,59±0,03	0,96±0,01
	Октябрь	223±9	583±27	258±69	4,57±0,47	0,62±0,01	7074±1463	0,27±0,01	0,54±0,02	0,90±0,02
Проба 4	Июнь	2123	4410	–	5,33	0,56	–	0,29	0,53	0,74
	Июль	185	459	223	5,52	0,60	4905	0,29	0,55	0,93
	Август	155±2	446±2	281±21	4,50±0,61	0,65±0,01	5958±207	0,26±0,01	0,54±0,01	0,96±0,01
	Сентябрь	238±9	520±5	206±54	5,41±0,21	0,55±0,02	3533±909	0,26±0,04	0,57±0,01	0,92±0,03
	Октябрь	203±5	517±8	179±54	5,05±0,62	0,61±0,02	4579±1093	0,27±0,02	0,55±0,02	0,94±0,04

октябрь), а также в период с июня по июль. Происходило возрастание тотального индекса в мониторинговой точке 3 и последующее снижение в точках 4 и 5 (см. рис. 3). Исключение составили результаты измерений за август. Максимальные значения PI наблюдали в мониторинговой точке 1, после чего происходило его значительное снижение по ходу русла реки (рис. 3). Это может быть связано с цветением сине-зеленых водорослей в Нижнекальмиусском водохранилище, что оказывало негативное воздействие на остальные группы фитопланктона.

Динамика изменения значений квантового выхода флуоресценции фитопланктона р. Кальмиус в летне-осенний период представлены на рис. 4.

Достоверного изменения значений квантового выхода флуоресценции (Φ_o) в период с июня по июль в четырех исследуемых мониторинговых точках не наблюдалось (см. рис. 4). Наибольшие значения Φ_o , достигающие 0,72 единицы, были

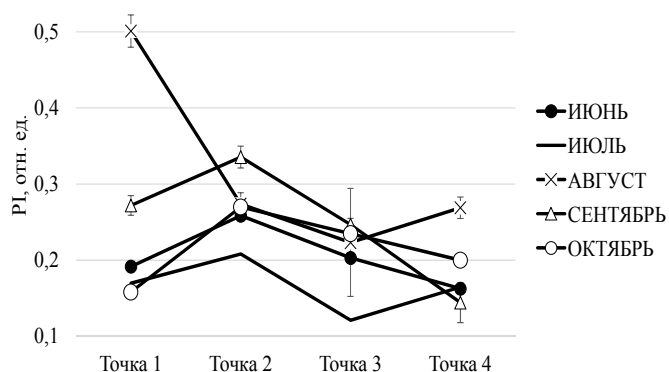


Рис. 3. Динамика изменения фотосинтетического индекса (PI) фитопланктона р. Кальмиус

получены в августе для мониторинговых точек 1 и 2. В период с августа по октябрь происходило значительное снижение исследуемого параметра в точке 3 в сравнении со значениями Φ_0 в точке 2.

Показатели Φ_0 PI являются интегральными характеристиками состояния фитопланктона и отражают эффективность функционирования фотосинтетического аппарата, в частности ФС II. Снижение данных показателей свидетельствует об ингибировании фотосинтетических процессов в клетках.

Кроме того, отсутствие достоверных изменений показателей флуоресценции микроводорослей, отражающих особенности функционирования отдельных структурных компонентов ФС II, указывает на отсутствие каких-либо негативных изменений в структуре фотосинтетического аппарата.

Таким образом, происходит снижение эффективности и скорости протекания фотосинтетических процессов, однако повреждения функциональных компонентов фотосинтетического аппарата не происходит.

Выводы. Согласно результатам физико-химического анализа проб воды за летний период определено превышение предельно допустимых концентраций Mg^{2+} во всех мониторинговых точках. Выявлено низкое содержание PO_4^{3-} , которые являются биогенными веществами для фитопланктона. Исходя из полученных значений УКИЗВ воду в русле р. Кальмиус можно считать условно чистой.

Результаты, полученные с помощью флуориметрического метода, указывают на снижение фотосинтетической активности фитопланктона в мониторинговых точках (точки 3 и 4), расположенных ниже по течению, чем предполагаемый источник загрязнения поверхностных вод.

Предположительным негативным фактором на исследуемом участке русла реки Кальмиус являются сточные воды ПАО «Донецкий металлургический завод», воздействие которых проявляется при условии соблюдения существующих норм содержания различных веществ в природных водах [8].

Разработанная в ходе исследования методика пространственно-распределенного биомониторинга поверхностных вод позволяет эффективно применять метод флуориметрии для анализа состояния фитопланктона и оценки степени негативного антропогенного воздействия на водные объекты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беспалова С.В. Использование метода флуориметрии в биомониторинге водного объекта / С.В. Беспалова, С.М. Романчук, С.В. Чуфицкий // V Съезд биофизиков России. Материалы докладов: в 2 т. – Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2015. – Т. 2. – С. 344.
2. Концепция распределения автоматизированного биомониторинга для Донбасса / С.В. Беспалова, С.М. Романчук, С.В. Чуфицкий и др. // Донецкие чтения 2016 Образование, наука и вызовы современности: Материалы I Международной научной конференции (16-18 мая 2016 г.). – Том 2: Химические, биологические и медицинские науки. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016 – С. 244-246.

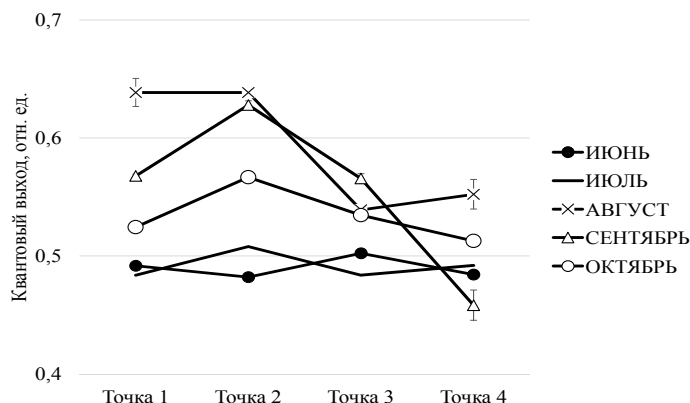


Рис. 4. Изменение квантового выхода флуоресценции фитопланктона р. Кальмиус

3. Флуориметрия хлорофилла фитопланктона и другие методы в мониторинге водных объектов Донбасса / С.В. Беспалова, С.М. Романчук, А.В. Васильев и др. // Тезисы докладов Всероссийской научной конференции «Мониторинг состояния и загрязнения окружающей среды. Основные результаты и пути развития». Москва, 20-22 марта 2017 г. — М.: ФГБУ «ИГКЭ Росгидромета и РАН», 2017.
4. Маторин Д. Н. Определение состояния растений и водорослей по флуоресценции хлорофилла : учебно-методическое пособие / Д.Н. Маторин. – Москва, 2010. – 368 с.
5. Об использовании зависимостей параметров флуоресценции хлорофилла от освещенности для изучения фотосинтетической активности фитопланктона / Д.Н. Маторин, В.А. Осипов, О.В. Яковлева и др. // Вода: химия и экология. – 2011. – № 4. – С. 44-49.
6. Использование флуоресценции хлорофилла «а» для биотестирования водной среды / В.А. Осипов, Г.М. Абдурахманов, А.А. Гаджиев и др. // Юг России: экология, развитие. – 2012. – Т. 7, вып. 2. – С. 93-100.
7. Рубин А. Б. Биофизика фотосинтеза и методы экологического мониторинга / А. Б. Рубин // Технология живых систем. – 2005. – Т. 2. – С. 47–68.
8. ГН 2.1.5.1315-03 Предельно допустимые концентрации (ПДК) химических веществ в воде водных объектов хозяйственно-питьевого и культурно-бытового водопользования. Зарегистрированы Минюстом России № 4550 от 19.05.2003 г. Нефтяник. – 2003. – 94 с.
9. РД 52.24.643-2002 Методические указания. Метод комплексной оценки степени загрязнения поверхностных вод по гидрохимическим показателям. Федеральная служба по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды. Утвержден и введен в действие Росгидрометом 03.12.2002 г. Технорматив. – 2013 г. – 18 с.
10. Govindjee. Chlorophyll *a* Fluorescence: A Bit of Basics and History. – In: Chlorophyll fluorescence: a signature of photosynthesis / ed. by Papageorgiou GC, Govindjee. – Springer. – The Netherlands, Dordrecht. – 2004. – P. 1–42.
11. Maxwell K. Chlorophyll fluorescence — a practical guide / K. Maxwell, G. N. Johnson // J. Exp. Bot. – 2000. – Vol. 51, No 345. – P. 659–668.
12. Переменная и замедленная флуоресценция хлорофилла а — теоретические основы и практическое приложение в исследовании растений / В.Н. Гольцев, М.Х. Каладжи, М.А. Кузманова, С.И. Аллахвердиев. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. – 220 с.
13. Корнеев Д. Ю. Информационные возможности метода индукции флуоресценции хлорофилла / Д. Ю. Корнеев. – К.: Альтерпрес. – 2002. – 188 с.
14. Strasser R.J. Polyphasic chlorophyll *a* fluorescent transient in plants and cyanobacteria / R.J. Strasser, A. Srivastava, Govindjee // Photochem. Photobiol. – 1995. – Vol. 1. – P. 32–42.
15. Strasser R.J. The fluorescence transient as a tool to characterize and screen photosynthetic samples / R.J. Strasser, A. Srivastava, M. Tsimilli-Michael // Probing Photosynthesis: Mechanism, Regulation & Adaptation. – Taylor & Francis, London, 2000. — P. 443–480.
16. Schreiber U. Chlorophyll fluorescence as a nonintrusive indicator for rapid assessment of *in vivo* photosynthesis / U. Schreiber, W. Bilger, C. Neubauer // Ecophysiology of photosynthesis. – Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1994. – P. 49–70.
17. Крылов А.Б. Экосистема малой реки в изменяющихся условиях среды. Т-во научн. изданий КМК / А.Б. Крылов. – 2007. – 372 с.
18. Trishala K. Bioindicators: the natural indicator of environmental pollution / K. Trishala Parmar, D. Rawtani, Y. K. Agrawal // Frontiers in Life Science. – 2016 – Vol. 9. – P. 110-118.

Поступила в редакцию 12.11.2018 г.

BIOMONITORING OF SURFACE WATERS UNDER ANTHROPOGENIC PRESSURE ON THE EXAMPLE OF THE KALMIUS RIVER

S.V. Bespalova, S.V. Chufitsky, S.M. Romanchuk, A.S. Krivyakin

A study was made of a separate section of the Kalmius River channel, which was subjected to intensive pollution by wastewaters. Was analyzed the physicochemical composition of water samples and the state of phytoplankton based on the analysis of chlorophyll fluorescence induction curves using the method of fluorimetry. The negative effect of industrial wastewater on the course of photosynthesis in the photosynthetic

apparatus of phytoplankton of the Kalmius river was shown. A number of test functions, that most effectively reflect the degree of pollution effect on biota, are selected.

Keywords: Kalmius river; fluorimetry; biomonitoring; phytoplankton; wastewater.

Беспалова Светлана Владимировна

доктор физико-математических наук, профессор;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
г. Донецк; ректор
E-mail: rector@donnu.ru

Bespalova Svetlana V.

Doctor of Phisico-Mathematical Sciences, Full Professor;
Donetsk National University, Donetsk; Rector

Чуфицкий Сергей Викторович

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
г. Донецк;
старший преподаватель кафедры биофизики
E-mail: ChufitskiySergey@yandex.ru
Тел: +380713217746

Chufitskiy Sergey V.

Donetsk National University, Donetsk;
Senior Lecturer at the Department of Biophysics

Романчук Сергей Михайлович

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
г. Донецк;
директор СКТБ «Турбулентность»
E-mail: s.romanchuk@donnu.ru

Romanchuk Sergey M.

Donetsk National University, Donetsk
Director of SEB «Turbulence»

Кривякин Александр Сергеевич

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
г. Донецк;
Научный сотрудник СКТБ «Турбулентность»

Krivyakin Alexander.S.

Donetsk National University, Donetsk
Researcher of SEB «Turbulence»

УДК 612.8:159.95

ВЛИЯНИЕ АНТРОПОГЕННЫХ ФАКТОРОВ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ НЕРВНОЙ СИСТЕМЫ СТУДЕНТОВ

© 2018. Д.А. Кочура

Показано, что наибольшее влияние на функциональное состояние нервной системы студентов, проживающих в техногенном регионе, оказывают образ жизни и бытовые условия. Менее выраженное по степени влияния имеют наличие хронических заболеваний и шумовое загрязнение окружающей среды. Антропогенные факторы преимущественно оказывают влияние на показатели объема, устойчивости, производительности и эффективности внимания; объема кратковременной и оперативной памяти, фоновую активность нервной системы. При этом, объем оперативной памяти, производительность и эффективность внимания могут уменьшаться и увеличиваться с изменением отрицательного влияния на организм антропогенных факторов окружающей среды.

Ключевые слова: антропогенные факторы, функциональное состояние, нервная система, психодинамические показатели.

Введение. В настоящее время доказано влияние на состояние здоровья населения таких факторов, как образ жизни, экологические условия, генотип, качество и доступность медицинской помощи. В этом перечне ведущим является образ жизни, для характеристики которого следует учитывать, помимо общеизвестных вредных привычек (курение, употребление алкоголя и наркотиков) [1], еще и редко упоминаемые факторы – злоупотребление лекарствами, характер питания, условия труда, материально-бытовые условия, семейное положение и др.). Установлено, что этот фактор определяет здоровье человека на 50–55 % [2–7].

Окружающая среда (природно-климатические факторы, состояние атмосферного воздуха, питьевой воды, почвы, пищевых продуктов) определяет здоровье населения в пределах 20–25 %. На долю генетических факторов приходится 15–20 %, на здравоохранение (своевременность и качество медицинской помощи, эффективность профилактических мероприятий) – 8–10 %, на долю прочих факторов – 2 % [2–5, 8–9]. Учитывая изложенное, вполне разумно было бы повышать адаптационный потенциал организма человека за счет оптимизации образа жизни – сна, двигательной активности, питания, эндоэкологии [1, 4, 7, 10].

