Министерство образования и науки
Донецкой народной республики
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет»

На правах рукописи

Нескородев Роман Николаевич

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРУГОГО И ВЯЗКОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ГЕОМАССИВОВ

Специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк – 2022

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет», г. Донецк

Научный консультант	**Сторожев Валерий Иванович,** доктор технических наук, профессор
Официальные оппоненты:	
Ведущая организация:	

Защита состоится …… в ……. на заседании диссертационного совета Д 01.016.03 при ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по адресу: 83001, г. Донецк, проспект Гурова, 14, Главный корпус, ауд. 603.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по адресу: 83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24, http://science.donnu.ru.

Автореферат разослан_____ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 01.016.03
канд. физ.-мат. наук А.Б. Мироненко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Механика деформируемого твердого тела, как отрасль фундаментальных научных исследований и научная база важнейших приложений в проектном моделировании для самого широкого ряда промышленно-технологических отраслей – от строительства и машиностроения, до приборостроения и акустоэлектроники, имеет одним из обусловленных внутренней логикой и прикладными запросами приоритетных векторов развития создание новых эффективных теоретических компьютерно-математических методов для исследования усовершенствованных неклассических моделей объектов и процессов деформирования. К категории неклассических при этом относятся модели, предусматривающие учет специфических особенностей в описании физико-механических и геометрических свойств деформируемых тел и элементов конструкций, которые нивелировались в большинстве их используемых современных вариантов. Естественное усложнение математического описания неклассических моделей соответственно требует разработки новых модификаций математических методов их исследования. При выраженной тенденции к изучению все большего числа моделей деформирования на базе стандартизированных конечно-элементных методов, развитие аналитико-числовых подходов к исследованию неклассических моделей деформирования сохраняет чрезвычайно важное значение, поскольку для методов этого типа, помимо прочего, реализуется поэтапный контроль достоверности промежуточных и конечных результатов анализа, несопоставимо меньшими являются необходимые ресурсы вычислительных систем и времени реализации расчетных этапов, возможно их использование для верификации результатов применения других подходов и т.д.

В контексте представленных соображений, к числу разделов механики деформируемого твердого тела, для которых весьма актуальна разработка аналитико-числовых методов анализа неклассических моделей учета усложненных физико-механических и геометрических характеристик, относятся модели комплексного учета анизотропии свойств ползучести и влияния усложненной геометрии контурных очертаний границ неоднородностей применительно к изучению эффектов формирования и взаимодействия полей концентрации напряжений в массивах податливых горных пород с туннельными цилиндрическими полостями-выработками неканонических поперечных сечений. Учет анизотропии вязкоупругого деформирования геоматериалов и модифицированный подход к описанию геометрии контуров сечений определяют неклассический характер данных моделей, для которых в исследованиях крайне затруднено применение существующих операторных методов учета реологических свойств горных пород и методов параметрического описания усложненной геометрии сечений на базе теории конформных отображений. Таким образом, решение фундаментальных и прикладных заданий по исследованию указанных неклассических моделей связано с актуальной научной проблемой разработки новых эффективных аналитико-числовых методов решения задач вязкоупругости для анизотропных деформируемых тел усложненной, в том числе многосвязной геометрии.

Еще один класс актуальных неклассических моделей деформирования тонкостенных конструкционных элементов представляют собой модели вязкоупругого изгиба анизотропных плит, направлением совершенствования которых для получения более адекватных оценок прочности и надежности подобных конструкций в сравнении с доминирующей в прикладных расчетах классической моделью Кирхгофа-Лява, является разновариантный учет деформаций поперечного сдвига. В этой связи, создание алгоритмов редукции соотношений деформирования вязкоупругих анизотропных плит, как тел пространственного строения, применительно к случаю плит малой толщины с неканонической формой срединной поверхности, а также разработка методов решения соответствующих типов краевых задач для конструкций данного вида также относится к ряду первоочередных современных заданий в развитии математических методов механики деформируемого твердого тела.

