

Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет»

На правах рукописи

Царенко Сергей Николаевич



**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ
НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРУГИХ
СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк – 2018

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк.

Научный консультант Улитин Геннадий Михайлович,
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: Шалдырван Валерий Анатольевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет», г. Донецк, профессор кафедры математической физики

Илюхин Александр Алексеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал)
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»,
г. Таганрог, профессор кафедры математики

Югов Анатолий Михайлович,
доктор технических наук, профессор,
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка,
заведующий кафедрой технологии и организации строительства

Ведущая организация: Российская открытая академия транспорта федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет транспорта (МИИТ)», г. Москва

Защита состоится 21 декабря 2018 г. в 12.00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.016.03 при ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по адресу: 83001, г. Донецк, проспект Театральный, 13, ауд. 264.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по адресу: 83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24, <http://science.donnu.ru/>

Автореферат разослан _____ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 01.016.03
доктор технических наук, профессор



В.К. Толстых

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Математические модели упругих стержней широко используются для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) при статических, динамических нагрузках и в задачах устойчивости объектов машиностроения, строительства, биомеханики и пр. В теории упругости применяются методы исследования, основанные на аналитических, численных и численно-аналитических решениях. Тем не менее, не так много задач, для которых разработаны методики, подходы, позволяющие сравнительно быстро и достоверно получать необходимые расчетные зависимости. В отношении стержневых систем аналогичные алгоритмы, основанные на решениях в аналитической форме, хорошо проработаны для небольшого класса стержней простой формы и однородной структуры и представлены в научной и справочной литературе, т.е. такие модели можно рассматривать, как классические. Методики расчета статического и динамического деформирования упругих стержней с усложненной конфигурацией физико-механических и геометрических характеристик (в виде осевой неоднородности линейной плотности, модуля упругости и пр.) рассмотренные в научной литературе, как правило, не носят системный характер, а ставят целью решение узкоспециализированной задачи. Это в свою очередь ограничивает возможность использования этих решений в более широкой сфере. Так как для стержней сложной конфигурации возникают трудности математического характера (необходимость решения неоднородных уравнений с переменными коэффициентами, проблема ортогональности собственных функций в задачах с распределенными и сосредоточенными параметрами и т.п.). Применение вариационных и проекционных методов позволяет обойти в какой-то степени указанные трудности и поэтому последние имеют собственные недостатки, такие как: сложность выбора тестовых и пробных функций, оценка полученного решения. Для практического расчета стержневых конструкций этими методами используют

различные программные комплексы объектного и имитационного моделирования. Однако и последний подход также имеет сложности, как например, необходимость привязки к конкретным параметрам объекта исследования, а также сохраняется проблема верификации результатов расчета.

Таким образом, разработка численно-аналитических методик исследования упругих стержневых моделей со сложной конфигурацией нагрузок и физико-механических свойств позволяют:

- расширить область рассматриваемых объектов с применением стержневых моделей;
- решать задачи верификации результатов применения прямых численных методов;
- эффективно выполнять анализ моделей при варьировании их параметров;
- рассматривать проблемы структурно-параметрической оптимизации;
- решать задачи с использованием асимптотических представлений.

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Диссертационная работа содержит исследования, выполненные автором по тематическим планам научно-методических работ ДонНТУ: № НЗ.1-10 «Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния длинномерных наземных конструкций и сооружений, как систем с распределенными параметрами»; № Н-4.13 «Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния систем с распределенными параметрами в расчетах на устойчивость и динамическую нагрузку»; № Н-5.16 «Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния упругих систем».

Цель и задачи исследования. Целью работы является разработка численно-аналитических методик анализа моделей статического и динамического деформирования и устойчивости исходной формы стержневых конструкций с усложненными механическими и геометрическими характеристиками.

Для достижения поставленной цели в работе сформулированы следующие основные задачи исследования:

- провести анализ и исследовать статическую форму продольно-поперечного изгиба стержней ступенчато-переменной жесткости при учете распределенных и локальных продольных нагрузок;
- разработать методику анализа устойчивости стержней со ступенчато-переменными механическими и геометрическими характеристиками при продольном изгибе от собственного веса;
- разработать методики анализа продольно-поперечного изгиба и устойчивости стержневых конструкций с непрерывной квадратичной осевой неоднородностью;
- разработать методику анализа изгиба и устойчивости невесомых стержневых конструкций с произвольной степенной неоднородностью механических и геометрических свойств;
- исследовать основные свойства функций представляющих собой новые аналитические решения уравнений деформирования неоднородных стержневых конструкций;
- разработать методику расчета параметров динамического деформирования при продольных и крутильных колебаниях стержневых конструкций со степенным законом осевой неоднородности;
- разработать прикладную версию методики анализа НДС продольных и крутильных колебаний стержневых конструкций с произвольной осевой неоднородностью;
- разработать специальные подходы к реализации метода Фурье применительно к проблемам динамики неоднородных стержневых конструкций с учетом наличия сосредоточенных масс;
- разработать методику исследования модели изгибных колебаний предварительно нагруженных стержней с частным видом осевой неоднородности;

- рассмотреть ряд неклассических краевых задач статики, динамики и устойчивости стержневых конструкций, представляющих прикладное значение.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является математическая модель статического и динамического деформирования упругого стержня с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами, а его предметом – напряженно-деформированное состояние и устойчивость стержневых конструкций при статическом и динамическом нагружении.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что

- в работе получила развитие теория продольно-поперечного изгиба упругих весомых стержневых систем со ступенчатым изменением геометрических и физико-механических характеристик. Разработана методика для анализа устойчивости моделей упругих стержней с непрерывным изменением физико-механических свойств;

- впервые рассмотрена математическая модель продольно-поперечного изгиба и устойчивости несомого стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости от продольной координаты, при одновременном учете распределенных и сосредоточенных продольных сил. Решение уравнения изгиба получено в функциях Бесселя и Ломмеля, что позволяет рассматривать любой вид граничных условий;

- поставлена задача и получены новые решения в аналитической форме для продольно-поперечного изгиба невесомых упругих стержней, изгибная жесткость которых изменяется по произвольному степенному закону от продольной координаты, под действием как распределенных, так и сосредоточенных нагрузок. В случае локальных нагрузок для решения краевых задач методом начальных параметров введены новые функции и исследованы их основные свойства;

- получены новые аналитические решения задач о продольных и крутильных колебаниях на основе волновой теории удара, а также разработано применение метода Фурье для динамических расчетов упругих стержней со

степенной неоднородностью геометрических и физико-механических характеристик;

- разработана прикладная методика решения задач динамики продольных и крутильных колебаний на основе упрощения математической модели путем усреднения переменных коэффициентов для упругих стержней с произвольной конфигурацией физико-механических свойств. Сравнение результатов расчета по приближенному методу с известными точными решениями показали достаточную точность для инженерных задач;

- разработан общий подход на основе метода Фурье к решению математических моделей поперечных колебаний упругих балок с переменной изгибной жесткостью и линейной плотностью. Для рассматриваемой задачи динамического изгиба неоднородных балок использованы функции, которые являются аналогом функций Крылова;

- получены асимптотические представления для собственных функций граничных задач динамики поперечных, продольных и крутильных колебаний неоднородных стержней;

- получено новое решение задачи динамического изгиба и выполнены численно-аналитические исследования модели поперечных колебаний предварительно нагруженных стержней с квадратичной осевой неоднородностью изгибной жесткости;

- выполнены численно-аналитические исследования ударных процессов в неоднородных стержнях, на основе которых разработаны рекомендации к определению коэффициента восстановления при ударе упругих стержней с учетом их геометрической формы.

Теоретическая значимость работы заключается в исследовании актуальных вопросов теории расчета НДС упругих стержневых систем с неоднородностью геометрических характеристик и физико-механических свойств; на основе новых решений разработаны алгоритмы расчета НДС стержней сложной конфигурации; рассмотрены различные аспекты задач устойчивости весомих и невесомых стержней; для задач статического и

динамического деформирования упругих стержневых систем введены функции, которые являются аналогами функций Крылова, и исследованы их основные свойства; разработана методика расчета на динамические воздействия на основе метода Фурье, применительно к неоднородным стержневым системам и получены асимптотические представления для собственных функций соответствующих граничных задач.

Практическая значимость работы. Полученные в работе результаты предоставляют возможность моделирования НДС при статическом и динамическом нагружении целого ряда объектов машиностроения и строительства, таких как: валы сложной конфигурации, бойки и волноводы силовых импульсных систем, бурильные трубы и обсадные колонны, ракеты, буровые вышки, опоры линий электропередач, стойки ветрогенераторов, башни теле-радио связи, грануляционные башни предприятий по производству минудобрений, высокие дымовые трубы и пр. Представленные в работе аналитические решения задач механики упругих стержней также можно использовать для построения эталонных моделей и верификации расчетных данных при работе с программными комплексами объектного и имитационного моделирования. Предложенные алгоритмы расчетов могут быть положены в основу инженерных методов и практических рекомендаций при разработке технической и регламентирующей документации.

Представленные в диссертации исследования были использованы для обоснования параметров стальных крепей и в разработке технических регламентов спуска обсадных колонн на плаву, в рамках работы по хоздоговорной теме № 13-189 между ДонНТУ и ГПАО «Донецкое ШПУ» ГП ОАО «ГХК «СШБ».

Теоретические разработки диссертации позволяют совершенствовать учебный процесс при изложении вопросов динамики и устойчивости стержневых систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. Результаты этих разработок используются в учебном процессе ДонНТУ, ДонНАСА (г.Макеевка), ДонИЖТ. Материалы исследований нашли частичное

отражение в учебном пособии «Задачі з опору матеріалів» изданном с грифом Министерства образования и науки Украины автором совместно с проф. Шевченко Ф.Л.

Методология и методы исследования. Построение математических моделей осуществлялось на основе линейной теории упругости общих гипотез механики деформируемого твердого тела, строительной механики и сопротивления материалов (гипотеза о малости деформаций; принцип независимости действия сил; гипотеза плоских сечений Эйлера-Бернулли и др.). При решении задач продольно-поперечного изгиба и устойчивости использованы функции Бесселя и Ломмеля, а для решения неоднородных уравнений применялся метод вариации произвольных постоянных. Математические модели для описания ударных процессов построены на основе волновой теории плоского удара. Решение различных граничных задач динамики упругих стержней выполнено методом Фурье для собственных функций ортогональных с весом. Для представления расчетных зависимостей использовался метод начальных параметров. На основе численных исследований определены эмпирические формулы, используемые для их аппроксимации.