В то же время, техногенное загрязнение окружающей среды носит глобальный характер с тенденцией к дальнейшему росту, качество лечебной и профилактической медицины остается неудовлетворительным [11–13]. В связи с этим долевой вклад экологического фактора и качества медицинской помощи в ухудшение здоровья населения может оказаться значительно больше [14–17]. Так, по данным ВОЗ, более 80% всех заболеваний человека связано с теми или иными аспектами экологического нарушения в биосфере [18–22]. При этом дети, подростки, старики и люди с хроническими заболеваниями представляют собой наиболее уязвимые группы [1, 8, 9, 13, 20, 23–27].

Возрастание техногенной нагрузки на человека дополняется рядом нерешенных вопросов.

Так, в современном мегаполисе психологические, социальные и технологические воздействия оказывают взаимоусиливающий эффект [2–3, 11, 13, 22, 28]. Например, на распространенность аллергических заболеваний значительно влияют атмосферные

загрязнения и неудовлетворительные жилищные условия [24, 29]. В то же время, из-за малой интенсивности их действие не проявляется, происходит бессимптомное накопление патологических изменений [15, 22, 29, 30]. Поэтому только комплексное определение ранних изменений в организме может дать прогностически значимые результаты [12, 15, 17, 31].

Ряд авторов указывает на индивидуальные особенности психофизиологических и физиологических реакций в ответ на действие стрессоров [7, 32–33], в т.ч. и экологических [16, 26, 34–40]. В общей адаптивной реакции может преобладать психофизиологический ("поведенческий") компонент, позволяющий ослабить проявление физиологической ("вегетативной") адаптации [33–34, 41–43]. В некоторых случаях механизмы специфической адаптации могут оказаться антагонистичными, что снижает их эффект [34–35]. Таким образом, изменение параметров окружающей среды вызывает соответствующие компенсаторные реакции различных систем организма [18, 26, 37, 39–40, 44], которые на сегодня изучены недостаточно.

Уже создано множество мониторинговых систем, предназначенных для наблюдения за состоянием здоровья населения и влияющими на него факторами [7, 11, 16, 45–48]. Они позволяют идентифицировать патологические нарушения, диагностировать ассоциированные с ними состояния, верифицировать диагноз, выполнить риск-стратификацию больных для дифференцированного лечения, первичной и вторичной профилактики [26, 49–51]. С помощью системного мониторинга в конечном итоге устанавливают причинно-следственные связи в системе «здоровье населения – среда обитания». К сожалению, данные мониторинга разрозненны, рассматриваются большей частью изолированно друг от друга, обрабатываются по-разному и недостаточно сопоставляются [7, 14, 17, 26, 28].

Вышеуказанные вопросы обуславливают необходимость комплексного изучения как физиологических, так и психофизиологических механизмов адаптации и дезадаптации в ответ на действие экогенных стрессоров. В связи с этим, **цель** данной работы – изучить структуру связей между психофизиологическими свойствами личности и различными факторами, характеризующими влияние загрязнений окружающей среды на организм человека.

Материал и методы. Исследования проведены с участием 24 условно здоровых студентов биологического факультета ДонНУ обоего пола, возрастом от 19 до 23 лет, которые дали на участие добровольное информированное согласие. У них в состоянии спокойного бодрствования по стандартным методикам [18, 52–54] определяли параметры высшей нервной деятельности (ВНД), приведенные в табл. 1. Для экспертной оценки влияния экологических факторов использовали соответственно 6 шкал, включающих от 9 до 15 утверждений. Степень согласия оценивалась респондентом по 3-балльной системе, после чего для каждого фактора рассчитывалась средняя арифметическая.

Статистическую обработку выполняли в пакете программ STATISTICA (StatSoft-Russia, 1999). Для оценки силы связи между переменными использовали непараметрический γ -коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Для оценки степени различий между группами использовали непараметрический U-критерий Манна – Уитни для независимых разноразмерных выборок.

Результаты и их обсуждение. На начальном этапе исследований определяли функциональное состояние (ФС) нервной системы жителей техногенного региона Донбасса по психодинамическим показателям. В качестве таких показателей использовали свойства внимания и различных типов памяти (объем и устойчивость,

Таблица 1

Психодинамические показатели ФС нервной системы у жителей техногенного региона (n = 20)

Свойства ВНД и нервной системы	Показатели определяемых свойств	Значения показателей ($\bar{x} \pm m$)	Значения нормы [8, 21-22]
Устойчивость внимания по Богомолу [52]	Максимальное количество точек, положение которых испытуемый точно воспроизводит, ед.	$5,4 \pm 0,24$	≥ 4
	Общее количество точек, положение которых испытуемый точно воспроизвел в течение опыта, ед.	$34,9 \pm 1,23$	≥ 30
Устойчивость и переключение внимания по Бурдону [53]	Время выполнения корректурной пробы, с	$440,8 \pm 37,78$	≤ 600
Продуктивность внимания по Бурдону [53]	Количество найденных букв «к» и «р», ед.	$142,5 \pm 0,73$	≥ 140
Эффективность внимания по Бурдону [53]	Количество ошибок за все время выполнения пробы, ед.	$3,4 \pm 0,68$	≤ 10
Объем динамического внимания по Шульте-Платонову [53]	Среднее время поиска чисел от 1 до 25 в 4 таблицах, с	$36,3 \pm 2,80$	≤ 42
	Лучший результат, с	$32,0 \pm 2,18$	–
Объем оперативной памяти по Ануфриеву-Костроминной [18]	Среднее количество верно выполненных сложений, ед.	$3,6 \pm 0,21$	≥ 3
Объем кратковременной памяти по Джекобсу [53]	Максимальное количество верно воспроизведенных чисел, ед.	$6,4 \pm 0,37$	≥ 6
Объем кратковременной памяти по Крису-Семаго [53]	Количество верно воспроизведенных образов (изображений), ед.	$13,1 \pm 0,55$	≥ 6
Объем долговременной памяти по Лурия [53]	Количество верно воспроизведенных слов, ед.	$12,8 \pm 1,20$	≥ 12
Фоновый уровень активности НС по Ильину [53]	Среднее количество движений кистью в течение 10-секундного теппинг-теста, ед.	$44,4 \pm 4,47$	–
Слабость НС по Ильину [53]	Снижение частоты движений кистью в течение 90-секундного теппинг-теста, количество движений, ед.	$9,4 \pm 3,38$	–
Ситуативная тревожность по Спилбергу [53]	Количество баллов	$33,1 \pm 1,29$	≤ 44
Личностная тревожность по Спилбергу [53]	Количество баллов	$39,9 \pm 2,16$	≤ 44
Учебный стресс по Щербатых [54]	Количество баллов	$101,5 \pm 16,37$	≤ 130
Общая стрессовая чувствительность по Щербатых [54]	Количество баллов	$88,3 \pm 5,32$	≤ 86

производительность и эффективность), фоновый уровень активации нервной системы и ее выносливость, а также показатели уровня стресса и тревожности (см. табл. 1). Статистическая обработка полученных результатов показала, что средние значения всех определявшихся показателей находились в пределах нормы или близки к ним, за исключением объема оперативной памяти ($3,6 \pm 0,21$ ед.) и кратковременной образной памяти ($13,1 \pm 0,55$ ед.), вербальной долговременной памяти ($12,8 \pm 1,20$ ед.). Следует заметить, что образная память оказалась лучше вербальной и лучше памяти на числа, а по объему была близка к долговременной вербальной памяти. Объяснить этот результат можно как индивидуальными особенностями процессов запоминания, так и

особенностями методики – для запоминания предлагалось 16 рисунков, которые необходимо было изучать в течение минуты, что позволяло исследуемым использовать мнемические приемы. Достаточно высокой в среднем оказалась эффективность внимания ($3,4 \pm 0,68$ ед.) и устойчивость внимания, определявшаяся по методике Бурдона ($440,8 \pm 37,78$ ед.).

Таким образом, показатели ФС нервной системы испытуемых находились в пределах общепринятых норм. В то же время, согласно литературным данным, шумовое, электромагнитное, химическое и другие виды загрязнения оказывают негативное влияние на состояние организма человека и, в первую очередь его регуляторных систем [38, 44]. Донбасс – крупный промышленный регион, где сконцентрированы сотни крупных производственных объединений и предприятий топливно-энергетического комплекса, горнодобывающей, металлургической, химической промышленности, тяжелого, транспортного и угольного машиностроения, промышленности строительных материалов, агропромышленного комплекса. Высокая концентрация промышленного, химического и других производств, транспортной инфраструктуры обуславливают значительное загрязнение окружающей среды [12]. Средние или высокие величины психофизиологических показателей жителей этого региона могут указывать на: высокие адаптивные и компенсаторные возможности нервной системы; отсутствие связи между ФС ВНД и антропогенными факторами среды; необходимость более дифференцированного подхода к оценке этой связи [7, 26, 32].

На следующем этапе исследований оценивалось влияние на испытуемых отдельных антропогенных факторов и связи между ними. В табл. 2 приведены результаты оценки испытуемыми влияния на организм различных факторов. Установлено, что наиболее негативными факторами являются бытовые условия ($2 \pm 0,07$ баллов) и образ жизни испытуемых ($2,3 \pm 0,1$ баллов).

Таблица 2

Оценка факторов, характеризующих влияние загрязнений окружающей среды на организм

Факторы	Субъективная оценка ($\bar{x} \pm m$)
Бытовые условия, баллы	$2,03 \pm 0,068$
Электро-магнитное загрязнение среды, баллы	$1,82 \pm 0,066$
Шумовое загрязнение среды, баллы	$1,75 \pm 0,109$
Химическое загрязнение среды, баллы	$1,64 \pm 0,093$
Образ жизни, баллы	$2,28 \pm 0,097$
Наличие хронических заболеваний, баллы	$1,79 \pm 0,115$
Совокупное действие факторов внешней среды, баллы	$1,89 \pm 0,046$

Анализ связей между факторами, характеризующими влияние загрязнений окружающей среды на организм, показал их относительную независимость. Выявлены достаточно высокие корреляции между наличием хронических заболеваний и уровнем шумового загрязнения ($r = 0,69$; $p \leq 0,05$) и наличием хронических заболеваний и неудовлетворительными бытовыми условиями ($r = 0,51$; $p \leq 0,05$). Таким образом, наибольшее влияние на организм оказывают образ жизни и бытовые условия, непосредственно связанные с наличием хронических заболеваний [38]. Однако возможно и обратное влияние – хронические заболевания могут влиять на чувствительность организма к факторам, наиболее часто проявляющимся в повседневной жизни.

На заключительном этапе исследований изучали влияние различных антропогенных факторов на показатели ФС центральной нервной системы студентов.

Проведенный корреляционный анализ показал, что наибольшая зависимость установлена между антропогенными факторами и показателям внимания и оперативной памяти. Так, объем оперативной памяти был связан с четырьмя, а объем внимания – с тремя факторами при уровне $p \leq 0,01$; производительность и эффективность внимания связаны с четырьмя факторами при уровне $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$; устойчивость внимания, объем кратковременной памяти на числа и уровень фоновой активации нервной системы имели выраженную связь только с одним фактором ($p \leq 0,01$, $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,05$ соответственно) (табл. 3).

Таблица 3

Структура связей между психодинамическими показателями ФС нервной системы и факторами, характеризующих влияние загрязнений окружающей среды на организм

Психодинамические показатели	Коэффициенты корреляции (r) с исследуемыми факторами						
	Бытовые условия	Электромагнитное излучение	Шумовое загрязнение	Химическое загрязнение	Способ жизни	Наличие хронических заболеваний	Все
Устойчивость внимания, общее количество объектов	0,02	0,24	-0,46	0,33	-0,64	-0,24	-0,12
Объем внимания по методике Шульте-Платонова (лучший результат), с	-0,74	-0,75	0,38	-0,41	0,15	-0,82	-0,46
Объем оперативной памяти на числа, количество объектов	0,11	0,69	-0,75	-0,64	0,75	0,11	0,11
Объем кратковременной памяти на числа по методике Джекобса, количество объектов	0,25	-0,15	-0,16	0,22	-0,62	0,08	-0,17
Объем образной кратковременной памяти, количество объектов	0,29	-0,12	-0,25	-0,22	-0,32	0,10	0,01
Объем вербальной долговременной памяти, количество объектов	0,02	-0,06	0,15	0,06	-0,06	0,20	0,06
Теппинг оптимальный, количество точек	-0,49	0,03	-0,18	0,29	-0,36	-0,61	-0,48
Падение теппинга 90 с, количество точек	-0,24	-0,47	-0,30	0,41	-0,41	-0,29	-0,38
Устойчивость и переключения внимания по методике Бурдона, с	0,31	0,36	0,40	-0,12	-0,07	0,31	0,45
Производительность внимания по методике Бурдона, количество знаков	0,57	-0,30	0,70	-0,54	0,19	0,54	0,39
Эффективность внимания по методике Бурдона, количество ошибок	-0,54	0,26	-0,72	0,54	-0,33	-0,54	-0,45

Примечание: Жирным выделены коэффициенты, значимые при уровне $p \leq 0,05$; дополнительно подчеркнуты коэффициенты, значимые при уровне $p \leq 0,01$.

Следует отметить, что выносливость нервной системы, устойчивость и переключение внимания по методике Бурдона, объем образной кратковременной и вербальной долговременной памяти имели слабо выраженные связи с исследуемыми факторами (табл. 3). Такую особенность можно объяснить незначительной динамичностью этих показателей состояния нервной системы. Так, снижение тэппинга считают показателем выносливости нервной системы – типологического свойства, обусловленного генетически и тесно связанного с нейродинамическими свойствами личности [38]. То же самое можно предположить и относительно устойчивости внимания, определявшейся по методике Бурдона. Объем образной кратковременной и вербальной долговременной памяти, наоборот, зависят от применения мнемических техник, развития воображения, то есть, от собственного опыта и ФС организма [44].

Таким образом, факторы, характеризующие влияние загрязнений окружающей среды на организм, преимущественно связаны с параметрами психодинамической сферы – объемом, устойчивостью, производительностью и эффективностью внимания; объемом кратковременной и оперативной памяти, фоновым уровнем активности нервной системы. Выносливость нервной системы, устойчивость и переключение внимания, объем образной и вербальной долговременной памяти менее зависимы от исследуемых факторов.