Таким образом, разработка новых аналитико-числовых методов изучения описываемого неклассическими моделями двумерного вязкоупругого напряженно-деформированного состояния анизотропных элементов конструкций с криволинейными отверстиями и вязко-упругого состояния анизотропных массивов с системами выработок усложненного сечения, а также создание программных приложений для их компьютерной реализации и получение более адекватных качественных и количественных оценок влияния вязкоупругих свойств материалов в конструкциях и геомассивах, является актуальной научной проблемой, имеющей важное фундаментальное и прикладное значение и определяющей цели и задания данного диссертационного исследования.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Представленные в работе исследования связаны с тематикой конкурсных фундаментальных исследовательских проектов «Математическое моделирование прочностных и волноводных свойств деформируемых элементов конструкций и геоструктур с усложненными физико-механическими свойствами» (МОН ДНР, № гос. регистрации 0117D000071, 2017-2019 гг.); «Методы исследования линейных и нелинейных моделей статического и динамического деформирования анизотропных функционально-градиентных упругих тел» (МОН ДНР, № гос. регистрации 0120D000014, 2020-2022 гг.). Основные результаты диссертационной работы включены в отчеты по указанным НИР.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка комплекса специализированных аналитико-числовых методов для решения формулируемых в рамках неклассических моделей задач исследования двумерного вязкоупругого напряженно-деформированного состояния многосвязных анизотропных массивов и тонких анизотропных плит с отверстиями и полостями, а также выявление и систематизация установленных на основе их применения ведущих параметрических закономерностей влияния физико-механических и геометрических параметров моделей на характеристики деформирования классов изучаемых объектов.

Для достижения целей исследования подлежат решению следующие научные задания:

– разработка концепции создания аналитико-числового метода исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния анизотропных деформируемых сред, не требующего построения аналитических представлений ядер ползучести и релаксации в специальной форме;

– построение численного алгоритма получения функций релаксации по известным значениям функций ползучести (и наоборот) без использования аналитических приемов аппроксимации экспериментальных данных;

– разработка алгоритма сглаживания и восполнения таблиц экспериментальных данных, на основе которых строятся уравнения состояния для рассматриваемых моделей с имеющими явную зависимость от времени коэффициентами;

– апробация разработанного метода при решении задач обобщенного плоского напряженного состояния для изотропных и анизотропных бесконечных пластин, ослабленных эллиптическими отверстиями со свободными либо жестко закрепленными контурами;

– разработка метода преобразования интегральных уравнений состояния модели линейно-вязкоупругого деформирования анизотропного массива горных пород к определяющим соотношениям в форме обобщенного закона Гука с параметрическими зависимостями деформационных характеристик материала от времени;

– разработка алгоритма построения замкнутых граничных кривых сложных конфигураций как совокупностей участков в виде эллиптических или круговых дуг контуров пересечений либо объединений вспомогательных выпуклых областей;

– осуществление численных исследований для рассматриваемых моделей с целью установления характерных закономерностей изменения напряженно-деформированного состояния геомассивов вблизи горизонтальных горных выработок с усложненными формами сечений в зависимости от времени их эксплуатации и физико-механических свойств вмещающих пород;

– получение уравнений неклассических моделей деформирования тонких вязкоупругих анизотропных плит на основе алгоритмов редукции соотношений деформирования вязкоупругих анизотропных плит пространственной геометрии применительно к случаю плит малой толщины;

– разработка алгоритма построения аналитических решений для уравнений неклассической уточненной теории изгиба изотропных и трансверсально-изотропных плит, учитывающей деформации поперечного сдвига;

– разработка алгоритмов получения и численно-аналитического решения двумерного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка неклассической уточненной теории изгиба ортотропных плит;

– осуществление численных исследований для неклассических уточненных моделей изгиба изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных вязкоупругих плит;

– обобщение и систематизация полученных новых данных о закономерностях напряженно-деформированного состояния вязкоупругих анизотропных геомассивов и изгибаемых вязкоупругих анизотропных тонких плит с отверстиями и

полостями в зависимости от параметров их усложнённой геометрии, меры анизотропии и временных интервалов приложения нагрузок.