На защиту выносятся следующие положения:

- решение задач продольно-поперечного изгиба весомых и невесомых стержней сложной конфигурации при действии сосредоточенных и распределенных нагрузок с использованием функций Бесселя и Ломмеля;
- методика решения задач продольного и крутильного удара стержней со степенной неоднородностью геометрических и физико-механических характеристик на основе метода Фурье для собственных функций ортогональных с весом;
- прикладной метод динамического расчета на продольные и крутильные колебания упругих стержней с произвольной неоднородностью физико-механических свойств;

- решение задач поперечных колебаний упругих стержней с переменной изгибной жесткостью и линейной плотностью методом Фурье, в том числе для случаев, когда собственные функции соответствующих граничных задач не ортогональны;

- решение задачи изгибных колебаний предварительно загруженного упругого стержня с квадратичным законом изменения поперечной жесткости с использованием введенных функций, вид которых позволяет рассматривать любые граничные условия;

- инженерные методы расчета стержневых систем на устойчивость и динамические воздействия, разработанные на основе аналитических решений.

Степень достоверности и апробация результатов. Обоснованность и достоверность научных положений, результатов исследования и выводов подтверждается: постановкой рассматриваемых задач в рамках положений классической теории упругости и механики деформируемого твердого тела; применением известных методов решения задач математической физики; согласованностью некоторых полученных результатов с результатами, рассмотренными в литературе с использованием альтернативных методов исследования, включая экспериментальные.

Основные положения исследования были доложены и обсуждены на научных семинарах: кафедры «Сопротивление материалов» ДонНТУ (2014 г.); кафедры «Теоретической и прикладной механики» ДонНАСА (2014 г.); диссертационного совета Д 01.016.03, ДонНУ (2017 г.). Результаты работы докладывались на международных научно-практических конференциях: Международная научно-практическая конференция «Вибрации в технике и технологиях» (Львов, 2011 г.; Полтава, 2012 г.; Львов, 2014 г.); Международная научно-техническая конференция «Форум горняков» (Днепропетровск, 2011, 2012 гг.); 6-я Международная Конференция по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики» (Тула, 2011 г.); Международная научно-техническая конференция

«Динамика, надежность и долговечность механических и биомеханических систем» (Севастополь, 2012, 2014 гг.); XIII Всероссийская научно-практическая конференция «Современная строительная наука и образование» (Москва, 2016 г.); XIV Международная научно-практическая конференция «Развитие фундаментальных основ науки и образования в строительстве» (Москва, 2017 г.); VII Международная научно-методическая конференция «Обучение математике в техническом университете» (Донецк, 2017 г.).

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в 29 работах, в том числе: 11 статей в специализированных журналах из перечня ВАК ДНР; 15 работ в прочих рецензируемых журналах и сборниках научных статей; 2 публикации материалов и тезисов на международных конференциях; 1 учебное пособие с грифом МОНУ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа содержит 314 страниц машинописного текста и состоит из введения, семи разделов, выводов, списка литературы из 362 источников на 38 страницах. Основной текст, изложенный на 274 страницах, иллюстрируется 101 рисунком и содержит 9 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность рассматриваемой проблемы, поставлена цель, сформулированы идеи работы и задачи исследований, методология и методы их достижения. Указана научная новизна и практическая ценность результатов работы. Приведены научные положения, их новизна, практическое значение полученных результатов и их реализация. Рассмотрены вопросы обоснованности и достоверности научных положений, выводов и рекомендаций, личного вклада соискателя. Дана информация о публикациях по теме исследований, указана структура и объем работы.

В первом разделе проведен анализ использования стержневых моделей и их методов расчета для исследования НДС различного рода объектов.

Рассмотрен процесс развития и современное состояние вопроса расчета упругих стержней на устойчивость и динамические воздействия.

Стержневые модели нашли широкое применение в инженерной практике расчета объектов машиностроения и строительства, включая все отраслевые направления. При этом они используются как для непосредственного решения тех или иных прикладных задач, так и в создании теоретических основ для целого ряда научных разработок. Так различные постановки задач для упругого стержня использовались:

- при моделировании статических и динамических процессов в бурильных колоннах, на основе которого были созданы теоретические основы технологии бурения и различные их уточнения, которые представлены в работах: З.Г. Керимова, В.Н. Потураева, Г.М. Саркисова, А.Е.Сарояна, Д.В. Даринга, Е.В. Харченко, Г.М. Улитина и др.;

- для создания ряда положений теории расчета на устойчивость и динамические воздействия строительных конструкций зданий и сооружений в трудах: А.А. Амосова, В.В. Болотина, О.В. Мкртычева, В.Л. Мондруса, А.П. Филиппова, Е. Вильсона, Р. Клафа, Н.М. Ньюмарка, Дж. Пензиена, В. Прагера, Г. Рауса, Р.Л. Халфмана, Г.В. Хаузнера, С.М. Харриса, Э. Чопра, Е.Б. Кореневой, Г.А. Джинчвелашвили и др.;

- для исследования механизма формирования ударных волн в бойках и волноводах силовых импульсных систем, на базе которого создана теория и заложены принципы построения адаптивных ударных механизмов основные идеи, которой представлены в работах: О.Д. Алимова, Л.Т. Дворникова, В.К. Манжосова, Ю.Н. Санкина, И.Д. Шапошникова, В.Э. Еремьянца, Б.Н. Стахановского, А.А. Мясникова, О.Б. Малкова и др.

Различным аспектам теории статического деформирования и устойчивости стержневых систем посвящены исследования: Динника А.Н., Ржаницына А.Р, Работнова Ю.Н., Вольмира А.С., Шулькина Е.Б., Морозова Н.Ф., Товстика П.Е., Андреева В.И, Языева Б.М., Шевченко Ф.Л., Улитина Г.М., Михайловского Е.И., Элишакова И., Вовка Л.П., Шалдырвана В.А. и др.

Ряд задач связанный с вопросами динамики упругих систем, рассмотрен в работах: Тимошенко С.П., Пановко Я.Г., Кильчевского Н.А., Филиппова А.П., Васидзу К., Жилина П.А., Журавлева В.Ф., Костина В.Г., Саурина В.В., Акуленко Л.Д., Ватульяна А.О. Ерофеева В.И., Кравчука А.С., Крысько В.А., Ахтямова А.М., Горбачева В.И., Ильина В.А., Морозова Н.Ф., Локтева А.А., Илюхина А.А., Алгазина С.Д. и др.

Особого внимания заслуживают труды отдельных ученых. Так в работах А.А. Илюхина решены актуальные задачи статики и динамики пространственных стержневых систем. В фундаментальных трудах В.А. Шалдырвана широко рассмотрены вопросы использования методов математической физики применительно к исследованию НДС объектов с усложненными физико-механическими свойствами. Работы А.М. Югова охватывают широкую область технических задач по проблемам анализа моделей деформирования строительных конструкций и сооружений, в том числе в условиях сложных режимов нагружения.

Анализ литературных источников показал, что, несмотря на значительный объем исследований, проведенных в рамках прикладных задач, а также широкую базу методов решения задач устойчивости и динамики стержневых систем на основе линейной и нелинейной теории упругости, имеет место комплекс проблем при использовании математических моделей стержней сложной конфигурации. Это в основном связано с тем, что большинство методов ориентировано на частный подход при рассмотрении той или иной граничной задачи. Таким образом, целый ряд задач переходит из разряда инженерной проблемы в ранг теоретической. Соответственно поиск новых решений в аналитической форме и развитие уже известных, на базе которых можно выстроить универсальные подходы к решению разнообразных граничных задач, является актуальной научной проблемой и ее решению посвящена настоящая работа.

Во втором разделе рассматриваются модели продольно-поперечного плоского изгиба весоных упругих стержней с различными конфигурациями

действующих нагрузок и геометрических свойств, для которых получены решения в аналитической форме.

Для многих задач механики стержней возникает необходимость учета продольных нагрузок при рассмотрении состояния изгиба. В этом случае в качестве математической модели используется дифференциальное уравнение изогнутой оси упругого стержня, которое имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(N(x) \frac{dy}{dx} \right) = p(x), \quad (1)$$

где $y(x)$ – уравнение изогнутой оси; $EJ(x)$ – изгибная жесткость стержня; $N(x)$ – продольное усилие; $p(x)$ – интенсивность поперечной нагрузки.

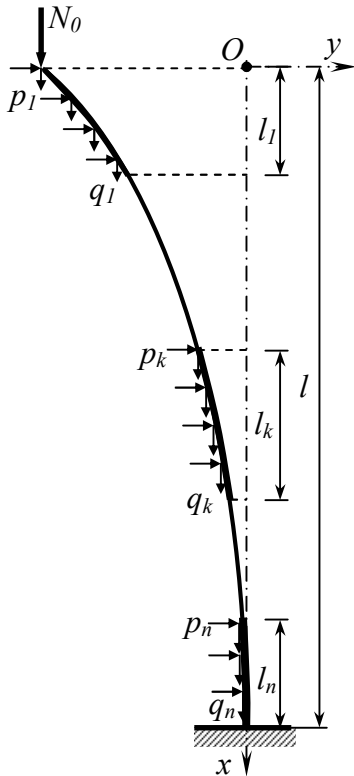


Рис. 1.

В общем случае уравнение (1) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами. Только для некоторых случаев сочетания изгибной жесткости и действующих нагрузок могут быть получены решения в аналитической форме.

Рассмотрим стержневую систему (рис. 1) со ступенчато-переменной жесткостью, для которой в пределах участка l_k изгибная жесткость и интенсивность продольной и поперечной нагрузки постоянны ($EJ_k = const$; $q_k = const$; $p_k = const$). В этом случае для такого участка стержня дифференциальное уравнение

изогнутой оси (1) приводится к виду

$$\frac{d^3 \theta}{d\xi_k^3} \mp \lambda^2 a_k^2 \xi_k \frac{d^2 \theta}{d\xi_k^2} \mp \lambda^2 a_k^2 \theta = \lambda^2 a_k^2 \frac{p_k}{q_k}, \quad (2)$$

здесь $\theta = \frac{dy}{dx}$ – функция углов поворота сечений стержня, $\lambda^2 = \frac{q_n l^3}{EJ_n}$,

$$a_k^2 = \frac{q_n^2 EJ_n}{q_k^2 EJ_k}, \quad \xi_k = \frac{N_0}{q_n l} - \frac{1}{q_n l} \sum_{i=1}^k q_i l_i - \frac{q_k}{q_n l} \left(x - \sum_{i=1}^k l_i \right) \quad - \text{относительная величина}$$

продольных усилий. Знак минус в уравнении (2) соответствует состоянию растяжения, а плюс – сжатия. Методом вариации произвольных постоянных получены общие решения уравнения (2) для обоих случаев, в функциях Бесселя и Ломмеля и в их модифицированной форме. Выражение для изогнутой оси весомого стержня приводится к виду

– случай растяжения ($\xi_k > 0$)

$$y(z_k) = l \left[C_{1,k} \bar{I}_{1/3}(z_k) + C_{2,k} \bar{I}_{-1/3}(z_k) + C_{3,k} \bar{g}_{0,1/3}(z_k) + C_{4,k} - \left(\frac{3z_k}{2\lambda a_k} \right)^{2/3} \frac{q_n p_k}{q_k^2} \right]; \quad (3)$$

– случай сжатия ($\xi_k < 0$)

$$y(z_k) = l \left[C_{1,k} \bar{J}_{1/3}(z_k) + C_{2,k} \bar{J}_{-1/3}(z_k) + C_{3,k} \bar{s}_{0,1/3}(z_k) + C_{4,k} + \left(\frac{3z_k}{2\lambda a_k} \right)^{2/3} \frac{q_n p_k}{q_k^2} \right], \quad (4)$$

где $z_k = \frac{2}{3} \lambda a_k \xi_k^{3/2}$, $C_{1,k}$, $C_{2,k}$, $C_{3,k}$, $C_{4,k}$ – произвольные постоянные,

$$\bar{J}_{\pm 1/3}(z) = \int_0^z J_{\pm 1/3}(\zeta) d\zeta, \quad J_{\pm 1/3}(z) - \text{функции Бесселя}, \quad \bar{I}_{\pm 1/3}(z) = \int_0^z I_{\pm 1/3}(\zeta) d\zeta, \quad I_{\pm 1/3} -$$

модифицированные функции Бесселя, $\bar{s}_{0,1/3}(z) = \int_0^z s_{0,1/3}(\zeta) d\zeta$, $s_{0,1/3}(z)$ – функция

Ломмеля, $\bar{g}_{0,1/3}(z) = \int_0^z g_{0,1/3}(\zeta) d\zeta$, $g_{\mu,\nu}(z)$ – модифицированная функция Ломмеля.