Сравнение исследуемых факторов по количеству связей с психодинамическими показателями показало, что наибольшее влияние оказывали - наличие хронических заболеваний (4 значимых корреляции, $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$ и шумовое загрязнение (3 значимых корреляции, $p \leq 0,01$). С бытовыми мн и образом жизни выявлено только одна или две корреляции при уровне $p \leq 0,01$. Между усредненным показателем совокупного влияния исследуемых факторов и психодинамическими показателями не установлено ни одной значимой связи, что может свидетельствовать о разнонаправленности действия этих факторов. Кроме этого, показатели производительности внимания ($r = 0,57$), эффективности внимания ($r = 0,54$) и объема оперативной памяти на числа ($r = 0,69$; $r = 0,75$) имели прямую зависимость с исследуемыми факторами, как и объем внимания (табл. 3).

Для уточнения характера изменений психодинамических показателей от влияния исследуемых факторов был проведен сравнительный анализ между группами испытуемых с высокими и низкими значениями влияния отдельных факторов среды. Установлено, что наибольшее количество различий было характерно для групп, отличающихся по бытовым условиям (табл. 4). Наиболее выражены различия по показателям устойчивости и объема внимания, его производительности и эффективности, а также фонового уровня активности нервной системы (табл. 4).

Таблица 4

Психодинамические показатели ФС нервной системы испытуемых в группах с различными бытовыми условиями

Показатели	Значения показателей		p
	Группа 1	Группа 2	
Устойчивость внимания, общее количество объектов	33,2 ± 0,77	36,6 ± 1,34	0,023
Объем внимания по Шульте-Платонову (лучший результат), с	34,9 ± 0,62	26,1 ± 2,19	0,004
Объем оперативной памяти на числа, количество объектов	3,5 ± 0,17	3,9 ± 0,21	0,286
Объем кратковр. памяти по Джекобсу, количество объектов	6,7 ± 0,44	6,3 ± 0,42	0,345
Объем образной кратковременной памяти, количество объектов	13,2 ± 0,49	13,0 ± 0,60	0,912
Объем вербальной долговременной памяти, количество объектов	12,6 ± 1,29	13,0 ± 1,10	0,912
Теппинг оптимальный, количество точек	37,3 ± 5,22	51,6 ± 1,13	0,052
Падение теппинга 90 с, количество точек	6,0 ± 1,83	13,8 ± 4,33	0,228
Устойчивость и переключения внимания по Бурдону, с	422,2 ± 13,80	471,7 ± 66,72	0,562
Производительность внимания по Бурдону, количество знаков	143,8 ± 0,39	140,3 ± 0,21	≤ 0,001
Эффективность внимания по Бурдону, количество ошибок	2,2 ± 0,39	5,3 ± 0,21	≤ 0,001

Примечание: Среднее значение отрицательного влияния бытовых условий для группы 1 составляет 2,22 балла, для группы 2 - 1,85 балла (различия достоверны при уровне $p \leq 0,001$).

Студенты группы, характеризующейся более неблагоприятными бытовыми условиями (группа 1), отличались большими значениями производительности и эффективности внимания, тогда как другие психодинамические показатели у них были хуже.

Показатели ФС нервной системы студентов группы с различным уровнем влияния электромагнитного излучения приведены в таблице 5.

Таблица 5

Показатели ФС нервной системы студентов в группах с различным уровнем влияния электромагнитного излучения

Показатели	Значения показателей		р
	Группа 1	Группа 2	
Устойчивость внимания, общее количество объектов	34,8 ± 0,83	35,0 ± 1,53	0,684
Объем внимания по Шульте-Платонову (лучший результат), с	29,7 ± 2,68	34,2 ± 0,57	0,394
Объем оперативной памяти на числа, количество объектов	3,9 ± 0,00	3,3 ± 0,17	0,029
Объем кратковр. памяти по Джекобсу, количество объектов	6,0 ± 0,36	7,0 ± 0,36	0,043
Объем образной кратковременной памяти, количество объектов	12,8 ± 0,53	13,4 ± 0,54	0,315
Объем вербальной долговременной памяти, количество объектов	13,2 ± 1,14	12,4 ± 1,24	0,684
Теппинг оптимальный, количество точек	45,7 ± 3,56	43,1 ± 5,18	0,912
Падение теппинга 90 с, количество точек	6,0 ± 1,90	11,8 ± 3,62	0,345
Устойчивость и переключения внимания по Бурдону, с	486,3 ± 64,66	413,4 ± 12,67	0,313
Производительность внимания по Бурдону, количество знаков	141,0 ± 0,37	143,4 ± 0,62	0,031
Эффективность внимания по Бурдону, количество ошибок	4,6 ± 0,21	2,6 ± 0,62	0,051

Примечание: Среднее значение отрицательного влияния электромагнитного излучения для группы 1 составляет 2,01 балла, для группы 2 - 1,64 балла (различия достоверны при уровне $p \leq 0,001$).

Испытуемые, оценивавшие более отрицательное влияние электромагнитного излучения на организм, имели худшие показатели кратковременной памяти ($p = 0,043$), производительности внимания ($p = 0,031$) и его эффективности ($p = 0,051$). В то же время, у этой группы лучше оперативная память ($p = 0,029$).

Группа студентов, которые отмечали большее влияние на организм шумового загрязнения, отличалась худшей устойчивостью внимания ($p = 0,052$), однако лучшей его производительностью ($p = 0,002$) и эффективностью ($p = 0,002$) (табл. 6).

Таблица 6

Показатели ФС нервной системы студентов в группах с различным уровнем влияния шумового загрязнения окружающей среды

Показатели	Значения показателей		р
	Группа 1	Группа 2	
Устойчивость внимания, общее количество объектов	33,0 ± 0,67	36,8 ± 1,34	0,052
Объем внимания по Шульте-Платонову (лучший результат), с	34,1 ± 1,04	27,8 ± 3,18	0,109
Объем оперативной памяти на числа, количество объектов	3,5 ± 0,17	3,9 ± 0,00	0,286
Объем кратковр. памяти по Джекобсу, количество объектов	6,7 ± 0,42	6,3 ± 0,42	0,345
Объем образной кратковременной памяти, количество объектов	13,0 ± 0,42	13,2 ± 0,65	0,481
Объем вербальной долговременной памяти, количество объектов	13,4 ± 1,07	12,2 ± 1,29	0,393
Теппинг оптимальный, количество точек	37,5 ± 5,29	51,3 ± 1,18	0,105
Падение теппинга 90 с, количество точек	6,0 ± 1,83	13,8 ± 4,33	0,228
Устойчивость и переключения внимания по Бурдону, с	442,5 ± 3,41	439,0 ± 53,31	0,105
Производительность внимания по Бурдону, количество знаков	144,0 ± 0,46	141,0 ± 0,46	0,002
Эффективность внимания по Бурдону, количество ошибок	2,0 ± 0,46	4,7 ± 0,41	0,002

Примечание: Среднее значение отрицательного влияния шумового загрязнения для группы 1 составляет 2,04 балла, для группы 2 – 1,46 балла (различия достоверны при уровне $p \leq 0,001$).

Испытуемые группы, которые отмечали выраженное отрицательное влияние на организм неблагоприятного образа жизни, имели более низкую устойчивость внимания ($p = 0,035$) и кратковременную память ($p = 0,031$) и лучшую оперативную память ($p = 0,029$) (табл. 7). В группах испытуемых, отличающихся по оценке уровня влияния на организм химического загрязнения, не обнаружено достоверных различий по психодинамическим показателям.

Таблица 7

Показатели ФС нервной системы студентов в группах с разным образом жизни

Показатели	Значения показателей		p
	Группа 1	Группа 2	
Устойчивость внимания, общее количество объектов	32,2 ± 0,77	37,6 ± 1,34	0,035
Объем внимания по Шульте-Платонову (лучший результат), с	30,9 ± 2,79	33,1 ± 1,12	1,063
Объем оперативной памяти на числа, количество объектов	3,9 ± 0,00	3,3 ± 0,17	0,029
Объем кратковр. памяти по Джекобсу, количество объектов	5,5 ± 0,28	7,0 ± 0,27	0,031
Объем образной кратковременной памяти, количество объектов	12,8 ± 0,65	13,4 ± 0,40	0,579
Объем вербальной долговременной памяти, количество объектов	11,2 ± 1,32	14,4 ± 0,75	0,190
Теппинг оптимальный, количество точек	47,1 ± 4,09	41,7 ± 4,65	0,912
Падение теппинга 90 с, количество точек	6,7 ± 2,32	11,4 ± 3,59	0,662
Устойчивость и переключения внимания по Бурдону, с	407,3 ± 25,55	460,8 ± 37,94	0,875
Производительность внимания по Бурдону, количество знаков	142,3 ± 0,92	142,6 ± 0,62	0,875
Эффективность внимания по Бурдону, количество ошибок	3,3 ± 0,76	3,4 ± 0,62	0,875

Примечание: Среднее значение отрицательного влияния образа жизни для группы 1 составляет 2,53 балла, для группы 2 – 2,03 балла (различия достоверны при уровне $p \leq 0,001$).

Таким образом, наибольшая чувствительность к воздействию антропогенных загрязняющих факторов окружающей среды характерна для таких показателей, как устойчивость и объем внимания, объем оперативной и кратковременной памяти, фоновый уровень активности нервной системы, производительность и эффективность внимания. При этом, если устойчивость внимания, объем кратковременной памяти и фоновый уровень активности с увеличением отрицательного влияния антропогенного фактора в большинстве случаев ухудшается, то объем оперативной памяти, производительность и эффективность внимания может как уменьшаться, так и увеличиваться (табл. 4–7), что, вероятно, свидетельствует о компенсаторном характере психофизиологических функций [32]. Такую неоднозначность изменений можно объяснить сложностью иерархии исследуемых параметров, относящихся к психодинамическому уровню организации личности [32, 34, 44].

Выводы. В результате проведенных исследований установлено, что наибольшее влияние на функциональное состояние нервной системы студентов, проживающих в техногенном регионе, оказывают образ жизни и бытовые условия. Менее выраженное по степени влияния имеют наличие хронических заболеваний (4 значимых корреляции, $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$) и шумовое загрязнение окружающей среды (3 значимых корреляции, $p \leq 0,01$). Величины показателей функционального состояния нервной системы у испытуемых находились в пределах общепринятых норм.

Антропогенные факторы преимущественно оказывали влияние на показатели объема ($p \leq 0,01$), устойчивости ($p \leq 0,05$), производительности и эффективности внимания ($p \leq 0,05$); объема кратковременной и оперативной памяти ($p \leq 0,01$), фонового уровня активности нервной системы ($p \leq 0,05$). При этом, объем оперативной памяти, производительность и эффективность внимания могут уменьшаться и

увеличиваться с изменением отрицательного влияния на организм антропогенных факторов окружающей среды. Выносливость нервной системы, устойчивость и переключение внимания, объем образной и вербальной долговременной памяти имели менее выраженную зависимость от исследованных факторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусина А.А. Значимость эмоционального стресса в развитии девиантных состояний / Мусина А.А., Сулейменова Р.К., Сакенова А.К. // Международный научный журнал «Инновационная наука». – 2015. – № 10. – С. 210–230.
2. Лисицын Ю. П. Общественное здоровье и здравоохранение / Ю. П. Лисицын, Н. В. Полунина. – М.: Медицина, 2002. – 416 с.
3. Лисицын Ю. П. Психологическая медицина / Ю. П. Лисицын. – М.: Медицина, 2004. – 148 с.
4. Методологическая основа здорового питания и проблема нейropsychонутрициологии / Быков А.Т., Маляренко Ю.Е., Маляренко Т.Н. и др. // Воен. мед. – 2008. – № 2. – С. 70–76.
5. Дизрегулирующие влияния погодно-климатических факторов и возможность противостоять им / М.Е. Маляренко, А.Т. Быков, Т.Н. Маляренко, М.В. Шмалый. // Медицинский журнал: научно-практический рецензируемый журнал. – 2009. – № 1. – С. 14–19.
6. Электрофизиологические характеристики спортсменов в связи с содержанием эссенциальных металлов в организме / Е.В. Евстафьева и др. // Таврический медико-биологический вестник. – 2014. – Т. 17, № 2. – С. 36–41.
7. Кисляков П.А. Экопсихология образовательной среды: подходы к проектированию и мониторингу / П.А. Кисляков // Экология человека. – 2017. – № 4. – С. 42–50.
8. Бреус Т.К. Магнитные бури. Медико-биологические аспекты / Бреус Т.К., Рапопорт С.И. – М.: Изд-во «Советский спорт», 2003. – 192 с.
9. Conscious and unconscious sensory inflowe allow effective control of the functions of the human brain and heart at th initial ageing stage / Bykov A.T., Malyarenko T.N., Malyarenko Yu.E. et al. // The Spanish J. of Psychology. – 2006. – N 2. – P. 201–218.
10. Шаханова А.В. Игровые виды спорта и перспективы развития регуляторно-адаптивного статуса детей и подростков / А.В. Шаханова, А.А. Кузьмин. – Майкоп: АГУ, 2015. – 223 с.
11. Железнов-Чукотский Н.К. Экологические факторы здоровья населения на территории Северо-Восточной Азии / Н.К. Железнов-Чукотский, Т.К. Железнова // Научный диалог. – 2015. – № 2. – С. 41–62.
12. Беспалова С.В. Біотехнології для нормалізації екологічного стану Донбасу / С. Беспалова // Донецький вісник наукового товариства ім. Шевченка. – 2006. – Т. 14. – С. 4–21.
13. Гегерь Э.В. Оценка экологических рисков здоровью населения в районах, ранжированных по степени техногенного загрязнения / Э.В. Гегерь, Г.П. Золотникова // Экология человека. – 2018. – № 4. – С. 10–15.
14. Сидоров П.И. Системный мониторинг общественного здоровья / П.И. Сидоров, А.Б. Гудков, Т.Н. Унгурияну // Экология человека 2006. – № 6. – С. 3–8.
15. Мелехова О.П. Использование фундаментальных свойств эмбриональных объектов для исследования потенциальных экологических эффектов техногенных воздействий / О.П. Мелехова // Онтогенез. – 2017. – Т. 48, № 1. – С. 73–83.
16. Экологическая и восстановительная медицина: пути интеграции в целях совершенствования расчета риска развития, профилактики и лечения экологически зависимой патологии / И.П. Бобровницкий, С.Н. Нагорнев, М.Ю. Яковлев, А.Д. Банченко // Российский журнал восстановительной медицины. – 2016. – № 1. – С. 38–47.
17. Применение принципов доказательности при оценке причинной связи нарушений здоровья населения с воздействием вредных химических веществ в окружающей среде / С.А. Горбанев и др. // Экология человека. – 2017. – № 11. – С. 10–17.
18. Сухомлинов А.И. Экология и здоровье человека / А.И. Сухомлинов, И.А. Сухомлинова, А.Н. Микитюк. – Харьков: ХГПУ, 1992. – 128 с.
19. Яцик А.В. Екологічна безпека в Україні / А.В. Яцик. – К.: Генеза, 2001. – 216 с.
20. McMichael A.J. World Health Assembly 2008: climate change and health / McMichael A.J., Neira M., Heymann D.L. // Lancet. – 2008. – Vol. 371, N 9628. – P. 1895–1896.
21. Холматова К.К. Применение экологических исследований в медицине и общественном здравоохранении / К.К. Холматова, А.М. Гржибовский // Экология человека. – 2016. – № 9. – С. 57–64.
22. Сюрин С.А. Факторы риска нарушений здоровья горняков при добыче медно-никелевой руды в кольском заполярье / С.А. Сюрин, А.Н. Никанов // Экология человека. – 2017. – № 9. – С. 22–27.