Объектом исследования является напряженно-деформированное состояние конструкционных элементов и геомассивов из анизотропных вязкоупругих материалов.

Предметом исследования является разработка, апробация и систематизация результатов применения аналитико-числовых методов исследования неклассических моделей двухмерного деформирования анизотропных вязкоупругих горных массивов и тонкостенных конструкционных элементов с полостями и отверстиями усложненной геометрии.

Методы исследования. Разрабатываемые и реализуемые в диссертационной работе специализированные методы базируются на теоретических положениях линейной теории упругости анизотропного тела, теории линейного вязкоупругого деформирования, на использовании аппарата теории функций обобщенных комплексных переменных, положениях алгебры дробно-рациональных функций, матричной алгебры, алгебры логики, теории R-функций. При разработке алгоритмов численной реализации предложенных методов используются дискретный метод наименьших квадратов, метод малого параметра, теория разложения функций в ряды Лорана с использованием конформных отображений, а также теория специальных функций. Программные приложения для реализации методов созданы в среде специализированного языка разработки Matlab.

На защиту выносятся следующие научные положения реализованного исследования:

1. Разработанные в диссертации новые методы решения линейных задач вязкоупругого деформирования, в рамках которых не требуется построения аналитических представлений ядер релаксации и ползучести, уравнения состояния для рассматриваемых моделей имеют форму определяющих соотношений обобщенного закона Гука с имеющими явную зависимость от времени коэффициентами, а взаимное определение функции релаксации и ползучести осуществляется на основе численного алгоритма по известным экспериментальным данным о значениях взаимоопределяемых функций без использования их аналитической аппроксимации с применением предлагаемой методики восполнения таблиц экспериментальных реологических параметров и на базе учета гипотезы об упругой сжимаемости материала, позволяют эффективно исследовать открытый ранее для численно-аналитического изучения широкий круг важнейших в фундаментальном аспекте и для приложений в проектном технологическом моделировании неклассических задач расчета прочности и надежности конструкций и сооружений.

2. Предложенный и апробированный в работе метод описания замкнутых граничных кривых для расчетных областей сложных конфигураций в моделях деформирования вязкоупругих тел и элементов конструкций, как совокупностей фрагментов в виде эллиптических или круговых дуг контуров пересечений либо объединений вспомогательных выпуклых областей, создает качественно новые возможности для эффективного учета в теоретических и прикладных численно-аналитических исследованиях влияния особенностей усложненной, в том числе

многосвязной геометрии конструкций и сооружений, на результирующие показатели мгновенной и длительной эксплуатационной прочности моделируемых объектов.

3. Предложенная в диссертации новая версия неклассической уточненной модели изгибного деформирования вязкоупругих изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных плит с отверстиями при учете деформаций поперечного сдвига, основывающаяся на алгоритме редукции соотношений деформирования вязкоупругих плит пространственной геометрии применительно к случаю их малой толщины, а также разработанный метод ее численно-аналитического исследования, включающий процедуру построения и численно-аналитического решения дифференциального уравнения шестого порядка уточненной теории изгиба ортотропных плит, наряду с вкладом в математическую теорию деформирования тонкостенных конструкций с усложнёнными физико-механическим и геометрическими свойствами являются практически значимыми инструментами получения более адекватных характеристик мгновенной и длительной прочности плоских конструкционных элементов из анизотропных композиционных материалов при действии изгибающих усилий.