Для решений (3-4), определены производные и получены условия для состыковки участков.

В диссертационной работе на основе приведенной модели рассмотрен ряд прикладных задач, включая исследования устойчивости весомых стержней сложной конфигурации путем аппроксимации их форм последовательно сопряженными однородными участками.

Для исследования НДС некоторых объектов используется модель весоного стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости и постоянной интенсивностью продольной нагрузки ($q = \text{const}$). В этом случае зависимость жесткости от продольной координаты можно представить в виде $EJ(x) = EJ_2((1-k)x/l + k)^2$, где $k = \sqrt{EJ_1/EJ_2}$, EJ_1 , EJ_2 – изгибные жесткости торцевых сечений стержня. Для такой конфигурации уравнение (1) приводится к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка относительно углов поворота

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{3}{z} \frac{d\theta}{dz} + \left(1 + \frac{1 \mp v^2}{z^2}\right) \theta = \frac{C^*}{z^2} + \frac{p}{q}, \quad (5)$$

где $z = \frac{2}{1-k} \sqrt{\tilde{q} \left(\frac{x}{l} + \frac{k}{1-k} \right)}$, $v = \sqrt{1 - \frac{4\tilde{N}}{(1-k)^2} + \frac{4\tilde{q}k}{(1-k)^3}}$, $\tilde{q} = \frac{ql^3}{EJ_2}$ – безразмерный вес стержня, $\tilde{N} = \frac{N_0 l^2}{EJ_2}$ – безразмерная продольная нагрузка. Знак минус в уравнении (5) соответствует действительному значению параметра v , а плюс – мнимому.

Общее решения уравнения (5) получено методом вариации произвольных постоянных в специальных функциях:

– в случае $\tilde{N} < \frac{1}{4}(1-k)^2 + \frac{k}{1-k}\tilde{q}$

$$y(z) = l \frac{(1-k)^2}{2\tilde{q}} \left(C_1 \bar{J}_v(z) + C_2 \bar{Y}_v(z) + C_3 \bar{s}_{0,v}(z) + C_4 + \frac{p}{q} \bar{s}_{2,v}(z) \right); \quad (6)$$

– в случае $\tilde{N} > \frac{1}{4}(1-k)^2 + \frac{k}{1-k}\tilde{q}$

$$y(z) = l \frac{(1-k)^2}{2\tilde{q}} \left(C_1 \bar{R}_v(z) + C_2 \bar{W}_v(z) + C_3 \bar{s}_{0,iv}(z) + C_4 + \frac{p}{q} \bar{s}_{2,iv}(z) \right), \quad (7)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные, $\bar{Y}_v(z) = \int_0^z Y_v(\zeta) d\zeta$, $Y_v(z)$ –

функция Бесселя второго рода, $\bar{R}_v(z) = \int_0^z R_v(\zeta) d\zeta$; $\bar{W}_v(z) = \int_0^z W_v(\zeta) d\zeta$; $R_v(z)$, $W_v(z)$ –

вещественные функции, которые определены путем выделения действительной и мнимой части функции Бесселя мнимого индекса:

$$J_{iv}(z) = \frac{1}{2^{iv} \Gamma(iv+1)} (R_v(z) + iW_v(z)); \quad J_{-iv}(z) = \frac{1}{2^{-iv} \Gamma(-iv+1)} (R_v(z) - iW_v(z)),$$

здесь $\Gamma(z)$ – гамма функция.

С использованием рекуррентных соотношений для функций Бесселя и Ломмеля определены соответствующие производные, что дает возможность рассматривать любой вид граничных условий.

В работе с использованием представленного решения проведена оценка влияния собственного веса и продольной силы на параметры НДС стержней при поперечном изгибе и выполнены исследования устойчивости для основных условий закрепления. Например, для случая консольной конструкции рассмотрена граничная задача (5) с условиями:

$$\begin{aligned} z^2 y''_{zz}(z) \Big|_{z=\sqrt{v^2-1}} &= 0; \quad (z^2 y''_{zz})' \Big|_{z=\sqrt{v^2-1}} = 0; \\ y(z) \Big|_{z=\sqrt{(v^2-1)/k}} &= 0; \quad y'_z(z) \Big|_{z=\sqrt{(v^2-1)/k}} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Условия (8) приводят к уравнению устойчивости

$$\begin{aligned} Y_v \left(\sqrt{(v^2-1)/k} \right) \left((v-1) J_v \left(\sqrt{v^2-1} \right) - \sqrt{v^2-1} J_{v+1} \left(\sqrt{v^2-1} \right) \right) - \\ - J_v \left(\sqrt{(v^2-1)/k} \right) \left((v-1) Y_v \left(\sqrt{v^2-1} \right) - \sqrt{v^2-1} Y_{v+1} \left(\sqrt{v^2-1} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

На графике рис. 2 показана зависимость критического веса $\tilde{q}_{кр}$ от

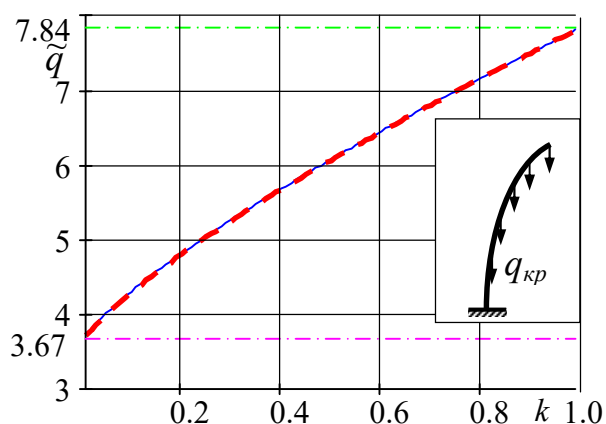


Рис. 2.

параметра поперечного размера k для консольной конструкции с квадратичным законом изменения изгибной жесткости. Сплошная кривая соответствует численным исследованиям уравнения (9), пунктирная линия – результаты для упрощенной модели на основе решения (4), полученной путем аппроксимации

структуры стержня последовательно сопряженными однородными участками.

Штрихпунктирными линиями обозначены известные в литературе значения критических нагрузок для консольного остроконечного ($\tilde{q}_{кр} = 3,67$) и однородного стержня ($\tilde{q}_{кр} = 7,84$). Для данного случая точное решение было использовано для верификации параметров упрощенной модели.

В разделе также выполнены исследования закономерностей для характеристик устойчивости весоных стержней со степенной неоднородностью физико-механических свойств в частных случаях их загрузки.

Третий раздел посвящен вопросам продольно-поперечного изгиба невесоных стержней с произвольной степенной неоднородностью геометрических и физико-механических характеристик, при условии $N(x) = const$.

Рассматриваемая модель упругого стержня является достаточно распространенной в инженерной практике. К ней относятся, как стержни горизонтального расположения, так и различные упрощенные модели, когда распределенные силы не учитывают или заменяют сосредоточенными.

Для множества стержневых конструкций изгибная жесткость непрерывно изменяется по степенному закону от продольной координаты $EJ(x) = EJ_2((1-k)x/l + k)^m$, где $k = \sqrt[m]{EJ_1/EJ_2}$ ($0 < k < 1$), EJ_1 , EJ_2 – изгибные жесткости торцевых сечений стержня, m – показатель степени, принимает любое вещественное значение, кроме $m = 2$ (данный случай рассмотрен отдельно), для отрицательных значений m – $k = \sqrt[m]{EJ_2/EJ_1}$. С учетом принятых обозначений уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + \frac{1-2\nu}{\zeta} \frac{d\theta}{d\zeta} \mp \lambda^2\theta = 4(1-\nu)^2 C^* + \frac{l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-k} \right)^3 \int \zeta^{1-2\nu} p(\zeta) d\zeta, \quad (10)$$

здесь $\zeta = \left((1-k)\frac{x}{l} + k \right)^{\frac{1}{2(1-\nu)}}$, $\zeta_0 = k^{\frac{1}{2(1-\nu)}}$, $\nu = \frac{1-m}{2-m}$, $\lambda = \sqrt{\frac{4N_0(1-\nu)^2 l^2}{EJ_2(1-k)^2}}$. Знак

минус в уравнении (10) соответствует состоянию растяжения, а плюс – сжатия.

Отдельный интерес представляет случай действия сосредоточенных нагрузок, в частности, при рассмотрении вопросов устойчивости. Для удобства представления расчетных зависимостей введены обозначения для функций образованных на основе решений однородного уравнения (10)

– случай сжатия

$$\begin{aligned} A(\xi) &= \frac{\pi}{2} \xi_0 (J_{\nu-1}(\xi) Y_{\nu-1}(\xi_0) - Y_{\nu-1}(\xi) J_{\nu-1}(\xi_0)); \\ B(\xi) &= \frac{\pi}{2} \xi_0 (Y_{\nu-1}(\xi) J_{\nu}(\xi_0) - J_{\nu-1}(\xi) Y_{\nu}(\xi_0)); \\ C(\xi) &= \frac{\pi}{2} \xi_0 (J_{\nu}(\xi) Y_{\nu-1}(\xi_0) - Y_{\nu}(\xi) J_{\nu-1}(\xi_0)); \\ D(\xi) &= \frac{\pi}{2} \xi_0 (Y_{\nu}(\xi) J_{\nu}(\xi_0) - J_{\nu}(\xi) Y_{\nu}(\xi_0)), \end{aligned} \quad (11)$$

– случай растяжения

$$\begin{aligned} \bar{A}(\xi) &= \xi_0 (I_{\nu-1}(\xi) K_{\nu-1}(\xi_0) - K_{\nu-1}(\xi) I_{\nu-1}(\xi_0)); \\ \bar{B}(\xi) &= \xi_0 (I_{\nu-1}(\xi) K_{\nu}(\xi_0) + K_{\nu-1}(\xi) I_{\nu}(\xi_0)); \\ \bar{C}(\xi) &= \xi_0 (I_{\nu}(\xi) K_{\nu-1}(\xi_0) + K_{\nu}(\xi) I_{\nu-1}(\xi_0)); \\ \bar{D}(\xi) &= \xi_0 (I_{\nu}(\xi) K_{\nu}(\xi_0) - K_{\nu}(\xi) I_{\nu}(\xi_0)), \end{aligned} \quad (12)$$

здесь $I_{\nu}(\xi)$, $K_{\nu}(\xi)$ – модифицированные функции Бесселя, ξ_0 – значение аргумента в начальной точке отсчета.