23. Региональные эколого-геохимические характеристики территории проживания как причинные факторы нарушений репродуктивного здоровья девушек-подростков / Самойлова А.В. и др. // Ульяновский медико-биологический журнал. – 2016. – № 4. – С. 62–69.
24. Леванчук А.В. Возможные причины роста сенсibilизации городского населения районов с высокой интенсивностью автотранспорта / А.В. Леванчук, Е.А. Шилова // Journal of Siberian Medical Sciences. – 2015. – № 2. – С. 42.
25. Энергетическое состояние головного мозга у женщин пожилого возраста, проживающих в условиях севера / И.С. Депутат и др. // Экология человека. – 2016. – № 9. – С. 40–45.
26. Предиктивная оценка индивидуальной восприимчивости организма человека к опасному воздействию холода / В.П. Чашин // Экология человека. – 2017. – № 5. – С. 3–13.
27. Дёмин Д.Б. Особенности нейрофизиологического статуса у детей и подростков (обзор литературы) / Д.Б. Дёмин // Экология человека. – 2017. – № 7. – С. 16–27.
28. Васильев А.В. Шум как фактор экологического риска в условиях урбанизированных территорий / А.В. Васильев // Noise Theory and Practice. – 2015. – Т. 1, № 2. – С. 27–40.
29. Черкасский Б.Л. Системный подход в эпидемиологии / Б.Л. Черкасский. – М.: Медицина, 1988. – 288 с.
30. Cardio-vascular effects of copper sulfate under hormonal hypocalcemia / K.G. Mittsiev at all. // Journal of new medical technologies. – 2016 – V. 23, № 2 – P. 96–100.
31. Разработка подходов к прогнозированию рисков проявления социальной импульсивности у населения, компактно проживающего на отдельных территориях Российской федерации / Ю.А. Шатыр и др. // Материалы V Международной научной конференции «Конфликты в современном мире: международное, государственное и межличностное измерение». – 2016. – С. 592–598.
32. Рыбников В.Ю. Индивидуально-психологические предикторы адаптации дезадаптации специалистов экстремального профиля деятельности / В.Ю. Рыбников, А.А. Дубинский, В.Г. Булыгина // Экология человека. – 2017. – № 3. С. 3–9.
33. Смирнова С.В. Аллергия и псевдоаллергия: экологические аспекты географической патологии / С.В. Смирнова, Е.В. Таптыгина, Е.П. Бронникова // Экология человека. – 2017. – № 7. – С. 3–10.
34. Гора Е.П. Экология человека / Е.П. Гора. – М.: Дрофа, 2007. – 540 с.
35. Медведев В.И. Адаптация человека / Медведев Всеволод Иванович. – СПб.: Ин-т психологии: Ин-т мозга человека, 2003. – 551 с.
36. Корсакова Н.К. Неудавшие дети: нейропсихологическая диагностика трудностей в обучении младших школьников // Корсакова Н.К., Микадзе Ю.В., Балашова Е.Ю.. – М.: Педагогическое общество России, 2001. – 160 с.
37. Типологизация системной адаптации организма человека / Ю.А. Шатыр и др. // Российский медико-биологический вестник имени академика И.П. Павлова. – 2017. – Т. 25, № 3. – С. 362–372.
38. Шевченко О.И. Темпы биологического старения и их взаимосвязь с нейропсихологическими особенностями у пациентов с профессиональными нейроинтоксикациями / О.И. Шевченко, Е.В. Катаманова, О.Л. Лахман // Экология человека. – 2017. – № 3. – С. 10–14.
39. Максимов А.Л. Перестройки кардиоритма и гемодинамики при ортостазе у аборигенов и европеоидов крайнего севера с различными типами вегетативной регуляции / А.Л. Максимов, И.В. Аверьянова // Экология человека. – 2017. – № 8. – С. 21–28.
40. Дегтева Г.Н. Личностный ресурс работников нефтегазодобывающих компаний в контексте адаптации к неблагоприятным климатогеографическим условиям арктики / Г.Н. Дегтева, Я.А. Корнеева, Н.Н. Симонова // Экология человека. – 2017. – № 9. – С. 15–21.
41. Краева Н.В. Человек и среда: естественно-научный и гуманитарный аспекты / Н.В. Краева, В.И. Макарова. – Экология человека. – 2014. – № 1. – С. 27–36.
42. Хаснулин В. И., Хаснулина А. В. Устойчивость к психоэмоциональному стрессу на Севере в зависимости от импринтированного типа адаптивного реагирования // В.И. Хаснулин, А.В. Хаснулина Экология человека. – 2013. – № 1. – С. 8–13.
43. Бызова В.М. Стили психосоматического поведения у студентов с разными приемами саморегуляции в ситуации экзамена / В.М. Бызова, А.Е. Ловягина // Экология человека. – 2017. – № 7. – С. 25–31.
44. Яценко М. В. Экзо- и эндогенные факторы умственной работоспособности студентов / М. В. Яценко, Н. З. Кайгородова // Эколого-психофизиологическое обеспечение умственной деятельности (на примере студентов вуза). – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2014. – 118 с.
45. Онищенко Г.Г. Влияние состояния окружающей среды на здоровье населения. Нерешенные проблемы и задачи / Г.Г. Онищенко // Гигиена и санитария. – 2003. – № 1. – С. 3–10.
46. Онищенко Г.Г. Критерии опасности загрязнения окружающей среды / Г.Г. Онищенко // Гигиена и санитария. – 2003. – № 6. – С. 3–4.

47. Спиридонов А. М. Социально-гигиенический мониторинг – важнейший механизм государственной политики укрепления здоровья населения / А.М. Спиридонов, Н.М. Цунина, В.Г. Зотов // Здоровье населения и среда обитания. – 2004. – № 8. – С. 1–5.
48. Филатов Н.Н. Социально-гигиенический мониторинг и эпидемиологический надзор в условиях Москвы / Н.Н. Филатов, И.Л. Шаханина, Н.И. Брик. – М.: Экоплан, 2001. – 56 с.
49. Симерзин В.В. Мультидисциплинарный подход при лечении больных с хроническими социально значимыми заболеваниями / Симерзин В.В., Гаглоева И.В., Гарькина С.В. // Вестник СамГУ. – Естественнаунчая серия. – 2007. – № 9/1 (59). – С. 307–316.
50. Головкова Н.П. Роль эколого-эпидемиологического исследования в системе социально-гигиенического мониторинга / Н.П. Головкова, Л.М. Лескина, Т.П. Яковлева // Медицина труда и промышленная экология. – 2003. – № 5. – С. 23–28.
51. Почекаева Е.И. Управление риском для здоровья населения при воздействии факторов среды обитания / Е.И. Почекаева // Сборник материалов четвертой международной научной конференции «Образование, спорт, здоровье в современных условиях окружающей среды». – 2015. – С. 40–56.
52. Богомолов В. Тестирование детей / В. Богомолов. – Ростов н/Д: «Феникс», 2004. – 352 с.
53. Практическая психофизиология (внимание, память, мышление) / сост. Д.А. Кочура, В.А. Романенко. – Донецк: ДонНУ, 2017. – 189 с.
54. Щербатых Ю.В. Психология стресса и методы коррекции / Ю.В. Щербатых. – СПб.: Питер, 2006. – 256 с.

Поступила в редакцию 03.09.2018 г.

THE INFLUENCE OF ANTHROPOGENOUS ENVIRONMENTAL FACTORS ON THE FUNCTIONAL STATE OF STUDENTS NERVOUS SYSTEM.

D.A. Kochura

It is shown that the lifestyle and living conditions exert the greatest influence on the functional state of the nervous system of students residing in the technogenic region. Less pronounced in terms of the degree of influence are the presence of chronic diseases and noise pollution of the environment. Anthropogenic factors predominantly affect the volume, sustainability, productivity and effectiveness of attention; the volume of short-term and working memory, the background level of nervous system activity. At the same time, the amount of working memory, performance and efficiency of attention may decrease and increase with the change in the negative impact on the body of anthropogenic environmental factors.

Key words: anthropogenous factors, functional state, nervous system, psychodynamic parameters.

Кочура Дарья Анатольевна

Кандидат биологических наук,
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(г. Донецк), Старший преподаватель кафедры
физиологии человека и животных
E-mail: d.a.kochura@rambler.ru

Kochura Darya Anatolievna

Candidate of Biological Sciences,
Donetsk National University
Senior lecturer of the Human and Animal Physiology
Department
E-mail: d.a.kochura@rambler.ru

УДК 581.33 : 502 : 574 : 58

**КАЧЕСТВО ПЫЛЬЦЫ *DIPLLOTAXIS MURALIS* (L.) DC.
В УСЛОВИЯХ ПГТ. НОВЫЙ СВЕТ СТАРОБЕШЕВСКОГО РАЙОНА**

© 2018. Н.С. Мирненко

Рассмотрено качество пыльцы *Diplotaxis muralis* (L.) DC. в условиях пгт. Новый Свет Старобешевского района. Установлено, что фертильность и стерильность пыльцевых зерен могут быть использованы для индикации состояния окружающей среды. Показатель, характеризующий морфологию пыльцевых зерен, можно использовать как дополнительный к другим показателям при существенном загрязнении экотопов.

Ключевые слова: фитоиндикация, пыльца, *Diplotaxis muralis* (L.) DC., крахмал, ТЭС, Донбасс

Введение. Качество пыльцевых зерен зависит от воздействия различных антропогенных факторов. Зачастую пыльцевые зерна значительно трансформируются вблизи и на территории крупных промышленных центров, путей сообщения [1].

Как правило, растения являются основными индикаторами загрязнения окружающей среды различными токсическими элементами. Приспосабливаясь к стрессовому воздействию среды, происходят физиолого-биохимические и анатомо-морфологические перестройки организма [2, 3]. Нарушения биологических реакций происходят за счет воздействия на генетический аппарат, который является базовым молекулярным индикатором вредного воздействия внешних факторов. Исследования генетических последствий позволяют оценить степень загрязнения среды наиболее опасными мутагенами, воздействие которых модифицируются на фоне огромного числа токсических элементов [3–5].

К методам, определяющим антропогенное воздействие и возникновение мутагенов, относится подсчет нарушений микрогаметогенеза высших растений, выраженных увеличением стерильности пыльцы. Пригодность пыльцы для обнаружения фитотоксического и мутагенного эффектов разного рода загрязнителей обусловлена не только ее чувствительностью к воздействию поллютантов, но и тем, что именно в гаплоидном состоянии проявляются летальные мутации, возникшие при формировании пыльцевых зерен [3, 6].

Новый Свет – поселок городского типа Старобешевского района, расположен на левом берегу Старобешевского водохранилища. Одной из причин неудовлетворительного состояния воздушного бассейна в районе является Старобешевская ТЭС (рис. 1), т.к. возрастающий спрос на электроэнергию и тепло обуславливает повышение объемов производства, что влечет за собой увеличения выбросов вредных веществ в атмосферу от объектов теплоэнергетики [7].

Цель данной работы – установить изменчивость качественных признаков пыльцы двурядника стенного (*Diplotaxis muralis* (L.) DC.) в условиях пгт. Новый Свет Старобешевского района.

Материал и методика исследования. С целью выбора более надежного вида для палиноиндикации летом-осенью 2018г. в пгт. Новый Свет были отобраны образцы пыльцы двурядника стенного (*Diplotaxis muralis* (L.) DC.). Этот вид в регионе встречается повсеместно (рис. 2), его биология хорошо изучена [8].

Двурядник стенной (*Diplotaxis muralis* (L.) DC.) – растет на сухих и меловых склонах, сорных и каменистых местах, вдоль дорог [8].



Рис. 1. Старобешевская ТЭС (фото автора)



Рис. 2. Общий вид двурядника стенного (*Diplotaxis muralis* (L.) DC.) (фото автора)

Сбор материала осуществляли произвольно с цветущих образцов *D. muralis* (в августе – сентябре 2018 г.). Часть материала отбирали в бумажные пакеты, на которых отмечали дату и место сбора, часть – фиксировали в 70 % спирте.

Качество пыльцы определяли йодным методом [9–11]. В основе этого метода лежит определение крахмала при помощи йодной реакции. Фертильные и стерильные пыльцевые зерна отличаются по содержанию крахмала: фертильное пыльцевое зерно полностью заполнено крахмалом, а стерильное не имеет его совсем. Пыльцевые зерна с незавершенным развитием содержат крахмал меньше нормы. Под микроскопом фертильные пыльцевые зерна визуализируются в темно-фиолетовом цвете. Стерильные пыльцевые зерна остаются неокрашенными, так как содержат крахмал в остаточных количествах (рис. 3, 4). Неокрашенными оказываются и оболочки пыльцевых зерен [11].

Подсчитывали процент фертильных пыльцевых зерен от общего числа пыльцевых зерен, наблюдаемых в 3-5 полях зрения микроскопа. Производили подсчет более 1 000 пыльцевых зерен для одной пробной площадки.