4. Количественные и качественные закономерности деформационных процессов, установленные и обобщенные по результатам изучения представленных в диссертации неклассических моделей с применением предложенных аналитико-числовых методов, дают основание для заключений о принципиальной роли учета в исследованных прикладных моделях соответствующих комплексов усложненных физико-механических и геометрических свойств, а также об эффективных возможностях разработанных методов для получения описаний мгновенных и параметрически изменяющихся во времени распределений полей механических напряжений в вязкоупругих анизотропных многосвязных объектах, более адекватных инженерной практике и частным результатам анализа не упрощаемых гипотезами пространственных версий рассматриваемых моделей.

Научная новизна полученных результатов.

1. С применением аппарата алгебры резольвентных операторов и матричной алгебры впервые разработан численно-аналитический метод обращения операторов определяющих уравнений деформирования анизотропных вязкоупругих сред без использования аналитических представлений ядер ползучести и релаксации.

2. Впервые построена численно-аналитическая методика исследования задач вязкоупругости для анизотропных сред, которая для произвольных моментов времени сводится к применению алгоритмов той же структуры, которые используются при решении задач теории упругости анизотропного деформируемого тела без учета реологических эффектов.

3. Впервые применительно к исследованию эффектов ползучести и релаксации в задачах деформирования анизотропных массивов горных пород предложен метод преобразования интегральных уравнений состояния к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени.

4. Впервые на основе применения разработанных методов и с учетом различных гипотез об упругой сжимаемости либо несжимаемости рассматриваемых материалов реализованы исследования обобщенного плоского напряженного состояния бесконечных ортотропных вязкоупругих пластин с эллиптическим свободным или жестко закрепленным отверстием.

5. Впервые применительно к исследованию процессов двумерного деформирования тел с локализованными неоднородностями гладких очертаний предложен новый теоретический аналитико-числовой алгоритм построения замкнутых граничных кривых сложных конфигураций как совокупностей участков в виде эллиптических или круговых дуг контуров пересечений либо объединений вспомогательных выпуклых областей.

6. Предложен новый теоретический аналитико-числовой алгоритм редукции системы пространственных соотношений теории упругости, описывающих изгибное деформирование изотропных и трансверсально-изотропных пластин, применительно к пластинам малой толщины с получением комплекса разрешающих соотношений новой уточненной теории изгиба ослабленных отверстиями пластин указанного типа в виде системы двумерных дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка, а также описан соответствующий способ удовлетворения краевым условиям на границах отверстий.

7. Впервые предложен теоретический алгоритм аналитико-числовой редукции системы пространственных соотношений теории упругости, описывающих изгибное деформирование ортотропных пластин, с переходом к новой уточненной теории изгиба тонких ортотропных пластин с отверстиями, содержащей разрешающее соотношение в виде двумерного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка, а также разработан соответствующий аналитико-числовой метод его решения и удовлетворения соответствующим краевым условиям на границах отверстий.

8. Впервые осуществлены разработка и применение аналитико-числового метода определения в уточненной постановке вязкоупругого напряженного состояния изгибаемых изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных пластин с эллиптическим отверстием.

9. С применением комплекса предложенных методов впервые выявлен и описан ряд специфических эффектов изменения напряженно-деформированного состояния геомассивов вблизи горных выработок с усложненными формами поперечных сечений в зависимости от времени их эксплуатации и физико-механических свойств вмещающих пород.

10. Впервые обобщены и систематизированы новые данные о закономерностях напряженно-деформированного состояния изгибаемых вязкоупругих пластин с отверстиями в зависимости от их геометрических характеристик, вида и степени анизотропии, а также периода приложения нагрузок.