Представленные функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (\xi^{1-\nu} A(\xi))' &= -\xi^{1-\nu} C(\xi); (\xi^{1-\nu} B(\xi))' = -\xi^{1-\nu} D(\xi); (\xi^{\nu} C(\xi))' = \xi^{\nu} A(\xi); (\xi^{\nu} D(\xi))' = \xi^{\nu} B(\xi), \\ (\xi^{1-\nu} \bar{A}(\xi))' &= \xi^{1-\nu} \bar{C}(\xi); (\xi^{1-\nu} \bar{B}(\xi))' = \xi^{1-\nu} \bar{D}(\xi); (\xi^{\nu} \bar{C}(\xi))' = \xi^{\nu} \bar{A}(\xi); (\xi^{\nu} \bar{D}(\xi))' = \xi^{\nu} \bar{B}(\xi), \\ A(\xi_0) &= D(\xi_0) = \bar{A}(\xi_0) = \bar{D}(\xi_0) = 0; B(\xi_0) = C(\xi_0) = \bar{B}(\xi_0) = \bar{C}(\xi_0) = 1. \end{aligned}$$

С учетом свойств, введенных функций, выражения для прогибов представляются через начальные параметры: y_0 , θ_0 , M_0 , P_0 – прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале координат:

– случай сжатия

$$y(\zeta) = y_0 - \theta_0 l \frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \frac{\zeta^{1-\nu}}{\zeta_0^\nu} A(\lambda\zeta) + \frac{M_0 l^2}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^2 \left(1 - \frac{\zeta^{1-\nu}}{\zeta_0^\nu} B(\lambda\zeta) \right) + \\ + \frac{P_0 l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \left(\frac{\lambda}{2(1-\nu)} (\zeta^{2-2\nu} - \zeta_0^{2-2\nu}) + \frac{\zeta^{1-\nu}}{\zeta_0^\nu} A(\lambda\zeta) \right);$$

– случай растяжения

$$y(\zeta) = y_0 + \theta_0 l \frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \frac{\zeta^{1-\nu}}{\zeta_0^\nu} \bar{A}(\lambda\zeta) - \frac{M_0 l^2}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^2 \left(1 - \frac{\zeta^{1-\nu}}{\zeta_0^\nu} \bar{B}(\lambda\zeta) \right) - \\ - \frac{P_0 l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \left(\frac{\lambda}{2(1-\nu)} (\zeta^{2-2\nu} - \zeta_0^{2-2\nu}) - \frac{\zeta^{1-\nu}}{\zeta_0^\nu} \bar{A}(\lambda\zeta) \right).$$

Свойства, введенных функций, позволяют получить удобные выражения для углов поворота, моментов и поперечных сил.

В разделе проведены исследования устойчивости для основных условий закрепления. Так, в частности для конструкции с жестким защемлением нижнего сечения и шарнирной опорой на верхнем торце рассмотрена граничная задача (10) с условиями:

$$\zeta^{1-2\nu} \left(\zeta^{2\nu-1} y'(\zeta) \right)' \Big|_{\zeta=\zeta_0} = 0; \quad y(\zeta_0) = 0; \quad y(1) = 0; \quad \zeta^{2\nu-1} y'(\zeta) \Big|_{\zeta=1} = 0. \quad (13)$$

Условия (13) приводят к уравнению устойчивости

$$A(\lambda) + \frac{\lambda}{2(1-\nu)} \left(1 - \zeta_0^{2-2\nu} \right) C(\lambda) = 0. \quad (14)$$

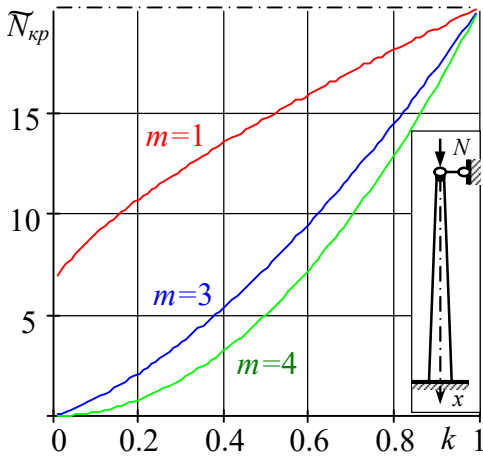


Рис. 3.

На графике рис. 3 показаны зависимости критической нагрузки $\tilde{N}_{кр} = \frac{\lambda^2(1-k)^2}{4(1-\nu)^2}$ от параметра поперечного размера k , полученные из численного исследования уравнения (14), для конструкций: стержня плоской трапециевидальной формы ($m=1$); клиновидного стержня ($m=3$);

стержня пирамидальной или конической формы ($m=4$). Штрихпунктирной линией обозначено известное в литературе значение критической силы для рассматриваемой схемы однородного стержня – $\tilde{N}_{кр} = (\pi/0,699)^2$.

В разделе так же рассмотрен продольно-поперечный изгиб стержневых неоднородных конструкций от действия распределенной поперечной нагрузки. Так если интенсивность поперечной нагрузки является степенной функцией ($p(\zeta) = p_\alpha \zeta^\alpha$), то частные решения уравнения (10) имеет вид

– для сжатого стержня

$$\theta_{\text{с}}(\zeta) = \frac{p_\alpha l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \frac{\lambda^{3\nu-1-\alpha}}{2(1-\nu)} \zeta^\nu s_{\alpha+3-3\nu,\nu}(\lambda\zeta);$$

– для растянутого стержня

$$\theta_{\text{р}}(\zeta) = \frac{p_\alpha l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \frac{\lambda^{3\nu-1-\alpha}}{2(1-\nu)} \zeta^\nu g_{\alpha+3-3\nu,\nu}(\lambda\zeta).$$

Для некоторых сочетаний индексов, функции Ломмеля обращаются в ноль в знаменателе, отдельно рассмотрены случаи действия нагрузки постоянной интенсивности ($p(\zeta) = \text{const}$) на конструкции: клиновидного стержня ($\nu = 2$) и стержня пирамидальной или конической формы ($\nu = 3/2$).

Отдельно в данном разделе рассмотрены модели продольно-поперечного изгиба невесомых стержней с квадратичным законом изменения изгибной жесткости ($m = 2$), для которых найдены решения в виде элементарных функций. Выполнена оценка влияния продольных сил на параметры НДС стержней. Для данного случая выполнены исследования устойчивости.

В четвертом разделе рассматриваются вопросы динамического расчета стержней с осевой неоднородностью геометрических и физико-механических характеристик при продольных и крутильных колебаниях на основе решения волнового уравнения методом Фурье. Разработан прикладной метод расчета стержней с произвольным видом осевой неоднородности.

В стержневых системах входящих в состав разного рода механизмов и конструкций наблюдается явление продольного или крутильного удара, которое может являться следствием технологического процесса или результатом негативных природных и иных нетехногенных воздействий. Для исследования ударных процессов в стержнях наибольшее распространение

получила волновая теория плоского удара, в соответствии с которой уравнение деформаций сечений стержня для продольных и крутильных колебаний приводится к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - b(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x, t), \quad (15)$$

где $u(x, t)$ – деформация (продольное перемещение или угол поворота), $a(x)$ – жесткость сечения стержня, $b(x)$ – инерционная характеристика сечения, $p(x, t)$ – интенсивность внешней нагрузки.

Рассматриваются стержни, жесткость которых изменяется по произвольному степенному закону от продольной координаты x , $a(x) = a_2 ((1-k)x/l + k)^\alpha$, $k = \sqrt[\alpha]{a_1/a_2}$, a_1 , a_2 – жесткости торцевых сечений стержня, α – показатель степени, который принимает любые вещественные значения. Для стержня справедливо следующее соотношение – $b(x)/a(x) = 1/c^2 = \text{const}$. Для стержней с такими параметрами уравнение (15) принимает вид

$$z^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \alpha z^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\frac{l}{c(1-k)} \right)^2 z^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{l^2}{a_2(1-k)^2} p(z, t), \quad z = (1-k) \frac{x}{l} + k. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) методом Фурье получено в начальных параметрах с использованием функций (11), где индекс функций Бесселя определяется, как $\nu = (1-\alpha)/2$.

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(z) w_n(t) = z^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{0n} k^{-\nu} C(\lambda_n z) + \frac{N_{0n} l}{a_2(1-k)} \frac{k^{\nu-1}}{\lambda_n} D(\lambda_n z) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n), \quad (17)$$

где u_{0n} , N_{0n} – перемещение и усилие в начальной точке отсчета для n -й формы колебаний (для крутильных колебаний угол поворота и момент), $\lambda_n = \frac{\omega_n l}{(1-k)c}$ – собственные значения частотного уравнения, соответствующей граничной задачи, ω_n , μ_n – собственная частота и фаза n -й формы колебаний.