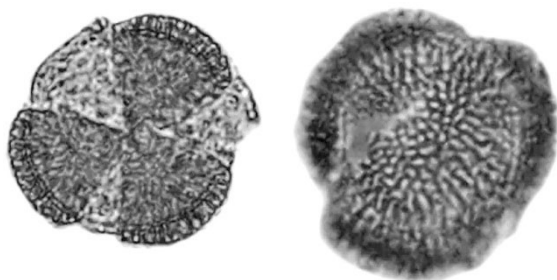


Рис. 3. Пыльца двурядника стенного (*Diplotaxis muralis* (L.) DC.), увеличение 90×10 (фото автора)

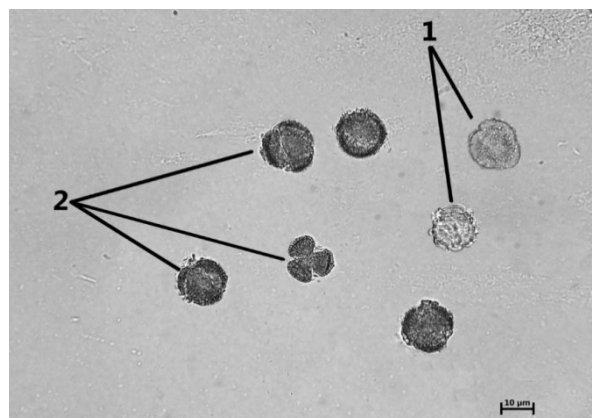


Рис. 4. Окрашенная (1), неокрашенная (2) пыльца *Diplotaxis muralis* (L.) DC., увеличение 40×10 (фото автора)

Морфологические признаки пыльцы устанавливали под микроскопом Primo Star (Carl Zeiss) с соблюдением правил микроскопирования (увеличение 40×10 и 90×10) [9, 10]. Также, при анализе отмечали различные морфологические дефекты пыльцы. К ним относили пыльцевые зерна с нехарактерной формой (тератные).

Сбор материала производили на 5 пробных площадках пгт. Новый Свет:

- 1) ул. Энергетическая (на берегу Старобешевского водохранилища);
- 2) ул. Промышленная;
- 3) ул. Энгельса;
- 4) ул. Школьная;
- 5) ул. Строительная.

Анализ результатов. В табл. 1 представлены данные о доле стерильной и фертильной пыльцы двурядника стенного, собранной в разных точках пгт. Новый Свет.

Таблица 1

Качество пыльцы двурядника стенного (*Diplotaxis muralis* (L.) DC.)
в условиях пгт. Новый Свет в 2018 г., %

№	Точка сбора	Неокрашенная пыльца		Окрашенная пыльца	
		август	сентябрь	август	сентябрь
1	ул. Энергетическая (на берегу Старобешевского водохранилища)	15	13	85	87
2	ул. Промышленная	8	8	92	92
3	ул. Энгельса	11,2	10	88,8	90
4	ул. Школьная	5,4	4,2	94,6	95,8
5	ул. Строительная	4	4,2	96	95,8
Среднее значение		$8,72 \pm 1,9$	$7,88 \pm 1,7$	$91,28 \pm 1,9$	$92,12 \pm 1,7$

Количество стерильной пыльцы в августе варьирует от 4 % (ул. Строительная) до 15 % (ул. Энергетическая). Наибольшее количество пыльцы с минимальным содержанием крахмала наблюдается в точках сбора, расположенных по адресам: ул. Энергетическая (15 %), ул. Промышленная (8 %), ул. Энгельса (11,2 %).

Количество стерильной пыльцы в сентябре варьирует от 4,2 % (ул. Строительная) до 13 % (ул. Энергетическая). Наибольшее количество стерильной пыльцы наблюдается в точках сбора, расположенных по адресам: ул. Энергетическая (13 %), ул. Промышленная (8 %), ул. Энгельса (10 %). Следует отметить, что данные площадки

расположены в районах путей сообщений автотранспорта и вблизи Старобешевской ТЭС. Ул. Школьная и ул. Строительная находятся наиболее удаленно от ТЭС.

Пыльца, собранная в районах вблизи Старобешевской ТЭС, характеризовалась более низким уровнем фертильности. Самые низкие показатели стерильности в августе и сентябре отмечены по адресам: ул. Школьная (5,4 и 4,2 % соответственно) и ул. Строительная (4 и 4,2 % соответственно), защищенному различного рода строениями от путей транспортного сообщения.

Доля фертильной (окрашенной) пыльцы во всех исследуемых точках была высока и составила в среднем 91–92 %. Минимальное количество обнаружено в точке сбора на ул. Энергетической (85 % в августе и 87 % в сентябре), максимальное наблюдалось по адресу ул. Строительная (96 % в августе и 95,8 % в сентябре).

Количество деформированной тератной пыльцы (пыльцевые зерна нехарактерной формы) двурядника стеного в разных точках изменялось от 2 до 5 % (рис. 5). При этом в точках ул. Энергетическая, ул. Промышленная, ул. Энгельса значение признака варьирует от 3 до 5 %. Минимальный процент деформированных пыльцевых зерен (2 %) наблюдается в точке ул. Строительная, которая располагалась во дворе жилых домов.

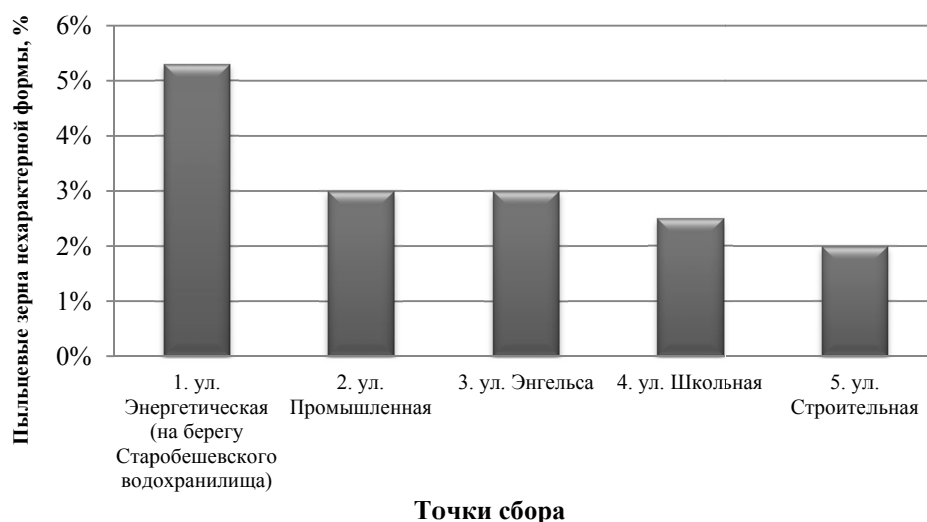


Рис. 5. Количество деформированной пыльцы *Diplotaxis muralis* (L.) DC.

Выводы. Таким образом, у двурядника стеного наблюдается регулярность изменения качества (стерильности и фертильности) пыльцевых зерен при возрастании степени техногенной нагрузки (наличия автомагистрали и ТЭС), поэтому показатель фертильности пыльцы у данного вида установлен для дальнейшего прогноза состояния природной среды. Показатель, характеризующий морфологию пыльцевых зерен, можно использовать в условиях пгт. Новый Свет как дополнительный к другим показателям при существенном загрязнении экотопов.

Работа реализована в рамках инициативной и госбюджетной тем "Функциональная ботаника: экологический мониторинг, ресурсные технологии, фитодизайн" № 0117D000192 и "Диагностика природных и трансформированных экотопов по состоянию фитокомпонентов" № 0118D000017, выполняющихся в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мирненко Н.С. Состояние пыльцевых зерен *Ambrosia artemisiifolia* L. и *Artemisia absinthium* L. в г. Донецке / Н.С. Мирненко // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2017. – № 3–4. – С. 12–17.
2. Валетова Е.А. Фертильность пыльцы сосны обыкновенной в условиях различной антропогенной нагрузки / Е.А. Валетова, Г.И. Егоркина // Лесное хозяйство. – 2008. – № 5. – С. 41–42
3. Хлебцова Л.П. Качество пыльцы березы повислой (*Betula pendula* Roth.) в условиях Барнаула / Л.П. Хлебцова, О.В. Ерещенко // Известия АГУ. – 2012. – № 3-1. – С. 89–92.
4. Захаренкова Н.С. Анализ пыльцевых зерен сорно-рудеральных видов в воздушной среде г. Донецка / Н.С. Захаренкова // Охрана окружающей среды и рациональное использование природных ресурсов : сб. докл. XI Междунар. науч. конф. аспирантов и студентов (Донецк, 11–13 апреля 2017 г.). – Донецк : ГОУ ВПО «ДОННТУ»; Ростов-на-Дону : Изд-во Южного федерального ун-та, 2017. – С. 312–314.
5. Сафонов А.И. Спорово-пыльцевой метод в Донбассе на основе научных рекомендаций ученых России / А.И. Сафонов, Н.С. Мирненко // Донецкие чтения 2017: Русский мир как цивилизационная основа научно-образовательного и культурного развития Донбасса: Матер. Междунар. научн. конф. студентов и молодых ученых (Донецк, 17–20 октября 2017 г.). – Том 2: Химико-биологические науки. – С. 97–99
6. Качество пыльцы кедр сибирского (*Pinus sibirica* (Pinaceae)) на клоновой прививочной плантации в Западно-Саянском опытном лесном хозяйстве / С.С. Савельев, И.Н. Третьякова, Е.В. Ворошилова, Ю.А. Череповский // Хвойные бореальной зоны. – 2012. – Т. 28, № 1–2. – С. 180–186.
7. Хохлова А.Л. Оценка эколого-экономических показателей деятельности ОАО «Донбассэнерго» Старобешевская ТЭС / А.Л. Хохлова, А.Г. Янковец, М.Н. Шафоростова. – Режим доступа: <http://ea.donntu.org:8080/bitstream/123456789/13522/1/17c.pdf>
8. Мир растений. Краткий справочник-определитель / Авт. сост. Д.Я. Зацепина, В.М. Остапко. – Д. «Издательство Сталкер», 2002. – 304 с.
9. Мирненко Н.С. Диагностика состояния экотопов Донецка по палинологическим данным *Betula pendula* Roth / Н.С. Мирненко // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2018. – № 1–2. – С. 20–24
10. Мирненко Н.С. Тератоморфы пыльцевых зёрен *Ambrosia artemisiifolia* L. селитебных территорий г. Донецка / Н.С. Мирненко // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2017. – № 1–2. – С. 26–31.
11. Паушева З.П. Практикум по цитологии растений / З.П. Паушева. – М.: Агропромиздат, 1988. — 271 с

Поступила в редакцию 01.11.2018 г.

QUALITY OF POLLEN *DIPLLOTAXIS MURALIS* (L.) DC. IN THE CONDITIONS OF THE VILLAGE OF NOVYY SVET OF STAROBESHEVSKY DISTRICT

N.S. Mirnenko

Reviewed the quality of pollen *Diplotaxis muralis* (L.) DC. in the village of Novyy Svet of Starobeshevsky district. It was found that the fertility and sterility of pollen grains can be used to indicate the state of the environment. The indicator characterizing the morphology of pollen grains can be used as an additional to other indicators in case of significant environmental pollution.

Keywords: phytoindication, pollen, *Diplotaxis muralis* (L.) DC., starch, thermal power plant, Donbass.

Мирненко Наталья Сергеевна
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), ассистент
E-mail: natalya_zaharenkova@mail.ru

Mirnenko Natalya
Donetsk National University, Donetsk,
assistant

УДК 574.583

ТОКСИЧЕСКИЕ ЦИАНОФЫТА В ФИТОПЛАНКТОНЕ НИЖНЕКАЛЬМИУССКОГО ВОДОХРАНИЛИЩА

© 2018. Э.И. Мирненко

В работе представлены данные о формировании фитопланктона в Нижнекальмиусском водохранилище. Показана роль синезеленых водорослей в формировании альгофлоры. Установлено невысокое биоразнообразие синезеленых, описаны продуцируемые ими токсины.

Ключевые слова: синезеленые, токсины, фитопланктон, Нижнекальмиусское водохранилище, г. Донецк.

Введение. Некоторые виды микроводорослей относят к токсичным организмам, из-за способности синтезировать токсины, при этом они оказывают прямое воздействие на растения и животных. Гидробионты, являясь основной частью гидросферы, обладают высокой устойчивостью к действию токсинов, а также могут накапливать их в тканях, в количествах, которые являются смертельно опасными для животных, питающихся ими. Ихтиофауна пресных водоемов с осевшими токсинами в тканях может поступать к потребителям и стать серьезной угрозой для здоровья населения, вызывая пищевые отравления, а иногда и смерть людей [1].

Согласно международной научно-исследовательской программе по глобальной экологии и океанографии вредоносного цветения водорослей [2] различают две основные группы организмов, вызывающих вредоносные эффекты:

- виды, продуцирующие токсины и оказывающие прямой эффект на гидробионтов и человека;

- виды, не продуцирующие токсины, но обладающие способностью вызывать катастрофически быстрое нарастание своей биомассы, что негативно влияет на экосистемы и ухудшает среду обитания культивируемой ихтиофауны в континентальных водоемах.

Cyanophyta относятся к категории высокотоксических природных организмов, имея способность к эндогенной продукции токсических веществ, могут накапливать их в воде, а также продуцируемые токсины способны трансформироваться в еще более токсичные формы в организмах различных гидробионтов и последующих потребителей продукции их жизнедеятельности.

Токсины *Cyanophyta* классифицируют по следующим спектрам действия на животных и человека [1, 3]:

1. Hepatotoxins (гепатотоксины) – токсины, воздействующие на печень. Источник токсинов - синезеленые водоросли родов *Anabaena*, *Microcystis*, *Nodularia*, *Nostoc*, *Oscillatoria*;

2. Neurotoxins (нейротоксины) – токсины, воздействующие на нервную систему. Источник токсинов – синезеленые водоросли родов *Anabaena*, *Aphanizomenon*, *Oscillatoria*;

3. Dermatotoxins (дерматоксины) – токсины, оказывающие воздействие на кожу при контакте.

Зарегистрированы случаи, когда токсическое действие синезелёных водорослей приводит к массовой гибели гидробионтов, водоплавающих птиц и домашних

животных [4]. У людей при отравлении токсинами цианобактерий развивается аллергия, конъюнктивит, пищевая интоксикация [5].