Достоверность и обоснованность результатов диссертационной работы подтверждается строгостью постановок рассматриваемых задач в рамках математически обоснованных апробированных моделей теории линейной вязко упругости и механики анизотропного деформируемого твердого тела; использованием

при теоретическом исследовании рассматриваемых неклассических моделей верифицированных математических методов, включая аппарат теории функций обобщенных комплексных переменных, алгебру дробно-рациональных функций, матричную алгебры, алгебру логики, теорию R-функций; использованием в процессе численных исследований апробированных вычислительных алгоритмов дискретного метода наименьших квадратов, метода малого параметра, теории разложений функций в ряды Лорана с использованием конформных отображений, теории специальных функций; проверкой и согласованностью найденных разработанными методами результатов и данными сопоставления отдельных частных результатов диссертационной работы с опубликованными результатами исследований других авторов, полученными альтернативными методами.

Теоретическая значимость результатов работы заключается в разработке новых эффективных численно-аналитических методов исследования параметрических временных характеристик вязкоупругого напряженного состояния анизотропных сред с туннельными полостями и отверстиями усложненных очертаний, базирующихся на концепции обращения определяющих уравнений анизотропной наследственной среды, а также в получении нового варианта соотношений уточненной теории изгиба тонких трансверсально-изотропных и ортотропных упругих и вязкоупругих пластин, и разработке методов решения краевых задач теории изгиба в рамках рассматриваемой неклассической модели.

Практическая значимость работы заключается в непосредственной применимости разработанных методов и алгоритмов их компьютерной численной реализации в проектном прогнозном моделировании процессов длительного деформирования анизотропных элементов конструкций и сооружений из армированных композиционных материалов, деформирования массивов из податливых горных пород с туннельными выработками усложненной формы сечения; при получении проектных оценок мгновенной и длительной прочности подверженных воздействиям изгибающих усилий плит и пластин из вязкоупругих полимерных, композиционных и армированных материалов с технологическими отверстиями, вырезами и вставками, применяемыми в конструкциях строительных сооружений машин и приборов.

Материалы представленных в диссертационной работе исследований использованы в учебном процессе ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по дисциплине магистерского цикла «Математические модели геомеханики» для студентов направления подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» (справка о внедрении № 870/01-27/6.1.0 от 29.08.2022 г., подписана проректором ГОУ ВПО ДонНУ, д.пед.н., проф. Е.И. Скафой).

Апробация результатов работы. Основные положения полученных результатов диссертации доложены и обсуждены на научных конференциях различного уровня, в том числе на: XIV Международной научной школе им. академика С.А. Христиановича «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках» (Крым, Алушта, 20 – 26 сентября 2004 г.); IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения И.И. Воровича (г. Ростов-на Дону, 11 – 15 октября 2005 г.); XVI

Международной научной школы им. академика С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках” (Крым, Алушта, 18 – 24 сентября 2006 г.); VI Международной научной конференции “Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела” (Мелекино, 8 – 11 июня 2010 г.); XV Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (г. Ростов-на-Дону, 4 – 7 декабря 2011 г.); VII Международной научной конференции “Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела” (Мелекино, 11 – 14 июня 2013 г.); VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Ростов-на-Дону, 14 – 18 октября 2013 г.); I Международной научной конференции «Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности» (Донецк, 16 – 18 мая 2016 г.); XVIII Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (г. Ростов-на-Дону, 7 – 10 ноября 2016 г.); III Международной научной конференции “Донецкие чтения 2018. Образование, наука и вызовы современности” (Донецк, 25 октября 2018 г.); IV Международной научной конференции “Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности” (Донецк, 31 октября 2019 г.); XX Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”, посвященной 100-летию академика И.И. Воровича (г. Ростов-на-Дону, 18 – 21 июня 2020 г.); V Международной научной конференции “Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности” (Донецк, 17 – 18 ноября 2020 г.); VI Международной научной конференции “Донецкие чтения 2021: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности” (Донецк, 26 – 27 октября 2021 г.).

Материалы диссертационной работы представлены и обсуждены на профильных научных семинарах в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», ГУ «Институт прикладной математики и механики», ГУ «Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела».