Рассмотрение собственных функций для высоких частот колебаний может быть осложнено ухудшением сходимости последовательности функций Бесселя при увеличении значений аргумента. Для решения данной проблемы и разработки численных алгоритмов решения частотных уравнений разных граничных задач получены асимптотические разложения для функций (11):

$$\begin{aligned}
 A(\zeta) &\approx -\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \left(\sin(\zeta - \zeta_0) - \cos(\zeta - \zeta_0) \frac{4(v-1)^2 - 1}{8\zeta\zeta_0} (\zeta - \zeta_0) \right); \\
 B(\zeta) &\approx \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \left(\cos(\zeta - \zeta_0) + \sin(\zeta - \zeta_0) \left(\frac{4v^2 - 1}{8\zeta_0} - \frac{4(v-1)^2 - 1}{8\zeta} \right) \right); \\
 C(\zeta) &\approx \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \left(\cos(\zeta - \zeta_0) + \sin(\zeta - \zeta_0) \left(\frac{4(v-1)^2 - 1}{8\zeta_0} - \frac{4v^2 - 1}{8\zeta} \right) \right); \\
 D(\zeta) &\approx \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \left(\sin(\zeta - \zeta_0) - \cos(\zeta - \zeta_0) \frac{4v^2 - 1}{8\zeta\zeta_0} (\zeta - \zeta_0) \right). \quad (18)
 \end{aligned}$$

В работе получены асимптотические формулы для определения собственных значений основных видов граничных задач. Так для клиновидного стержня ($\alpha = 1$) с отношением площадей торцевых сечений – $k = 0,1$ жестко-ограниченного по торцам рассмотрена граничная задача (15) с условиями:

$$u(k, t) = 0; \quad u(1, t) = 0. \quad (19)$$

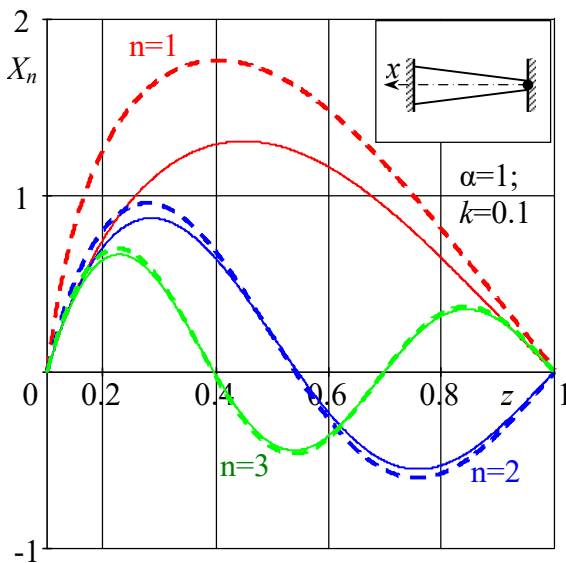


Рис. 4.

Из первого условия (14) следует выражение для собственных функций

$$X_n(z) = \frac{N_{0n} l}{EF_2} \frac{k^{v-1}}{\lambda_n (1-k)} z^v B(\lambda_n z). \quad (20)$$

Удовлетворив второе условие (19) получаем частотное уравнение

$$B(\lambda_n) = 0.$$

На графике рис. 4 показаны три первых собственных формы продольных деформаций (20), сплошные линии

соответствуют точным решениям в функциях Бесселя (11), пунктирными линиями показана их асимптотика (18).

Исследование влияния конструктивных параметров k и α на величины собственных частот стержня показало, что влияние геометрической формы стержня, при значениях параметра относительного поперечного размера $0,1 \leq k < 1$, на частоты существенно лишь в пределах трех-четырех первых форм, а для более высоких практически отсутствует.

Расчет НДС при продольном ударе стержней проводится с учетом свойства ортогональности собственных функций с весом $\rho(z) = z^{1-2\nu}$ – весовая функция. В работе получено выражение квадрата нормы собственных функций для произвольного вида граничных условий

$$\Delta_n^2 = \int_k^1 \rho Z_n^2 dz = \frac{1}{2} \left(z^{2-2\nu} Z_n^2 + \frac{z^{2\nu}}{\lambda_n^2} (z^{1-2\nu} Z_n')^2 - \frac{2\nu}{\lambda_n^2} (z^{1-2\nu} Z_n') Z_n \right) \Big|_k^1.$$

При наличии сосредоточенных инерционных нагрузок на торцах стержня, весовая функция принимается в виде

$$\rho(z) = z^{1-2\nu} + \frac{1-k^{2(1-\nu)}}{2(1-\nu)} (\xi_1 \delta(z-k) + \xi_2 \delta(z-1)); \quad \xi_{1,2} = \frac{M_{1,2}}{M_0},$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, $M_{1,2}$ – сосредоточенные инерционные нагрузки в торцевых сечениях, M_0 – инерционная характеристика стержня.

В работе рассмотрен ряд задач прикладного характера на исследование НДС стержней разных конфигураций при собственных и вынужденных колебаниях. Для некоторых параметров стержней собственные функции получены в элементарных функциях.

Для разработки прикладной методики расчета стержневых конструкций с произвольной осевой неоднородностью выполнено усреднение переменных коэффициентов в уравнении (16)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\eta \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\frac{l}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x,t) l^2 \int_0^1 \frac{dz}{a(z)}, \quad (21)$$

где $z = x/l$, $2\eta = -\int_0^1 \frac{a'(z)}{a(z)} dz = \ln \bar{k}$, ($\bar{k} = a_1/a_2 \leq 1$).

Решение уравнения (21) получено в виде

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(z) w_n(t) = e^{\eta z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{0n} \left(\cos \beta_n z - \frac{\eta}{\beta_n} \sin \beta_n z \right) + \frac{N_{0n} l}{\beta_n \bar{k} a_2} \sin \beta_n z \right) \sin(\omega_n t + \mu_n), \quad (22)$$

где $\beta_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2}$, $\lambda_n = \omega_n l / c$.

Для ряда граничных задач (21) собственные значения, соответствующие 1-й форме колебания, не определены при условии $|\eta| > 1$. Отсюда следует естественное ограничение возможности использования упрощенной модели (21) – $a_1/a_2 > 1/e^2$.

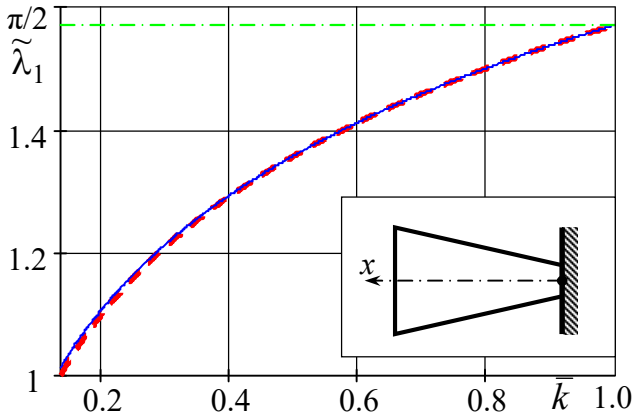


Рис. 5

На рис. 5 сплошной линией показаны значения $\tilde{\lambda}_1 = (1 - k)\lambda_1$ в зависимости от параметра $\bar{k}$ для конического стержня, полученные на основе точного решения (16), пунктирная кривая отражает исследование упрощенной модели (21) для граничных условий:

$$u(\bar{k}, t) = 0; \quad u'(z, t)|_{z=1} = 0.$$

Штрихпунктирной линией обозначен известный результат для однородного стержня ($\tilde{\lambda}_1 = \pi/2$).

Собственные функции (22) ортогональны с функцией $\Phi(z) = e^{-2\eta z}$, с учетом этого свойства получено выражение для квадрата нормы собственных функций произвольного вида граничной задачи

$$\Delta_n^2 = \int_0^1 \Phi Z_n^2 dz = \frac{\Phi}{2\beta_n^2} \left(((\beta_n^2 + \eta^2)z + \eta) Z_n^2 + z(Z_n')^2 - (2\eta z + 1) Z_n' Z_n \right) \Big|_0^1.$$

Сравнение результатов расчетов по упрощенной модели с известными аналитическими решениями показало достаточную точность для инженерных

расчетов (расхождение для разных параметров НДС не превысило 5%). Учитывая, что при $\bar{k} = 1$ ($\eta = 0$) упрощенная модель совпадает с точной для однородного стержня, данный метод позволяет использовать единый подход к решению задач динамики на продольные и крутильные колебания ступенчатых стержней со сложными переходами.

В пятом разделе рассмотрен общий подход к построению математических моделей поперечных колебаний стержневых конструкций с осевой неоднородностью геометрических и физико-механических свойств на основе метода Фурье при разных динамических воздействиях.

Динамический расчет конструкций и сооружений является основой для оценки их работоспособности и надежности, особенно в экстремальных условиях работы. Для исследования НДС при поперечных колебаниях в стержнях с распределенными и сосредоточенными параметрами в инженерной практике наибольшее распространение получила модель изгиба балки, которая представлена неоднородным дифференциальным уравнением четвертого порядка в частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t), \quad (23)$$

где $y(x, t)$ – уравнение изогнутой оси; $EJ(x)$ – изгибная жесткость стержня; $m(x)$ – линейная плотность; $p(x, t)$ – интенсивность поперечной нагрузки.

Из всего многообразия сочетаний изгибной жесткости и распределенной массы наибольший практический интерес представляют стержни, для которых линейная плотность и изгибная жесткость определяются зависимостями:

$$m = m_2 z^\alpha, \quad EJ = EJ_2 z^{\alpha+2}, \quad z = (1-k) \frac{x}{l} + k, \quad \alpha - \text{показатель степени, в}$$

зависимости от типа конструкции может принимать значения – $\alpha = 0; 1; 2; \dots$, m_2 – линейная плотность в торцевом сечении, EJ_2 – изгибная жесткость в торцевом сечении, $k = h_1 / h_2$; h_1 и h_2 – параметры поперечных размеров торцевых сечений определяются в зависимости от формы объекта (для

стержней конической формы - радиусы инерции). Для данного случая уравнение (23) примет вид

$$z^{\alpha+2} y'''' + 2(\alpha+2)z^{\alpha+1} y''' + (\alpha+2)(\alpha+1)z^{\alpha} y'' + \frac{m_2 l^4}{EJ_2(1-k)^4} z^{\alpha} \ddot{y} = \frac{p(z,t)l^4}{EJ_2(1-k)^4}, \quad (24)$$

Решение уравнения (24) получено методом Фурье и представлено с использованием метода начальных параметров

$$\begin{aligned} y(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) w_n(t) = z^{-\alpha/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(y_{0n} k^{\alpha/2} \tilde{A}(\lambda_n \sqrt{z}) + \right. \\ \left. + \frac{2l\theta_{0n}}{\lambda_n(1-k)} k^{(\alpha+1)/2} \left(\tilde{C}(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(\alpha+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} \tilde{B}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \right. \\ \left. + \frac{4l^2 M_{0n}}{\lambda_n^2 (1-k)^2 EJ_2} k^{-(\alpha+2)/2} \tilde{B}(\lambda_n \sqrt{z}) + \right. \\ \left. + \frac{8l^3 P_{0n}}{\lambda_n^3 (1-k)^3 EJ_2} k^{-(\alpha+1)/2} \tilde{D}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n), \end{aligned} \quad (25)$$

где y_{0n} , θ_{0n} , M_{0n} , P_{0n} – перемещение, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начальной точке отсчета для n -й формы колебаний,

$\lambda_n = 4 \sqrt{\frac{16\omega_n^2 l^4 m_2}{(1-k)^4 EJ_2}}$ – собственные значения частотного уравнения,

соответствующей граничной задачи, ω_n , μ_n – собственная частота и фаза n -й формы колебаний. Функции, входящие в выражение (25) аналогичны функциям Крылова, используемых в задачах динамического изгиба однородных стержней, и образованы комбинациями функций (11), (12), где индекс функций Бесселя принимается – $\nu = \alpha + 1$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\zeta) &= \frac{1}{2}(\bar{B}(\zeta) + B(\zeta)); \quad \tilde{B}(\zeta) = \frac{1}{2}(\bar{B}(\zeta) - B(\zeta)); \\ \tilde{C}(\zeta) &= \frac{1}{2}(\bar{A}(\zeta) - A(\zeta)); \quad \tilde{D}(\zeta) = \frac{1}{2}(\bar{A}(\zeta) + A(\zeta)). \end{aligned} \quad (26)$$