В связи с вышесказанным, сущность рассматриваемой проблемы сводится к тому, чтобы показать роль токсических видов синезеленых водорослей в конкретном водоеме, имеющем высокое эксплуатационное значение и зафиксировать наличие.

Материалы и методы. Материалом для исследования послужили пробы фитопланктона, которые отбирали в четырех точках Нижнекальмиусского водохранилища в 2018 г. (рис. 1).

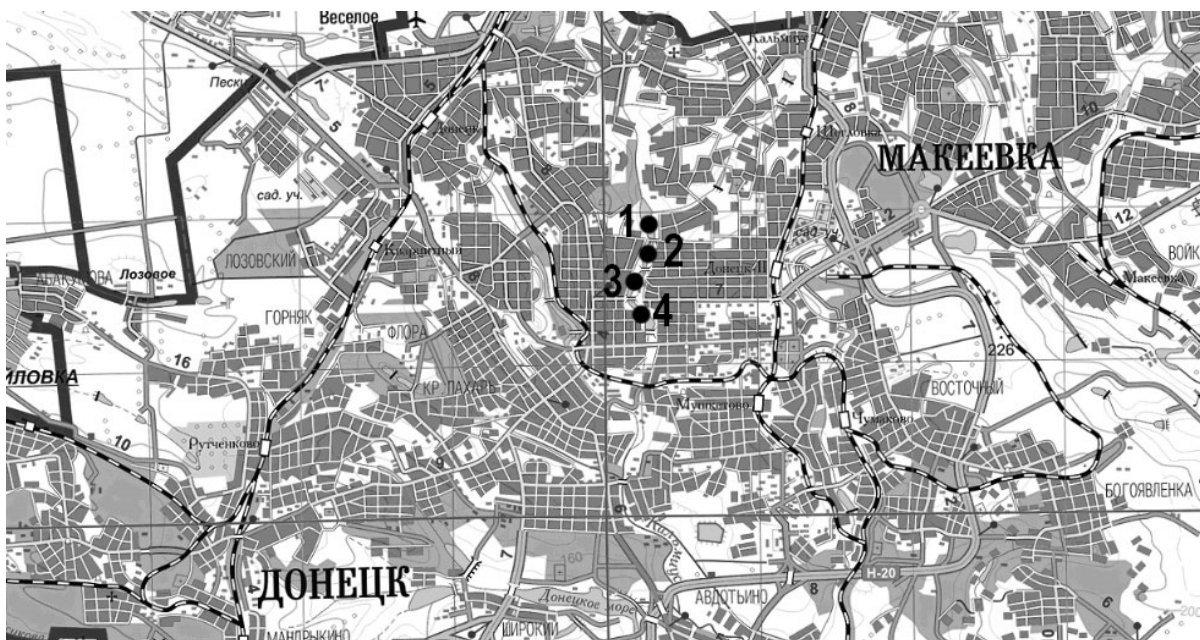


Рис. 1. Карта-схема расположения точек отбора проб в Нижнекальмиусском водохранилище г. Донецка

Нижнекальмиусское водохранилище является одним из четырёх водохранилищ, созданных на р. Кальмиус. Исследуемое водохранилище находится в центре г. Донецка и состоит из двух отдельных водоемов, принимающих сточные воды.

Пробы отбирали на расстоянии 1 м и более от береговой линии на глубине 40 см от поверхности в пластиковые бутылки минимальным объемом 2–3 дм³.

Сбор фитопланктона осуществляли двумя общепринятыми методами [6]. Сгущение проб фитопланктона проводили методом фильтрования и центрифугирования [7].

Для отбора и хранения проб использовали стеклянные бутылки из прозрачного бесцветного химически стойкого стекла, снабженные резиновыми или притертыми стеклянными пробками. Изучение качественного состава фитопланктона проводили в препаратах раздавленной капли с помощью светового микроскопа Primo Star (Carl Zeiss) с соблюдением правил микроскопирования. Основой определения видовой принадлежности водорослей служил сравнительно-морфологический анализ образцов. При изучении видового состава водорослей измеряли также их размеры, являющиеся важными диагностическими признаками. Для измерения микроскопических объектов (практически все виды водорослей фитопланктона) применяли окуляр-микрометр с измерительной линейкой. Микрофотографии были сделаны фотонасадкой для микроскопа Primo Star (Carl Zeiss).

Результаты и обсуждение. В результате проведенных исследований было установлено, что развитие фитопланктона в Нижнекальмиусском водохранилище имеет двупиковый характер с максимальной численностью и биомассой в весенне-летний период, зимний фитопланктон не характеризовался высоким биоразнообразием.

Проведенные исследования показали, что в Нижнекальмиусском водохранилище было идентифицировано 90 видов, водорослей, которые относятся к 6 отделам, 12 классам, 13 порядкам, 26 семействам, 50 родам (табл. 1). Наибольшее видовое богатство, отмечено для отдела *Chlorophyta* (39 видов), на втором месте по количеству видов *Bacillariophyta* (29 видов), меньшее количество видов было отмечено для *Cyanophyta* (11 видов).

Таблица 1

Систематическая структура водорослей фитопланктона

Отделы	Количество				
	классов	порядков	семейств	родов	видов
<i>Cyanophyta</i>	1	2	4	6	11
<i>Euglenophyta</i>	1	1	1	2	3
<i>Dinophyta</i>	1	1	2	3	5
<i>Chrysophyta</i>	1	1	1	3	3
<i>Bacillariophyta</i>	4	5	7	12	29
<i>Chlorophyta</i>	5	8	12	26	39
Всего	12	13	26	50	90

По количеству классов первое место занимает отдел *Chlorophyta* (5 классов), второе место у *Bacillariophyta* (4 класса). У всех остальных отделов было отмечено по одному порядку в каждом.

По количеству порядков доминирует отделы *Chlorophyta* (8 порядков), *Bacillariophyta* (5 порядков) и *Cyanophyta* (2 порядка). Остальные отделы *Euglenophyta*, *Dinophyta*, *Chrysophyta*, представлены по одному порядку в каждом.

Наибольшее количество семейств включает отдел *Chlorophyta* (12 семейств). Меньшим количеством семейств представлен отдел *Bacillariophyta* (7 семейств), отдел *Cyanophyta* включает 4 семейства, остальные отделы по одному.

По количеству родов доминирует отдел *Chlorophyta* (26 родов). Для отдела *Bacillariophyta* отмечено 16 родов, для *Cyanophyta* 6 родов. Меньшим альгоразнообразием характеризовались отделы *Euglenophyta*, *Dinophyta* и *Chrysophyta*.

Наибольшим видовым богатством, характеризуется отдел *Chlorophyta* (39 видов или 35% от общего числа видов), здесь наиболее часто встречаются протококковые водоросли: *Pediastrum boryanum* var. *boryanum* (Turp.) Menegh; *Scenedesmus quadricauda* (Turp.) Kütz; *Coelastrum microporum* Naeg; *Chlorella vulgaris* Beij; *Monoraphidium contortum* (Thur.) Kom.-Legn. Меньшим количеством видов отмечен отдел *Bacillariophyta* (29 видов 26% от общего числа видов), здесь наиболее часто встречаются такие виды: *Melosira moniliformis* (O. F. Müll.) C. Agardh; *Skeletonema potamos* (C.I. Weber) Hasle; *Cymbella tumidula* Grunow in A.W.F. Schmidt et al; *Diatoma vulgare* Bory, *Navicula pupula* Kütz. В отделе *Cyanophyta* наиболее часто встречаются следующие виды; *Anabaena spiroides* - f. *spiroides* Kleb., *Microcystis aeruginosa* (Kütz.) Kütz, O. Agardhii – f. *agardhii* Gomont. Для отдела *Euglenophyta* был отмечен один вид, имеющий массовое развитие *E. granulata* – var. *granulata* (G.A. Klebs) Schmitz. Отдел *Chrysophyta* отмечен наличием одного вида, *Dinobryon divergens* O.E. Imhof, и двух морфотип, имеющие аббревиаткры согласно общепринятой классификации [8],

Stomatocyst 228, Duff & Smol, 1994 emend. Wilkinson & Smol, 1998 (2) Fig. 129; и Stomatocyst 360, Taylor & Smol, 1997 (8) Fig. 23, они же являются и наиболее редко встречающимися видами в альгофлоре Нижнекальмиусского водохранилища.

Отмечено, что отдел *Cyanophyta* представлен в количестве 9,9 % (11 видов) от общего числа видов, и имеет третье место в анализируемой флоре водорослей. Отдел представлен следующими видами: *Cyanothece aeruginosa* (Nägeli) Komárek; *Synechococcus elongatus* (Nägeli) Nägeli; *Merismopedia punctata* Meyen in Wiegmann; *Microcystis aeruginosa* (Kütz.) Kütz; *Chroococcus minimus* (Keissl.) Lemmerm.; *Cyanosarcina chroococcoides* (Geitler) Kováčik; *Chlorogloea microcystoides* Geitler.; *Oscillatoria agardhii* Gomont; *Anabaena spiroides* - f. *Spiroides* Kleb.; *Anabaena cylindrica* – f. *Cylindrica* Lemmerm.; *Aphanizomenon flosaquae* Ralfs ex Bornet & Flahault. Из идентифицированных видов наиболее токсичными являются: *Microcystis aeruginosa*, *Anabaena spiroides*, *Aphanizomenon flos-aquae*.

Microcystis aeruginosa – образует слизистые микроскопические колонии, сплошные или сетчато-разорванные, принадлежит к планктону, вызывает «цветения» в стоячих и медленно текущих эвтрофных, пресных и солоноватых водоемах, космополит, токсичный. В Нижнекальмиусском водохранилище наибольшая численность его достигает в августе-сентябре биомасса в отдельных участках достигает 520 мкг/дм³. *Microcystis aeruginosa* выделяют гепатотоксин под названием **Микроцистин** – это наиболее распространенный токсин [9, 10], биологическая активность которого заключается в проявлении гепатотоксичности, а именно нарушении целостности цитоплазматических мембран, происходит ухудшение работоспособности печени. Микроцистин не разрушается при повышенных температурах и даже после кипячения. В водоемах в темноте микроцистины могут сохраняться месяцами и годами, на солнечном свете они подвергаются медленному фотохимическому разрушению.

Anabaena spiroides – одиночные свободноплавающие виды образующие правильную спираль. Обитает в планктоне стоячих, реже текущих вод, вызывает «цветения» космополит, может развиваться практически во всех типах водоемов, токсичен. В Нижнекальмиусском водохранилище наибольшая численность его достигает в сентябре биомасса в отдельных участках достигает 600 мкг/дм³. *Anabaena* выделяет нейротоксин – **Анатоксин-а**. Анатоксин-а на экспериментах с мышами [9] показал способность сверхстимулировать мышечные клетки, вызывая мышечное истощение, судороги, конвульсии удушье и смерть животных в течение нескольких минут. К сожалению, противоядия к Анатоксину-а не существует. В случае идентификации данного вида единственный практический путь – это найти альтернативный нетоксичный источник воды. Анатоксин-а относительно стабилен в темноте, однако в растворе и на свету в отсутствии пигментов легко подвергается фотохимической деградации. Разрушение ускоряется в щелочной среде. Период полураспада при фотохимическом разрушении, анатоксина-а – 1-2 часа [11]. Анатоксин-а (с) легко разрушался в растворах при нейтральных и кислых значениях pH [12].

Aphanizomenon flos-aquae – одиночные или свободноплавающие собранные в пучки трихомы, с ясно дифференцированными срединными или конечными клетками. Обитает в планктоне стоячих, реже текущих водоемов, вызывает «цветения», космополит, может развиваться практически во всех типах водоемов, токсичен. В Нижнекальмиусском водохранилище наибольшая численность его достигает в сентябре биомасса в отдельных участках достигает 300 мкг/дм³. Выделяет нейротоксичный алкалоид **Сакситоксин** – это один из самых сильнодействующих цианобактериальных

токсинов, блокирует нервные волокна, разрушают нейро-мышечный контакт. Они аккумулируются в пищевой цепи речных моллюсков и являются причиной паралитического отравления при их потреблении человеком. Период полураспада составляет 1–10 недель

Значение и функции токсинов, выделяемых *Cyanophyta* до сих пор до конца не установлены. Высокая вероятность того, что токсины микроводорослей позволяют им защищаться от поедания планктонными животными, поскольку зоопланктон не размножается и не питается в местах где активно веретигируют синезелёные водоросли.

Выводы. Таким образом, в результате проведенных исследований было установлено, что в фитопланктоне Нижнекальмиусского водохранилища по числу видов доминируют три отдела, зеленые, синезелёные и диатомовые водоросли, что составляет 71 % от общего числа видов. Альгофлора синезеленых представлена в количестве 11 видов, из них 3 вида являются токсичными *Microcystis aeruginosa*, *Anabaena spiroides*, *Aphanizomenon flos-aquae*, продуцируя в воду токсины: Микроцистин, Анатоксин-а и Сакситоксин.