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 44 научных работах. Среди публикаций 25 статей в реферируемых периодических изданиях, включенных в перечень ВАК ДНР, в числе которых 7 статей в изданиях, включенных в Международные наукометрические базы Scopus, MathSciNet, Zentralblatt, а также 19 публикаций в других изданиях, включая материалы и тезисы Международных научных конференций.

Личный вклад автора. Основные новые теоретические и численные результаты исследований, включая разработку программных приложений, получены автором самостоятельно. В публикациях [1–5, 9, 11, 17, 24, 31–33, 41] соавторам А.С. Космодамианскому, В.П. Шевченко, Н.М. Нескородеву и В.И. Сторожеву принадлежат участие в постановках задач и в обсуждении полученных результатов. В работе [21] соавтору А.А. Жабоедову принадлежит участие в разработке программного приложения для осуществления численных экспериментов на базе предложенных методов, а также участие в обработке и систематизации результатов численного анализа.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, семи разделов, заключения с основными выводами и результатами, списка литературы из 311 источников и приложения. Работа содержит 45 рисунков и 26 таблиц, изложена на 271 странице, из которых 238 страниц занимает основное содержание.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы и представлены данные о ее связи с научными программами и темами; сформулированы цель и задачи исследования, а также выносимые на защиту положения работы; охарактеризованы научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, а также методы исследования; представлена аргументация достоверности и обоснованности основных положений и выводов работы, а также приведены данные о публикациях и апробациях по результатам отраженных в диссертации исследований.

Первый раздел работы посвящен аналитическому обзору методов и результатов исследований в рассматриваемой предметной области и актуальным заданиям их дальнейшей разработки применительно к неклассическим моделям двухмерного деформирования анизотропных вязкоупругих горных массивов и тонкостенных конструкционных элементов с полостями и отверстиями усложненной геометрии.

Охарактеризован вклад в развитие теоретических основ и конкретных методов исследования задач ползучести и вязкоупругости деформируемых сред и элементов конструкций, внесенный отечественными и зарубежными учеными Н.Х. Арутюняном, Ж.С. Ержановым, Г.М. Ивановым, А.А. Ильюшиным, С.А. Калоеровым, А.А. Каминским, М.А. Колтуновым, В.Г. Громовым, В.И. Малым, Б.Е. Победрей, Ю.Н. Работновым, А.Р. Ржаницыным, М.И. Розовским, Г.Н. Савиным, Д. Блендом, L. Boltzmann, R.M. Christensen, V. Volterra, J. Ferry, R.A. Schapery и другими. При этом особо отмечены работы Ш.М. Айталиева, И.В. Баклашова, Н.С. Булычева, Р.Э. Дашко, А.Н. Динника, Ж.С. Ержанова, А.Н. Зорина, С.А. Калоерова, А.С. Космодамианского, С.Г. Лехницкого, Ж.К. Масанова, М.И. Розовского, Г.Н. Савина, В.И. Сторожева, S. Crouch, A. Starfield, посвященные исследованию упругого и вязкоупругого напряженного состояния массивов горных пород вблизи горизонтальных тунельных выработок. Отдельно представлен анализ работ, посвященных классическим и уточненным моделям и теоретическим методам исследования процессов деформирования тонкостенных конструкций, авторами которых являются С.А. Амбарцумян, В.В. Болотин, В.В. Васильев, В.З. Власов, И.И. Ворович, А.Л. Гольденвейзер, Э.И. Григолюк, А.Н. Гузь,, С.А. Калоеров, А.С. Космодамианский, С.Г. Лехницкий, А.И. Лурье, Б.Л. Пелех, Г.Н. Савин, С.П. Тимошенко, И.Ю. Хома, В.А. Шалдырван, M.J. Boussinesque, F.D. Gehring, H. Hencky, M.T. Huber, A. Fopple, G.R. Kirchhoff, W.T. Koiter, P.M. Naghdi, E. Reissner и ряд других ученых.