Для решения проблемы плохой сходимости функций Бесселя большого аргумента, получены асимптотические разложения для функций (26):

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(\zeta) &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} (\cosh(\zeta - \zeta_0) + \cos(\zeta - \zeta_0)); \\
\tilde{B}(\zeta) &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} (\cosh(\zeta - \zeta_0) - \cos(\zeta - \zeta_0)); \\
\tilde{C}(\zeta) &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} (\sinh(\zeta - \zeta_0) + \sin(\zeta - \zeta_0)); \\
\tilde{D}(\zeta) &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} (\sinh(\zeta - \zeta_0) - \sin(\zeta - \zeta_0)).
\end{aligned} \tag{27}$$

В работе рассмотрена асимптотика собственных функций для основных видов граничных условий. Так для клиновидного стержня ($\alpha = 1$) с отношением размеров торцевых сечений – $k = 0,1$ шарнирно-опертого по краям рассмотрена граничная задача (24) с условиями:

$$\begin{aligned}
y(k, t) &= 0; \quad y''_{zz}(k, t) = 0; \\
y(1, t) &= 0; \quad y''_{zz}(1, t) = 0.
\end{aligned}$$

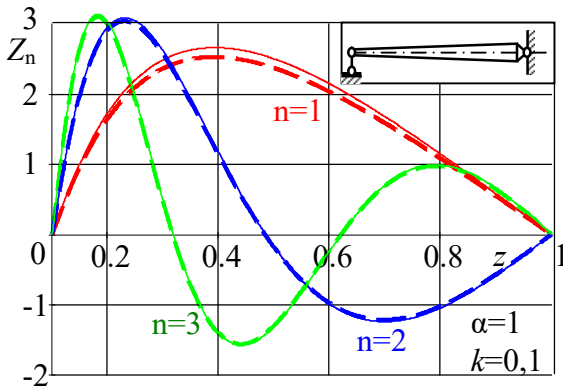


Рис. 6.

На графике рис. 6 показаны три первых собственных формы поперечных деформаций (25), сплошные линии соответствуют точным решениям в функциях Бесселя (11), (12), пунктирными линиями показана их асимптотика (27).

В отличие от случая продольных колебаний влияние геометрической формы стержня на частоты может быть существенным в более широких пределах – порядка десяти первых форм.

Частное решение уравнения (24) находится с использованием свойства ортогональности собственных функций с весом $\rho(z) = z^\alpha$ – весовая функция. Для произвольного вида граничных условий квадрат нормы собственных функций получен в виде

$$\Delta_n^2 = \left(\frac{1}{2} z^{\alpha+1} Z_n^2 + 8 \frac{\alpha+1}{\lambda_n^4} Z_n' (z^{\alpha+2} Z_n'') + \frac{8}{\lambda_n^4} z^{-\alpha-1} (z^{\alpha+2} Z_n'')^2 - \right. \\ \left. - 8 \frac{\alpha-1}{\lambda_n^4} Z_n (z^{\alpha+2} Z_n'')' - \frac{16}{\lambda_n^4} z Z_n' (z^{\alpha+2} Z_n'')' \right) \Big|_k^1.$$

Отдельный интерес представляет расчет стержневых систем при наличии инерционных нагрузок. Так, если в сечениях стержня z_i находятся сосредоточенные массы, то весовая функция принимает вид

$$\rho(z) = z^\alpha + \frac{1-k^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sum \xi_i \delta(z-z_i), \quad \xi_i = \frac{M_i}{M_0},$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, M_i – сосредоточенные массы, M_0 – масса стержня.

Встречается также и более редкий случай, когда требуется учитывать не только сосредоточенные инерционные поперечные силы, но и инерционные моменты при повороте сечения. В таких задачах собственные функции не ортогональны с весом, в этом случае следует исходить из ортогональности функции Z_n с функцией $\bar{Z}_m$ ($m \neq n$). При наличии инерционных моментов в сечениях z_i выражение для $\bar{Z}_m$ будет иметь вид

$$\bar{Z}_m(z) = z^\alpha Z_m(z) - \frac{1}{3} (1-k)^3 \sum \psi_i Z_m'(z_i) \delta'(z-z_i); \quad \psi_i = 3 \frac{J_{mi}}{m_2 l^3},$$

где $\delta'(z)$ – производная дельта-функции Дирака, J_{mi} – локальные инерционные моменты, $m_2 l^3 / 3$ – условный момент инерции массы стержня.

Из исследования влияния инерционных нагрузок на величину собственных частот можно сделать вывод, что при величине $\xi = 2 \div 5$ динамический изгиб стержня практически полностью определяется первой собственной формой, таким образом, для этих условий можно использовать упрощенную модель невесомого стержня.

В шестом разделе рассмотрена математическая модель изгибных колебаний упругого стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости предварительно-загруженного продольной силой. На основе новых

аналитических решений проведена оценка влияния продольной нагрузки на характеристики колебательного процесса и динамические коэффициенты.

Практика решения задач динамики показывает, что продольные нагрузки в расчетах на поперечные колебания можно не учитывать, если их величина не сопоставима со значениями критических сил. Тем не менее, количественных оценок такого влияния в литературе рассмотрено, крайне мало, а с использованием аналитических решений подобные исследования имеются только для стержней однородной структуры. При наличии продольных сил уравнение поперечных колебаний приводится к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t). \quad (28)$$

Рассматривается стержень с постоянной величиной линейной плотности ($m = const$) и квадратичным законом изменения изгибной жесткости по длине $EJ(x) = EJ_2 ((1-k)x/l + k)^2$, где $k = \sqrt{EJ_1 / EJ_2}$, EJ_1 , EJ_2 – изгибные жесткости торцевых сечений, на стержень действует продольная сила $N_0 = const$. Для такой конфигурации уравнение (28) приводится к неоднородному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами

$$z^2 \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + 4z \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} + (2 \mp \tilde{N}) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{ml^4}{(1-k)^4 EJ_2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{p(z, t)l^4}{(1-k)^4 EJ_2}, \quad (29)$$

где $z = (1-k)\frac{x}{l} + k$, $\tilde{N} = \frac{N_0 l^2}{(1-k)^2 EJ_2}$ – безразмерная продольная нагрузка. Знак

минус в уравнении (29) соответствует состоянию растяжения, а плюс – сжатия.

С использованием метода разделения переменных, получены решения для уравнения (29):

– в случае растяжения или сжатия при $\tilde{N} < 0,25$

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n} U_0(\lambda_n \sqrt{z}) + C_{2n} U_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_{3n} U_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_{4n} U_2(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n); \quad (30)$$

– в случае сжатия при $\tilde{N} > 0,25$

$$y(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n} \bar{U}_0(\lambda_n \sqrt{z}) + C_{2n} R(\lambda_n \sqrt{z}) + C_{3n} W(\lambda_n \sqrt{z}) + C_{4n} \bar{U}_2(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n), \quad (31)$$

где C_{1n} , C_{2n} , C_{3n} , C_{4n} – произвольные постоянные, $\lambda_n = \sqrt[4]{\frac{16\omega_n^2 l^4 m}{(1-k)^4 EJ_2}}$ – собственные значения соответствующей граничной задачи, ω_n – собственная частота n -й формы колебаний, $\eta = \sqrt{1 \pm 4\tilde{N}}$ для зависимости (30) и $\eta = \sqrt{4\tilde{N} - 1}$ для (31), функции U_α и $\bar{U}_\alpha$ являются решениями однородного уравнения (29) (если η не целое), получены в виде ряда

$$U_\alpha(\xi) = \xi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\xi/2)^{4j}}{2^{2j} \Gamma\left(2j + \frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(j + \frac{\alpha - \eta}{4} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(j + \frac{\alpha + \eta}{4} + \frac{3}{4}\right)};$$

$$\bar{U}_\alpha(\xi) = \xi^\alpha \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{4m}}{\prod_{j=1}^{2m} (2j + \alpha) \prod_{j=1}^m ((4j + \alpha - 1)^2 + \eta^2)} \right).$$

функции $R(z)$ и $W(z)$ – вещественные функции, которые определены путем выделения действительной и мнимой части функций $\bar{U}_{1 \pm i\eta}$

$$\bar{U}_{1 \pm i\eta}(z) = R(z) \pm iW(z).$$

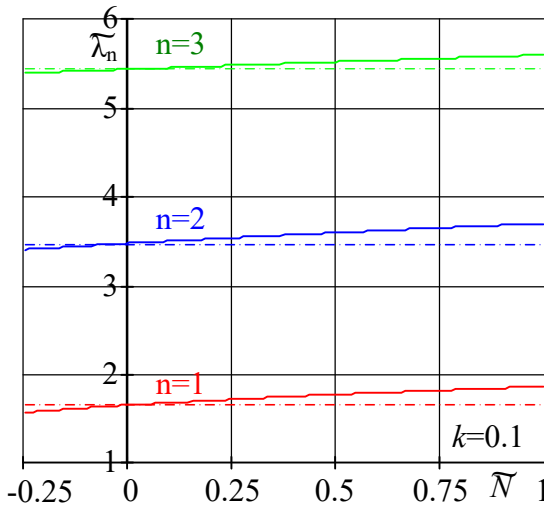


Рис. 7.

В работе выполнен анализ влияния продольной силы на значения первых собственных частот колебаний. На рис. 7 представлены зависимости первых собственных значений $\tilde{\lambda}_n = (1-k)\lambda_n/2$ от безразмерной продольной нагрузки $\tilde{N}$ для стержня с относительным поперечным размером $k = 0,1$, граничной задачи (29) с условиями

$$y(1,t)=0; y'_z(z,t)|_{z=1}=0; z^2 y''_{zz}(z,t)|_{z=k}=0; \left((z^2 y''(z,t))' \mp \tilde{N} y(z,t) \right) \Big|_{z=k} = 0, \quad (31)$$

где знак минус для случая растяжения, плюс – сжатия. Штрихпунктирными линиями показаны собственные значения ненагруженного стержня из рассмотрения соответствующей задачи (24).

Получен квадрат нормы собственных функций для произвольного вида граничных условий

$$\Delta_n^2 = \left(\frac{z}{2} Z_n^2 + \frac{8}{\lambda_n^4} Z'_n (z^2 Z''_n) + \frac{8}{\lambda_n^4 z} (z^2 Z''_n)^2 + \frac{8}{\lambda_n^4} Z_n (z^2 Z''_n)' - \right. \\ \left. - \frac{16z}{\lambda_n^4} Z'_n (z^2 Z''_n)' - \frac{2}{\lambda_n^4} (\eta^2 - 1) (Z_n Z'_n - z Z_n'^2) \right) \Big|_k^1.$$

С использованием модели динамического изгиба, проведены исследования устойчивости конструкций для случаев «мертвой» и следящей нагрузок. На рис. 8 видно, что частота главной формы колебаний стержня с относительным поперечным размером $k = 0,01$ обращается в ноль, когда продольная сила достигает критического значения $\tilde{N}_{кр} = 0,51$, что согласуется с аналогичными исследованиями для однородных стержней.