Работа реализована в рамках инициативной и госбюджетной тем "Функциональная ботаника: экологический мониторинг, ресурсные технологии, фитодизайн" № 0117D000192 и "Диагностика природных и трансформированных экотопов по состоянию фитокомпонентов" № 0118D000017, выполняющихся в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рябушко Л.И. Атлас токсичных микроводорослей Черного и Азовского морей / Л.И. Рябушко. – Севастополь: ЭКОСИ – Гидрофизика, 2003. – С. 7-8.
2. GEONAB. Global Ecology and Oceanography of Harmful Algae Blooms, Science Plan / Eds. P. Glibert, G. Pitcher. – Baltimor; Paris: SCOR & IOC, 2001. – 86 p.
3. Potentially Harmful Microalgae of the Western Indian Ocean. A Guide based on a preliminary survey: IOC Manuals and Guides. – No 41. – Paris: IOC of UNESCO, 2001. – 105 p.
4. Schwimmer D. The role algae and phytoplankton in medicine / D. Schwimmer, M. Schwimmer. - New York, 1955. – 317 p.
5. Glibert P.M. Release of dissolved organic nitrogen by marine diazotrophic cyanobacteria, *Trichodesmium* spp. / P.M. Glibert, D.A. Bronk // Appl. Environ. Microbiol. – 1994. – Vol. 60. – P. 3996-4000.
6. Водоросли: Справочник / С.П. Вассер Н. В. Кондратьева, Н.П. Масюк. и др. – К.: Наук, думка, 1989. – 608 с.
7. Константинов А.С. Общая гидробиология: учебное пособие / А.С. Константинов – М.: Высш. шк. 1986. – 465 с.
8. Duff, K.E. Atlas of Chrysophyceae stomatocysts / K.E. Duff, B.A. Zeeb, J.P. Smol. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. – 189 p.
9. Волошко Л.Н., Токсины цианобактерий (Cyanobacteria, Cyanophyta) / Л.Н. Волошко, А.В. Плющ, Н.Н. Титова // Альгология. – 2008. – Т. 18, № 1. – С. 2-20.
10. Identification of a microcystin in benthic cyanobacteria linked to cattle deaths on alpine pastures an Switzerland / K. Mez, K.A. Beattie, G.A. Codd et al. // Eur. J. Phycol. – 1997. – Vol. 32. – P. 111-117.
11. Stevens D.K. Stability studies on the cyanobacterial nicotinic alkaloid anatoxin-a / D.K. Stevens, R.I. Krieger // Toxicon. – 1991. – Vol. 29. – P. 167-179.
12. Anatoxin-a(s), a potent anticholinesterase from *Anabaena flos-aquae* / S. Matsumada, R.E. Moore, W.P. Niemezura, W.W. Carmichael // J. Amer. Chem. Soc. – 1989. – Vol. 111. – P. 8021-8023.

Поступила в редакцию 01.11.2018 г.

TOXIC CYANOPHYTA IN THE PHYTOPLANKTON OF THE NIZHNEKALMUS
RESERVOIR

E. I. Mirnenko

The paper presents data on the formation of phytoplankton in the Nizhnekalmus reservoir. The role of blue-green algae in the formation of algoflora is shown. A low biodiversity of blue-green is established, the toxins produced by them are described.

Keywords: blue-green, toxins, phytoplankton, Nizhnekalmus reservoir, Donetsk.

Мирненко Эдуард Игоревич

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(г. Донецк), старший преподаватель.

E-mail: eduard_mirnenko@mail.ru

Mirnenko Eduard

Donetsk National University, Donetsk,
Senior Lecturer

УДК 582.284:577.151.52

ВЛИЯНИЕ СПОСОБА КУЛЬТИВИРОВАНИЯ НА ФЕРМЕНТАТИВНУЮ АКТИВНОСТЬ ШТАММА *IRPEX LACTEUS* 2482

© 2018. О.В. Чемерис, М.И. Бойко

Изучено влияния способа культивирования – статические и динамические условия – на ферментативную активность штамма *Irpex lacteus* 2482 – перспективного продуцента молокосвертывающего фермента. Установлено, что наиболее благоприятными условиями культивирования продуцента являются статические и динамические в режиме 1-часового перемешивания в сутки, при которых наблюдалась высокая молокосвертывающая активность культуральной жидкости на фоне низкого уровня общей протеолитической.

Ключевые слова: молокосвертывающая активность; протеолитическая активность; протеазы; культуральный фильтрат; базидиомицет.

Введение. Благодаря фундаментальным и практическим исследованиям морфологических, физиолого-биохимических особенностей базидиомицеты стали доступным источником биологически активных веществ и ферментов разных классов [1]. Большое количество базидиальных грибов съедобно и нашло свое применение в пищевой промышленности в качестве альтернативного источника белка [2]. Метаболиты базидиомицетов используются в создании лекарственных препаратов [3, 4] и косметических средств [1], в переработке и утилизации промышленных отходов [5, 6] и т.д.

Синтезируемые базидиомицетами внеклеточные ферменты характеризуются высокой активностью и стабильностью. Среди ферментов базидиомицетов больше всех других изучаются протеолитические, что предопределено их острым дефицитом в Мире [7, 8]. Гриб *Irpex lacteus* (Fr.) Fr. – активный продуцент протеиназ молокосвертывающего (сычужного) действия [9]. Штаммы гриба проявляют индивидуальные особенности синтеза протеиназ молокосвертывающего действия и требуют тщательного подбора условий культивирования [10].

Внимание ученых направлено на оптимизацию условий культивирования продуцентов биологически активных веществ. В современной биотехнологии традиционно используют глубинный (погруженный) способ культивирования базидиомицетов [11], однако активно изучают и альтернативные способы – твердофазное [12, 13] и поверхностно-мембранное жидкостное культивирования [14]. Создание необходимых условий, в частности способа культивирования, может обусловить значительное увеличение биосинтетических свойств гриба, и, соответственно, повышение выхода полезного продукта.

Постановка задачи. Целью данного исследования было определить оптимальный способ культивирования штамма *I. lacteus* 2482 – перспективного продуцента сычужного (молокосвертывающего) фермента.

Методика эксперимента. Объектом исследований служил штамм *Irpex lacteus* 2482. Основные физиолого-биохимические и культурально-морфологические характеристики данного штамма были изучены в динамике глубинного роста на жидкой глюкозо-пептонной питательной среде следующего состава [8] (г/л): глюкоза – 10, пептон – 3, $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ – 0,5, KH_2PO_4 – 0,6, K_2HPO_4 – 0,4, $CaCl_2$ – 0,05, $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$ – 0,001 (реактивы фирмы «Реахим», Россия). Кислотность питательной среды

доводили до значения pH 4,0 с помощью 10 %-го раствора HCl. После стерилизации питательную среду инокулировали кусочком 7-дневного мицелия размером 5×5 мм. Культивирование штамма осуществляли в колбах Эрленмейера объемом 100 мл с 50 мл питательной среды в статических и динамических условиях на роторной качалке АВУ-6-с (120 об/мин) при различных режимах: 1 ч : 1 ч – перемешивание в режиме 1 часа работы качалки, 1 час простоя; 1 ч : 23 ч – перемешивание в течение 1 часа через 23 часа простоя качалки.

Определение молокосвертывающей активности (МСА) культуральной жидкости (КЖ) проводили по методу Kawai и Mukai [7]. За единицу молокосвертывающей активности принимали такое количество фермента, которое створаживает 100 мл молока за 40 минут при 35 °С. Полученные значения переводили в условные единицы согласно формуле [15, 16].

Уровень общей протеолитической активности (ПА) оценивали по методу, основанному на гидролизе казеиновых белков [15].

Содержание белка в культуральной жидкости определяли спектрофотометрическим методом на спектрофотометре СФ-46 (ЛОМО) [17], используя формулу Лайне [18]. Накопление биомассы определяли весовым методом [19]. pH культуральной жидкости измеряли с помощью анализатора ионов AI-123 (ДЕСКК, Украина).

Все исследования проводили в трехкратной повторности. Статистическую обработку полученных данных осуществляли дисперсионным анализом, а сравнение средних арифметических величин – по критерию Дункана [20].

Анализ результатов. Установлено, что способ культивирования оказывает влияние на ферментативную активность культуральной жидкости штамма *I. lacteus* 2482. На рис. 1 представлена молокосвертывающая активность культуральной жидкости данного штамма.

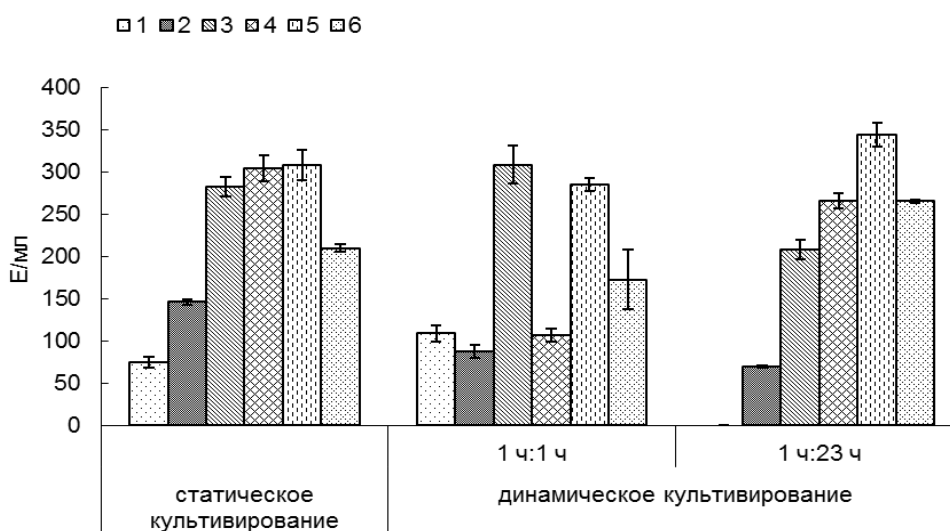


Рис. 1. Молокосвертывающая активность культуральной жидкости штамма *Irpex lacteus* 2482 при различных способах культивирования:
1 – 3-и сутки, 2 – 5-е сутки, 3 – 7-е сутки, 4 – 10-е сутки, 5 – 12-е сутки, 6 – 15-е сутки

При статическом способе культивирования максимальные значения МСА культуральной жидкости продуцента наблюдались на 7-12-е сутки в пределах 282–307 Е/мл. При культивировании штамма *I. lacteus* 2482 в динамических условиях в

режиме перемешивания 1 ч : 1 ч наблюдались два максимума выхода молоко-свертывающего фермента в культуральную жидкость на 7-е и 12-е сутки и составляли 308 Е/мл и 284 Е/мл соответственно. При культивировании штамма в режиме перемешивания 1 ч : 23 ч молоко-свертывающая активность культуральной жидкости увеличивалась во времени с максимальными значениями 343 Е/мл на 12-е сутки.

При разных способах культивирования штамма *I. lacteus* 2482 отмечены значительные изменения общей протеолитической активности культуральной жидкости (рис. 2).

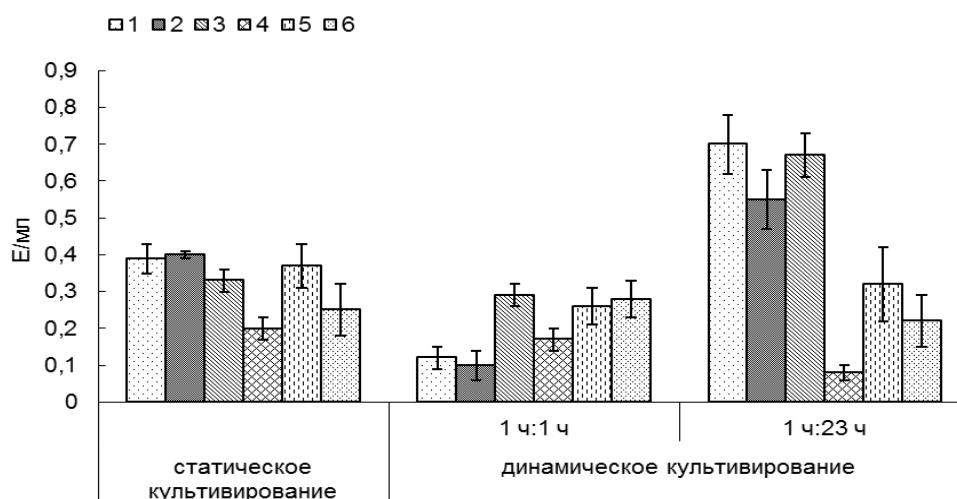


Рис 2. Протеолитическая активность культуральной жидкости штамма *Irpex lacteus* 2482 при различных способах культивирования:

1 – 3-и сутки, 2 – 5-е сутки, 3 – 7-е сутки, 4 – 10-е сутки, 5 – 12-е сутки, 6 – 15-е сутки

При статическом способе культивирования протеолитическая активность КЖ на 3-и и 5-е сутки находилась в пределах 0,4 Е/мл, постепенно снижалась с 0,33 Е/мл на 7-е сутки до 0,2 Е/мл на 10-е сутки культивирования. Соотношение МПА : ПА в этот период составляло ~ 1520 : 1. На 12-е сутки культивирования наблюдалось повышение протеолитической активности культуральной жидкости данного штамма. Соотношение МСА : ПА составило 830:1.

При культивировании штамма *I. lacteus* 2482 в режиме перемешивания 1 ч : 1 ч протеолитическая активность культуральной жидкости находилась на уровне 0,26–0,29 Е/мл. Соотношение МСА : ПА на 7-е и 12-е сутки культивирования – в период максимальных значений молоко-свертывающей активности – составило ~ 1 100 : 1.

С 3-х по 7-е сутки культивирования штамма *I. lacteus* 2482 в режиме перемешивания 1 ч : 23 ч протеолитическая активность КЖ была выше, чем при использовании других режимов. На 10-е сутки при данном режиме культивирования протеолитическая активность КЖ снижалась с 0,7 Е/мл до 0,22 Е/мл, а на 12-15-е сутки достоверно повышалась до значений 0,3 Е/мл. На 12-е сутки культивирования – в период максимальных значений молоко-свертывающей активности культуральной жидкости – соотношение МСА : ПА составило ~ 1070:1.

На рис. 3 представлены данные изменения содержания белка в культуральной жидкости при статическом и динамическом способе культивирования штамма *Irpex lacteus* 2482. Установлено, что содержание белка в КЖ продуцента при данных способах культивирования было ниже контрольного уровня – 2,39 мг/мл, что

свидетельствует об одновременных процессах поглощения белка из питательной среды для роста и развития мицелия и синтеза внеклеточных белков общего протеолитического и специфического молокосвертывающего действия.