На основании анализа и систематизации результатов вышеуказанных исследований отмечено существование нескольких классов важных и актуальных в теоретическом и прикладном аспектах научных проблем и конкретных классов задач из рассматриваемой тематической области, требующих расширенного и углубленного изучения на новом качественном уровне в рамках уточнённых неклассических моделей. В частности, акцентирована необходимость разработки новых эффективных теоретических методов параметрического исследования напряженно-деформированного состояния многосвязных анизотропных сред с учетом реологических эффектов, в том числе анализа влияния фактора ползучести в анизотропных горных массивах с туннельными выработками усложненных сечений. Представлены обосновываемые мотивы построения новых модификаций уточненных теорий изгиба анизотропных упругих и вязкоупругих пластин и исследования в рамках этих теорий с новых циклов задач об изгибном деформировании анизотропных плит с отверстиями.

Во втором разделе работы представлена разработка нового аналитико-числового метода параметрического исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния анизотропных сред. Дано концептуальное описание предлагаемого подхода применительно к модели деформирования анизотропного вязкоупругого тела в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ с уравнениями состояния

$$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{P}(0)\,\boldsymbol{s}(t)+\int_0^t \frac{d\,\boldsymbol{P}(t-\tau)}{d(t-\tau)}\,\boldsymbol{s}(\tau)\,d\tau\,, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{s}(t)=\boldsymbol{R}(0)\,\boldsymbol{e}(t)+\int_0^t \frac{d\,\boldsymbol{R}(t-\tau)}{d(t-\tau)}\,\boldsymbol{e}(\tau)\,d\tau\,, \tag{2}$$

в которых $\boldsymbol{e}(t)=\left[e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\right]^T$, $\boldsymbol{s}(t)=\left[s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6\right]^T$ – векторы деформаций и напряжений в произвольный момент времени t; $\boldsymbol{P}(t)=P_{mn}(t)$, $\boldsymbol{R}(t)=R_{mn}(t)$ $\left(m,n=\overline{1,6}\right)$ – соответственно регулярные части функциональных матриц ползучести и релаксации, а в предельном случае идеально упругого материала $\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{a}=a_{mn}$ и $\boldsymbol{R}(0)=\boldsymbol{A}=A_{mn}$ – соответственно матрицы коэффициентов деформации и матрицы модулей упругости. Матрицы функций ползучести $\boldsymbol{P}$ и релаксации $\boldsymbol{R}$ соответственно можно представить произведениями $\boldsymbol{P}(t)=\left\{P_{mn}(t)\right\}=\left\{a_{mn}p_{mn}(t)\right\}$, $\boldsymbol{R}(t)=\left\{R_{mn}(t)\right\}=\left\{A_{mn}r_{mn}(t)\right\}$, и уравнения (1), (2) записать в виде

$$e_i=\bar{a}_{ij}\,s_j\,,\,s_i=\bar{A}_{ij}\,e_j \qquad \left(i,j=\overline{1,6}\right), \tag{3}$$

где

$$\bar{a}_{ij}=a_{ij}\left(1+p_{ij}^{*}\right) \quad \bar{A}_{ij}=A_{ij}\left(1-r_{ij}^{*}\right). \tag{4}$$

Каждый из временных операторов (4) включает составные элементы в виде матриц постоянных a_{ij} или A_{ij} , а также интегральных операторов $a_{ij}\,p_{ij}^{*}$ или $A_{ij}\,r_{ij}^{*}$

$$p_{ij}^{*}\, s_j(t) = \int_0^t \frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}\, s_j(\tau)\, d\tau, \quad r_{ij}^{*}\, e_j(t) = -\int_0^t \frac{dr_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}\, e_j(\tau)\, d\tau \qquad (5)$$

с ядрами наследственности $\dfrac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$ или $\dfrac{dr_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$.