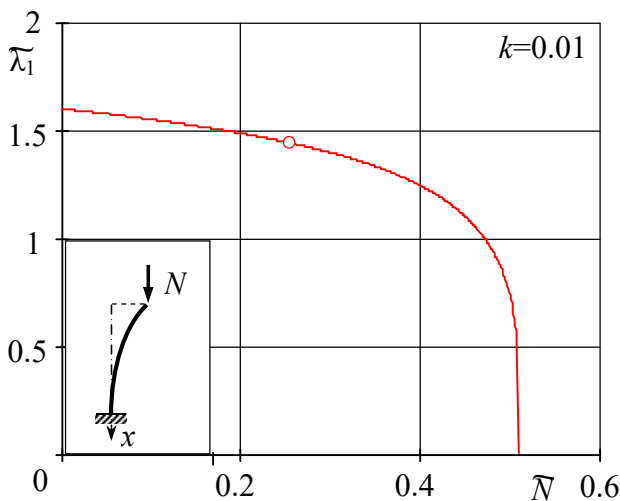


Рис. 8.

Для случая следящей нагрузки критическая сила определяется величиной, при которой происходит совпадение двух ветвей собственных частот, выше этой нагрузки наступает динамическая неустойчивость. На рис. 9 представлена частотная диаграмма для консольного стержня с относительным поперечным размером

$k = 0,01$, в случае следящей нагрузки граничные условия имеют вид

$$y(1,t)=0; y'_z(z,t)|_{z=1}=0; z^2 y''(z,t)|_{z=k}=0; \left((z^2 y''(z,t))' \right) \Big|_{z=k} = 0.$$

Для приведенного примера образование петли происходит при значении $\tilde{N} = 6,01$, таким образом, при следящей нагрузке критическая сила получается примерно в двенадцать раз большей, чем при «мертвой» нагрузке. Известно, что аналогичное отношение критических сил для однородного консольного стержня составляет восемь раз.

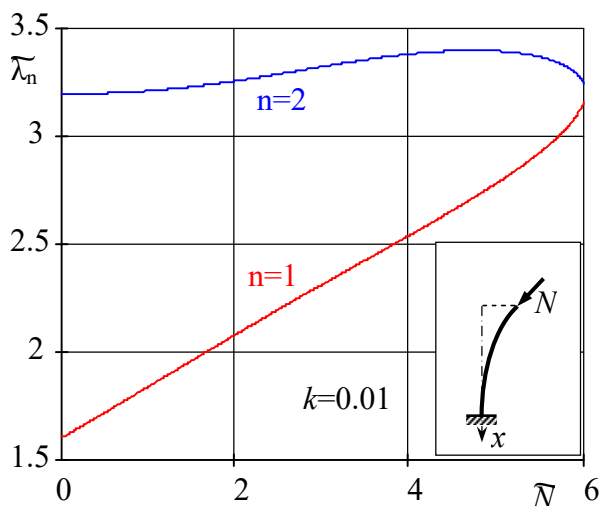


Рис. 9.

В работе выполнено исследование влияния продольной нагрузки на значения динамических коэффициентов при изгибе конструкции, которое показало, что в отличие от стержней однородной структуры, для которых такое влияние следует учитывать при величине нагрузки близкой к критической. Для неоднородного стержня оно будет существенным, даже

если продольная сила будет в половину от критической.

В седьмом разделе рассмотрены примеры приложения, полученных решений к задачам практической сферы применения. Также на основе проведенных исследований разного вида моделей, изложены подходы для проведения инженерных расчетов.

Для ряда задач использование математических моделей НДС на основе аналитических методов является не только более простым способом решения, но и практически единственным, который позволяет в комплексе учесть и оценить взаимосвязь и степень влияния параметров модели друг на друга. Одной из таких задач, является актуальная в области шахтного строительства задача об устойчивости стальной крепи при спуске на плаву. Особенности задачи, которые затрудняют использование других методов решения, является: наличие нескольких участков растяжения-сжатия, взаимосвязь действующих нагрузок с конструктивными параметрами объекта, а также геометрическая изменяемость стержневой системы. В рамках первого подраздела подробно

рассмотрен процесс построения математической модели на основе аналитических решений, приведенных во втором разделе для нескольких конструктивных схем. По результатам исследования моделей даны практические рекомендации относительно принципов разработки технологии монтажа стальной крепи, исходя из обеспечения ее устойчивости в процессе спуска.

При постановке большинства задач изгиба стержневых систем возникает необходимость оценки степени влияния продольных нагрузок на параметры НДС и устойчивость стержня. В случае стержней однородной структуры типовые схемы закреплений подробно изучены, а инженерные зависимости для определения критических нагрузок приведены во многих справочниках, для стержней переменного сечения подобных исследований практически нет. Во втором подразделе седьмого раздела предложены зависимости для определения критических нагрузок от параметра поперечного размера для основных видов закрепления неоднородных стержней, которые получены путем аппроксимации результатов численных исследований математических моделей, рассмотренных во втором и третьем разделе.

В третьем подразделе проведено исследование механизма формирования упругих волн в стержнях с неоднородностью геометрических и физико-механических характеристик в процессе удара. Исследование показало, что после соударения не вся потенциальная энергия деформации стержня идет на восстановление кинетической, часть энергии остается, и после освобождения от связи вызывает собственные колебания упругого стержня. С учетом этого явления, разработаны рекомендации относительно определения величины коэффициента восстановления при ударе упругих стержней, который используется во многих задачах прикладной теории удара.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Диссертация является завершенной научно-исследовательской работой, в которой решена актуальная проблема построения математических моделей НДС для упругих стержней со сложной конфигурацией, как действующих нагрузок, так и геометрических и физико-механических свойств, при статических и динамических воздействиях, на основе новых аналитических решениях.

Основные научные результаты работы заключаются в следующем.

1. На основе аналитического решения уравнения изгиба в функциях Бесселя и Ломмеля и их модификаций, разработан алгоритм определения критических сил для стержней с произвольной конфигурацией изгибной жесткости и распределенной нагрузки.

2. Впервые решена задача в аналитической форме продольно-поперечного изгиба весомого стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости от продольной координаты (решение получено с использованием функций Бесселя и Ломмеля). Выполнена оценка влияния продольных нагрузок на параметры НДС стержня при изгибе, а также проведено исследование устойчивости стержня, для распространенных условий закрепления.

3. По приближенным моделям проведена оценка результатов расчетов с точными решениями, для частных случаев продольного изгиба весомых стержней.

4. Введены функции (на основе рекуррентных соотношений функций Бесселя), структура которых позволяет представить зависимости перемещений и внутренних силовых факторов методом начальных параметров в задачах продольно-поперечного изгиба невесомых стержней со степенным законом изменения изгибной жесткости от продольной координаты. Частные решения в случае на распределенной нагрузки получены в функциях Ломмеля и их модифицированной форме.

5. Впервые применен метод Фурье к задачам динамики продольных и крутильных колебаний стержней с осевой неоднородностью геометрических и механических свойств. Исследовано влияние параметров стержня на величину собственных частот для основных видов граничных условий. Для решения задач вынужденных колебаний и удара получено выражение квадрата нормы собственных функций для произвольного вида граничных условий. Рассмотрены примеры моделирования НДС стержней переменного сечения при продольном и крутильном ударе.

6. Разработан приближенный метод динамического расчета для упругих стержней с произвольной продольной и крутильной жесткостью. Дано обоснование выбора шага для аппроксимации сложных форм участками для которых известны аналитические решения.

7. Получено новое решение задачи динамики поперечных колебаний стержней с распределенной массой и переменной жесткостью, методом Фурье с учетом наличия инерционных нагрузок, когда собственные функции не ортогональны. Выражения для деформаций и внутренних силовых факторов представлены через начальные параметры с использованием функций, которые являются аналогом функций Крылова для неоднородных балок. Проведен анализ влияния параметров моделей на собственные формы и частоты колебаний для основных условий закрепления. Для ряда прикладных задач получены динамические коэффициенты, которые по прогибам практически совпадают с известными значениями для соответствующих задач однородных стержней, а по усилиям, в зависимости от параметров модели, могут варьироваться в значительном диапазоне.

8. Выполнена оценка влияния продольной силы на величину собственных частот изгибных колебаний для упругого стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости, на основе нового аналитического решения уравнения колебаний. Также проведены исследования устойчивости стержня на основе динамического критерия для случаев «мертвой» и следящей нагрузки.

9. Предложена математическая модель НДС обсадной трубы, как весомого растянуто-сжатого стержня. На ее основе проведены исследования устойчивости прямолинейной формы. По результатам исследования даны практические рекомендации относительно технологии монтажа стальных крепей.

10. Для инженерных расчетов получены эмпирические зависимости критических нагрузок на основе аппроксимации результатов численных исследований математических моделей.

11. Установлено, что после удара стержня переменного сечения о жесткий ограничитель не вся потенциальная энергия идет на восстановление кинетической энергии. Часть энергии остается и вызывает собственные колебания, при этом ее величина во многом зависит от схемы удара. На основании численных исследований моделей удара упругих стержней о жесткий ограничитель предложены рекомендации относительно уточнения величины коэффициента восстановления.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК ДНР

1. Улитин Г.М. Устойчивость упругого весомого стержня переменной изгибной жесткости, моделирующего конструкции башенного типа / Г.М. Улитин, **С.Н. Царенко** // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. №6. – С. 36-40, (Включен в РИНЦ).

2. Улитин Г.М. Поперечные колебания упругого стержня переменного сечения, моделирующего конструкции несущих опор / Г.М. Улитин, **С.Н. Царенко** // Труды ИПММ. – 2016. – Т.30. – С. 140–146.

3. Улитин Г.М. Продольно-поперечный изгиб и устойчивость весомой стержневой системы / Г.М. Улитин, **С.Н. Царенко** // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. – №2. – С. 18–23, (Включен в РИНЦ).

4. **Царенко С.Н.** Динамика изгибных колебаний конструкций с осевой неоднородностью геометрических характеристик // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. – № 3(278). – С. 48–54, (Включен в РИНЦ).

5. **Царенко С.Н.** Динамика изгибных колебаний предварительно нагруженных стержней с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. - № 2. – С. 54-61.

В рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК ДНР, включенных в международные наукометрические базы

6. Улітін Г.М. Удар конічного стрижня об жорстку перешкоду / Г.М. Улітін, **С.М. Царенко** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 93. – С. 56-63, (Включен в Web of Science, Index Copernicus, Directory of Open Access Journals).