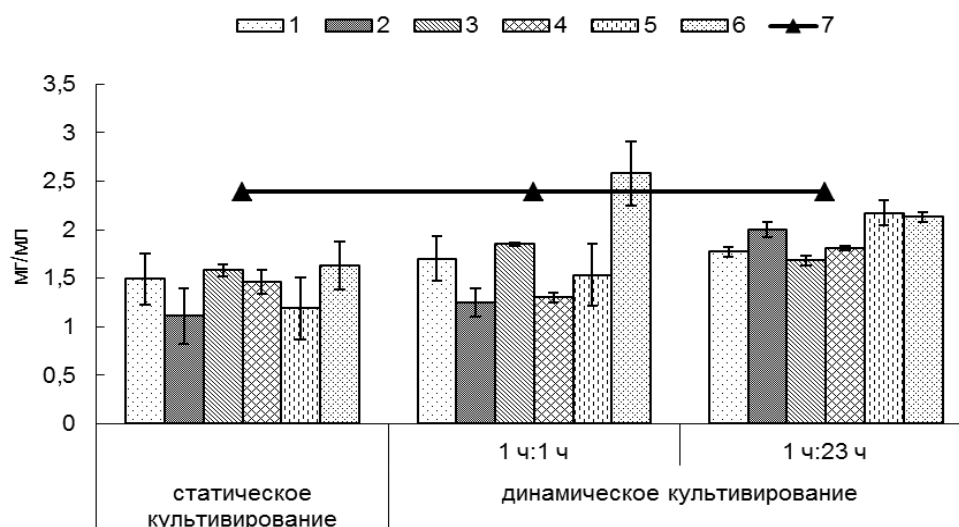


Рис. 3. Содержание белка в культуральной жидкости штамма *Irpex lacteus* 2482 при различных способах культивирования:

1 – 3-и сутки, 2 – 5-е сутки, 3 – 7-е сутки, 4 – 10-е сутки, 5 – 12-е сутки, 6 – 15-е сутки, 7 – контроль

На рис. 4 представлены результаты, характеризующие накопления биомассы штамма *Irpex lacteus* 2482 по показателю абсолютно сухой биомассы. Установлено, что при статическом способе культивирования штамма *Irpex lacteus* 2482 наблюдался максимальный выход биомассы. Экспоненциальная фаза роста мицелия наблюдалась до 15-х суток. Именно в этот период отмечен максимальный выход экзопротеиназ молокосвертывающего действия в культуральную жидкость, что совпадает с литературными данными [10].

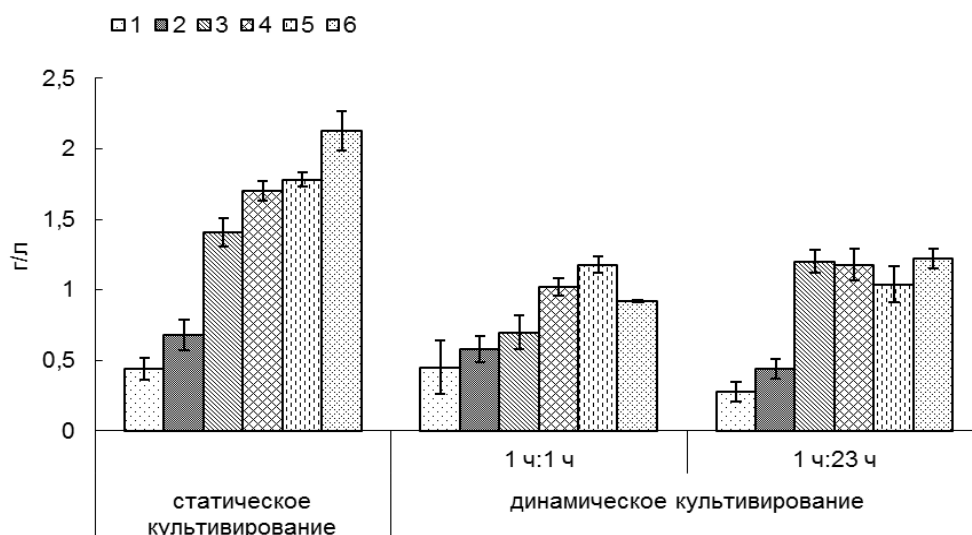


Рис. 4. Абсолютно сухая биомасса штамма *Irpex lacteus* 2482 при различных способах культивирования: 1 – 3-и сутки, 2 – 5-е сутки, 3 – 7-е сутки, 4 – 10-е сутки, 5 – 12-е сутки, 6 – 15-е сутки

При динамическом культивировании штамма *Irpex lacteus* 2482 наблюдался значительно более низкий выход биомассы. На 15-е сутки в режиме культивирования 1 ч : 1 ч выявлены процессы автолиза мицелия, о чем свидетельствует достоверное снижение накопления биомассы и повышение содержания белка в культуральном фильтрате (см. рис. 3). В режиме культивирования 1 ч : 23 ч экспоненциальная фаза роста мицелия продуцента наблюдалась более раннее наступление стационарной фазы роста на 10-е сутки культивирования. Именно в этот период роста *Irpex lacteus* 2482 отмечены максимальные значения молокосвертывающей активности (см. рис. 1).

На рис. 5 представлено изменение pH культуральной жидкости штамма *Irpex lacteus* 2482 при разных условиях культивирования.



Рис. 5. Изменение pH культуральной жидкости штамма *Irpex lacteus* 2482 при различных способах культивирования:

1 – 3-и сутки, 2 – 5-е сутки, 3 – 7-е сутки, 4 – 10-е сутки, 5 – 12-е сутки, 6 – 15-е сутки

Установлено, что на 3-5-е сутки при статическом и динамическом способе культивирования продуцента pH культуральной жидкости находился на уровне контрольного значения 4,0. При дальнейшем культивировании штамма *Irpex lacteus* 2482 в статических условиях и в динамических в режиме 1 ч : 1 ч pH культуральной жидкости смещалось к значения ~ 4,8. При культивировании продуцента в режиме 1 ч : 23 ч pH культуральной жидкости было на уровне 3,8.

Выводы. Таким образом, способ культивирования оказывает влияние на ферментативную активность штамма *I. lacteus* 2482 – перспективного продуцента протеиназ молокосвертывающего действия. Наиболее благоприятными условиями культивирования являются статические и динамические в режиме 1 ч : 23 ч, при которых наблюдался высокий уровень молокосвертывающей активности на фоне низкого уровня общей протеолитической.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белова Н.В. Некоторые перспективные направления биотехнологии базидиомицетов / Н.В. Белова, И.И. Шамолина // Микология и фитопатология. – 2013. – Т. 47, № 2. – С. 73-82.
2. Дудка И.А. Культивирование съедобных грибов / И.А. Дудка. – К.: Урожай, 1992. – 160 с.
3. Wasser S.P. Medicinal mushroom science: current perspective, advances, evidences, and challenges / S.P. Wasser // Biomed J. – 2014. – Vol. 37, № 6. – P. 345-356.

4. Змитрович И.В. Метаболиты базидиальных грибов, эффективные в терапии рака и их молекулярные мишени: обзор / И.В. Змитрович // Вестник Пермского университета. Серия: Биология. – 2015. – Вып. 3. – С. 264-286.
5. Использование базидиальных грибов в технологиях переработки и утилизации техногенных отходов: фундаментальные и прикладные аспекты (обзор) / Н.А. Куликова, О.И. Кляйн, Е.В. Степанова, О.В. Королёва // Прикладная биохимия и микробиология. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 619-634.
6. Древаль К.Г. Ферментативна активність препаратів екзоцелюлаз базидіоміцетів та нижчих грибів / К.Г. Древаль, М.І. Бойко // Мікробіологія та біотехнологія. – 2012. – № 4 (20). – С. 64-76.
7. Kawai M. Studies on milk clotting enzymes produced by *Basidiomycetes*. I. Screening test of *Basidiomycetes* for the production of milk clotting enzymes / M. Kawai, N. Mukai // Agric. Biol. Chem. – 1970. – V. 34 (2). – P. 159-163.
8. Федорова Л.Н. Протеазы сычужного действия в культурах высших грибов / Л.Н. Федорова, А.Н. Шиврина // Микология и фитопатология. – 1974. – Т. 8, № 1. – С. 22-25.
9. Бойко С.М. Біологічні особливості штамів *Irpex lacteus* Fr. – продуцентів протеїназ молокосідальної дії: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. біол. наук: 03.00.21 «Мікологія» / С.М. Бойко. – К., 2002. – 20 с.
10. Штаммовая изменчивость синтеза специфических молокосвертывающих протеиназ у базидиального гриба *Irpex lacteus* / О.В. Чемерис, В.В. Рашевский, К.А. Галкова, М.И. Бойко // Вестник Московского университета. Сер. 16. Биология. – 2016. – № 4. – С. 45-49.
11. Дудка И.А. Высшие съедобные базидиомицеты в поверхностной и глубоинной культуре / И.А. Дудка. – К.: Наукова думка, 1983. – 313 с.
12. Pandey A. Solid-state fermentation / A. Pandey // Biochemical Engineering Journal. – 2003. – Vol. 13. – P. 81-84.
13. Recent advances in solid-state fermentation / R.R. Singhania, A.K. Patel, C.R. Soccol, A. Pandey // Biochemical Engineering Journal. – 2009. – Vol. 44. – P. 13-18.
14. Твердофазное и поверхностно-мембранное жидкостное культивирование микромицетов, особенности их развития и образования ферментов (обзор) / [Осмоловский А.А., Баранова Н.А., Крейер В.Г. и др.] // Прикладная биохимия и микробиология. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 245-255.
15. Белки, ферменты и стерилы базидиальных грибов. Методы исследования / Под ред. О.П. Низковской. – Ленинград : Наука, 1979. – 72 с.
16. Типограф Д. Я. Условия культивирования гриба *Aspergillus candidus*, шт. 111 и его ферментативные комплексы / Д. Я. Типограф, Т. А. Петина // Прикл. биохимия и микробиология. – 1966. – Т. 2, № 4. – С. 417-424.
17. Кочетов Г. А. Практическое руководство по энзимологии / Г. А. Кочетов. – Москва : Высшая школа, 1980. – 272 с.
18. Layne E. Spectrophotometric and turbidimetric methods for measuring proteins / E. Layne // Methods Enzymol. – 1957. – Vol. 3. – P. 447-455.
19. Петербургский А.В. Практикум по агрономической химии / А. В. Петербургский. – Москва : Колос, 1968. – 469 с.
20. Приседський Ю. Г. Статистична обробка результатів біологічних експериментів : навч. посібник / Ю. Г. Приседський. – Донецьк : Кассиопея, 1999. – 210 с.

Поступила в редакцию 28.06.2018 г.

INFLUENCE OF CULTIVATION METHOD ON ENZYME ACTIVITY OF STRAIN *IRPEX LACTEUS* 2482

O.V. Chemeris, M.I. Boyko

The influence of the cultivation method, static and dynamic conditions, on the enzymatic activity of the strain *Irpex lacteus* 2482, a promising producer of the milk-clotting enzyme, was studied. It was found that the most favorable conditions for cultivation of this producer are static and dynamic in the mode of 1 hour mixing per day. Under these conditions, high milk-clotting activity of the culture liquid against a background of low levels of the total proteolytic was observed.

Keywords: milk-coagulating activity; proteolytic activity; proteases; culture filtrate; basidiomycete.

Чемерис Оксана Вячеславовна

кандидат биологических наук;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»;
83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24;
E-mail: chemeris07@rambler.ru
Тел: +38 (062) 302-09-93

Chemeris Oksana Viacheslavovna

Candidate of Biological Sciences;
Donetsk National University;
Donetsk, 83001, University Str., 24

Бойко Михаил Иванович

доктор биологических наук, профессор;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»;
83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24.

Boyko Mikhail Ivanovich

Doctor of Biological Sciences, Full Professor;
Donetsk National University;
Donetsk, 83001, University Str., 24



Михаил Иванович Бойко
(03.03.1940 – 11.10.2018)

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» постигла невосполнимая утрата – ушел из жизни заведующий кафедрой физиологии растений биологического факультета, доктор биологических наук, профессор, ветеран Донецкого национального университета БОЙКО МИХАИЛ ИВАНОВИЧ.

Михаил Иванович с 1967 года работал на биологическом факультете Донецкого национального университета сразу после окончания Киевского государственного университета им. Т.Г. Шевченко и прошел славный трудовой путь от лаборанта до заведующего кафедрой. Здесь он сформировался как ученый, педагог, воспитатель и наставник. Ученик профессора С.Ф. Негруцкого, он внес большой вклад в развитие фитопатологического направления работы кафедры физиологии растений. Трудолюбие, старательность, практический опыт способствовали ему закончить аспирантуру, защитить кандидатскую диссертацию по физиолого-биохимическим особенностям патогена хвойных пород корневой губке и посвятить свою жизнь большой науке.

С 1982 года М.И. Бойко активно развивал новое направление на кафедре физиологии растений – исследование молокосвертывающей активности базидиальных грибов. Под его руководством была разработана технология культивирования гриба *Hirschioporus laricinus* – активного продуцента фермента молокосвертывающего действия, которая позволила увеличить выход фермента в три раза. Эта среда использовалась для культивирования *H. laricinus* в биореакторах с целью получения и накопление фермента, необходимого для проведения медико-биологических исследований и возможности его использования в производстве сыров. Позже совместно с сотрудниками кафедры был разработан способ получения из культурального фильтрата гриба фермента молокосвертывающего действия в кристаллическом виде (А. с. № 1395572).

По результатам многолетних научных исследований в 1997 году он защитил докторскую диссертацию. С 1998 года М.И. Бойко руководил кафедрой физиологии растений. В 2000 году ему было присвоено ученое звание профессора. Много сил и умений он вложил в развитие многочисленных хоздоговорных и госбюджетных тем, которые выполнялись на кафедре.

М. И. Бойко – автор и соавтор более 300 научных публикаций, 20 патентов и авторских свидетельств. Под его руководством 7 аспирантов защитили кандидатские диссертации.

Несмотря на трудные для Донбасса времена, кафедра физиологии растений под руководством Михаила Ивановича продолжала образовательную и научно-исследовательскую деятельность, сохранив материально-техническую базу и научный потенциал.

Глубокие профессиональные знания, пример честного и бескомпромиссного отношения к делу, любовь к людям и безграничная доброта снискали ему искреннее уважение преподавателей, сотрудников и студентов. Известие о кончине Бойко Михаила Ивановича с болью и горечью восприняли все, кто его знал. Светлая память о дорогом нам человеке останется в наших сердцах.

*Коллектив кафедры физиологии растений биологического факультета
Донецкого национального университета*

Научное издание

**Вестник Донецкого национального университета.
Серия А: Естественные науки**

2018. – № 3-4

Технический редактор: *М.В. Фоменко*

Свидетельство о регистрации СМИ Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

Адрес редакции:
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
ул. Университетская, 24,
283001, г. Донецк
Тел: (062) 302-92-56, 302-92-93
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: <http://donnu.ru/vestnikA>

Подписано в печать 28.12.2018 г.
Формат 60×84/8. Бумага офсетная.
Печать – цифровая. Усл. печ. л. 20,5.
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24.
Тел.: (062) 302-92-27.
Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности
в Государственный реестр
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.