7. **Tsarenko S.** Investigation of strained deformed state of variable stiffness rod / S. Tsarenko, G. Ulitin // SpringerPlus. – 2014. – Vol. 3. No 1. P. 367. режим доступа: <http://www.springerplus.com/content/3/1/367>, (Включен в Scopus).

8. Улитин Г.М. О продольных колебаниях упругих стержней переменного сечения / Г.М. Улитин, **С.Н. Царенко** // Прикл. мех. – 2015. – Т. 51. №1. – С. 123–129. **Тоже:** Ulitin G.M. Longitudinal Vibrations of Elastic Rods of Variable Cross-Section. / G.M. Ulitin, S.N. Tsarenko // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51. No. 1. – P. 123-129, (Включен в Web of Science, Scopus).

9. Улитин Г.М. Изгибные колебания стержня с переменной жесткостью и распределенной массой / Г.М. Улитин, **С.Н. Царенко** // ПММ. – 2015. – Т. 79, вып. 6. – С. 817-823. **Тоже:** Ulitin G.M. Flexural vibrations of a rod of variable stiffness and distributed mass / G.M. Ulitin, S.N. Tsarenko // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – V. 79, No 6. – P. 572–576, (Включен в РИНЦ, Web of Science, Scopus).

10. Улитин Г.М. Метод усреднения в задачах о продольном ударе стержней переменного сечения / Г.М. Улитин, **С.Н. Царенко** // Вестник Южно-

уральского государственного университета. Серия: математика. механика. физика. – 2016. Т. 8, вып. 1. – С. 43–48, (Включен в РИНЦ, zbMATH).

11. Stepanov R. Dynamics of Longitudinal Impact in the Variable Cross-Section Rods / R. Stepanov, D. Romenskyi, **S. Tsarenko** // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 317 – P. 012029 URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/317/1/012029>, (Включен в Scopus).

Научные работы, опубликованные в других журналах и изданиях

12. **Царенко С.Н.** Частотные характеристики и собственные колебания легких металлических мачт / С.Н. Царенко, В.В. Губанов, И.В. Межинская // Сучасне промислове та цивільне будівництво. - 2010. – Т. 6, Вип. 4. – С. 193–200, (Включен в РИНЦ, Index Copernicus).

13. Шевченко Ф.Л. Общие и различные свойства балок и ферм / Ф.Л. Шевченко, **С.Н. Царенко** // Сучасне промислове та цивільне будівництво - Макіївка, 2011. – Том 7, № 4. – С. 215–223, (Включен в РИНЦ, Index Copernicus).

14. Шевченко Ф.Л. Оценка точности упрощенного динамического расчета систем с распределенными параметрами на примере однопролетной жестко защемленной балки с консолью / Ф.Л. Шевченко, **С.Н. Царенко** // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. - 2011. – Вып. 45. – С.159–167.

15. Шевченко Ф.Л. Проблемы расчета буровых вышек на устойчивость / Ф.Л. Шевченко, Ю.В. Петтик, **С.Н. Царенко** // Наукові праці ДонНТУ. Серія: «Гірничо-геологічна». – 2012. – Вип. 16 (206) – С. 115-123, (Включен в РИНЦ).

16. Улитин Г.М. Поперечные колебания металлических башенных конструкций с учетом переменной жесткости и продольных нагрузок / Г.М. Улитин, **С.Н. Царенко** // Вібрації в техніці та технологіях. – 2012. – Вып. 2 (66). – С. 90–94.

17. Шевченко Ф.Л. Расчет на устойчивость составных металлоконструкций переменной жесткости / Ф.Л. Шевченко, Г.М. Улитин, **С.Н. Царенко** // Вісник СевНТУ: зб. наук. пр. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – 2012. – Вип. 133. – С. 85-89, (Включен в РИНЦ).
18. Шевченко Ф.Л. Устойчивость ретрансляционной башни / Ф.Л. Шевченко, **С.Н. Царенко**, Ю.В. Петтик // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво). – 2012. – Т. 2, Вип. 2(32). – С. 90–105.
19. Улітін Г.М. Моделирование динамических процессов в бойках гиперболической формы в механизмах ударной дѣи / Г.М. Улітін, **С.М. Царенко** // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014 – № 3. – С. 37-42.
20. **Царенко С.Н.** Устойчивость конических стоек трубчатого сечения // Вісник СевНТУ: зб. наук. пр. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – 2014. – Вип. 148. – С. 64-68, (Включен в РИНЦ).
21. **Царенко С.Н.** Устойчивость стальной крепи при спуске на плаву // Изв. вузов. Горный журнал. – 2014. – Вып. 7. – С. 48-55, (Включен в РИНЦ, Chemical Abstracts, GeoRef).
22. **Царенко С.Н.** Продольно-поперечный изгиб стержней переменной жесткости // Изв. вузов. Строительство. – 2016. – № 1 (685). – С. 5–13, (Включен в РИНЦ, Chemical Abstracts).
23. **Царенко С.Н.** Устойчивость весомых стержней переменного сечения // Вестник ВолгГАСУ. Серия: строительство и архитектура. – 2016. – № 46 (65). – С. 68–74, (Включен в РИНЦ).
24. Сотников А.Л. Математическая модель и методика синтеза упругих элементов рессорного механизма качания кристаллизатора МНЛЗ / А.Л. Сотников, **С.Н. Царенко** // Вестник машиностроения. – 2017. – № 12. – С. 25-29, (Включен в РИНЦ).
25. Улитин Г.М. Изгибные колебания упругого стержня с переменной жесткостью сжатого продольной силой / Г.М. Улитин, **С.Н. Царенко** // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 2 (59). – С. 19-26.

26. **Царенко С.Н.** Устойчивость невесомого растянуто-сжатого стержня, моделирующего работу стальной крепи при спуске на плаву // С.Н. Царенко, И.И. Бридун, М.В. Бридун // Вестник Донецкого национального технического университета. – 2018. – № 2(12). – С. 29–34, (Включен в РИНЦ).

Научные работы и тезисы докладов в материалах конференций

27. Шевченко Ф.Л. Устойчивость буровых вышек башенного типа и их расчет на жесткость / Ф.Л. Шевченко, Ю.В. Петтик, **С.Н. Царенко** // Матеріали міжнародної конференції „Форум гірників – 2011”, Дніпропетровськ, 12–15 жовтня 2011 р. – Дніпропетровськ, 2011 – С. 216–224.

28. Шевченко Ф.Л. Упрощенный расчет частот основного тона поперечных колебаний буровых вышек и их динамический расчет на ветровую нагрузку / Ф.Л. Шевченко, Ю.В. Петтик, **С.Н. Царенко** // Матеріали міжнародної конференції „Форум гірників – 2012”, Дніпропетровськ, 3–6 жовтня 2012 р. – Дніпропетровськ, 2012 – Т.3. – С. 247–251.

Учебники и учебные пособия с грифом МОНУ

29. Шевченко Ф.Л. Задачі з опору матеріалів: Навчальний посібник / Ф.Л. Шевченко, **С.М. Царенко**. –Донецьк, ФОП Бабалік А.В., 2011. – 356 с.

Личный вклад автора в работы, опубликованные с соавторами: [1-3,6-11,16,17,19,25,26] – соискателем разработаны математические модели, проведены вычисления и выполнен анализ результатов исследований; [12-15,18,24,27,28] – соискателем проведены вычисления; [29] – соискателем проведены вычисления в задачах устойчивости и динамики.

АННОТАЦИЯ

Царенко С.Н. Численно-аналитические исследования динамики и устойчивости неклассических моделей упругих стержневых конструкций.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» - ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, 2018.

В диссертации рассмотрена проблема анализа динамики и устойчивости моделей упругих стержневых конструкций с осевой неоднородностью физико-механических и геометрических свойств на основе новых аналитических решений. Выполнены исследования статической формы продольно-поперечного изгиба и устойчивости стержней ступенчато-переменной жесткости при учете распределенных и локальных продольных нагрузок. Разработана методика анализа устойчивости стержней с переменными механическими и геометрическими характеристиками при продольном изгибе. Разработаны методики анализа продольно-поперечного изгиба и устойчивости стержневых конструкций с частными случаями осевой неоднородности. Исследованы основные свойства функций представляющих собой новые аналитические решения уравнений статического и динамического деформирования неоднородных стержневых конструкций. Разработана методика расчета параметров динамического деформирования при продольных и крутильных колебаниях стержневых конструкций со степенным законом осевой неоднородности. На основе метода усреднения переменных коэффициентов разработана прикладная версия методики анализа НДС продольных и крутильных колебаний стержневых конструкций с произвольной осевой неоднородностью. Рассмотрены специальные подходы к реализации метода Фурье применительно к проблемам динамики неоднородных стержневых конструкций с учетом наличия локальных инерционных нагрузок. Выполнены численно-аналитические исследования модели поперечных колебаний предварительно нагруженных стержней с квадратичной осевой неоднородностью изгибной жесткости. Рассмотрен ряд неклассических краевых задач статики, динамики и устойчивости стержневых конструкций, имеющих прикладное значение.

Ключевые слова: упругий стержень, деформации, напряжения, устойчивость стержня, продольный удар, изгибные колебания, метод Фурье, функции Бесселя, функции Ломмеля.

ABSTRACT

Tsarenko S.N. Numerical and analytical investigation of the dynamics and stability of nonclassical models of elastic rod structures.

Dissertation for Doctor of Physical and Mathematical Sciences by specialty 01.02.04 "Mechanics of a deformable solid body" - Donetsk National Technical University, Donetsk, 2018.

The problem of the analysis of dynamics and stability of models of elastic rod designs with axial inhomogeneous of physicommechanical and geometric properties on the basis of new analytical solutions is considered. The investigation of the static form of the longitudinal-transverse bending and the stability of the stiff-variable stiffness rods, taking into account the distributed and local longitudinal loads, are performed. Method of analysis of the stability of rods with variable mechanical and geometric characteristics. Methods of analysis of longitudinal-transverse bending and stability of rod structures with special cases of axial inhomogeneity developed. The basic properties of functions representing new analytical solutions of the equations of static and dynamic deformation of inhomogeneous rod structures are investigated. Method of calculating the parameters of dynamic deformation for longitudinal and torsional vibrations of rod structures of axial inhomogeneity is developed. The applied version of the technique for analyzing the stress-strain state of longitudinal and torsional vibrations of rod designs with arbitrary axial inhomogeneity was developed on the basis of the method of averaging the variable coefficients. Special approaches to the implementation of the Fourier method as applied to the problems of the dynamics of inhomogeneous rod structures with allowance for the presence of local inertial loads are developed. Numerical-analytical studies of the model of transverse oscillations of preloaded rods with quadratic axial inhomogeneity of

flexural rigidity are performed. Nonclassical boundary value problems of statics, dynamics and stability of bar structures having an applied value are considered.

Key words: elastic rod, deformations, stresses, rod stability, longitudinal impact, bending vibrations, Fourier method, Bessel functions, Lommel functions.