Обращение функциональных систем (1), (2) или (3) представляет собой трудноразрешимую в аналитическом плане задачу. Экспериментально определяемые значения для ядер $\boldsymbol{P}$ или $\boldsymbol{R}$ задаются дискретными наборами величин, соответствующими некоторым фиксированным значениям времени. По этим экспериментальным значениям различными методами строятся аналитические аппроксимации ядер в специальной форме. Одной из таких используемых на практике форм являются представления дробно-рациональными функциями, построенными Ю.Н. Работновым

$$Э(-\beta; t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n (t-\tau)^{\alpha+n(1+\alpha)}}{\Gamma\left[(n+1)(1+\alpha)\right]}. \qquad (6)$$

Операторы с ядрами вида (6) обладают специальной алгеброй, их резольвенты представлены функциями того же класса, то есть при $\dfrac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)} = \lambda_{ij}^{p} Э_{\alpha_{ij}^{p}}\left(-\beta_{ij}^{p}; t-\tau\right)$ интегральный оператор $\bar{a}_{ij}$ (4) принимает вид

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij}\left[1 + \lambda_{ij}^{p}\, Э_{\alpha_{ij}^{p}}^{*}\left(-\beta_{ij}^{p}\right)\right]. \qquad (7)$$

Необходимо отметить, что аппроксимация кривой ползучести по экспериментальным данным является источником дополнительных погрешностей модели линейно-вязкоупругого деформирования. Так, ядро вида $\lambda Э_{\alpha}(-\beta; t-\tau)$ содержит всего три произвольные константы λ, α и β, что не всегда позволяет построить функцию, в достаточной мере корректно описывающую деформирование на достаточно большом временном интервале по экспериментально найденным величинам. Так проведенный в ряде работ анализ результатов аппроксимации показывает, что погрешность в отдельных случаях достигала тридцати процентов. Поэтому, для адекватного описания вязкоупругих свойств реальных тел необходимо использование операторов с ядрами более сложной формы. Для таких операторов построение резольвенты в аналитической форме наталкивается на непреодолимые трудности.

В работах В.Г. Громова показано, что построение алгебры операторов Вольтерра может быть осуществлено для любых резольвентных операторов, что дает возможность получения решений граничных задач теории вязкоупругости с параметрическими зависимостями от времени алгебраическими методами. Решения могут быть найдены с использованием произвольных исходных операторов и выражено через значения произведения на единичную функцию этих операторов, заданных непосредственно таблицей экспериментальных данных.

В диссертационной работе предложен новый подход к решению задач линейно-вязкоупругого деформирования. Предлагаемый подход не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме и основан на численном определении резольвент интегральных уравнений состояния среды на основе экспериментального определения функций $\boldsymbol{P}(t)$ и $\boldsymbol{R}(t)$. Применительно к реализуемым в опытах по идентификации характеристик ползучести процессам мгновенного приложения и поддержания постоянного уровня напряжений $\boldsymbol{s}(t)=\boldsymbol{\sigma}$ интегрирование уравнения (1) приводит к соотношению

$$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\sigma}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\sigma}=s_k(0)=[\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6]^T$ – вектор-столбец постоянных напряжений. На основе формулы (8) для совокупности значений параметра времени по соответствующим экспериментальным данным замеров деформаций определяются соответствующие значения функции $\boldsymbol{P}(t)$. После интегрирования уравнения (2) по частям и подстановки в него выражения (8) можно найти соотношение, связывающее между собой функции ползучести $\boldsymbol{P}(t)$ и релаксации $\boldsymbol{R}(t)$

$$\boldsymbol{I}=\int_0^t \boldsymbol{R}(t-\tau)\frac{d\boldsymbol{P}(\tau)}{d\tau}d\tau\ , \tag{9}$$

где $\boldsymbol{I}$ – единичная матрица. Таким образом, из уравнения (9) находятся значения функции релаксации $\boldsymbol{R}(t)$, соответствующие значениям функции $\boldsymbol{P}(t)$, установленным из экспериментов на ползучесть.

Альтернативно, в опытах по определению характеристик релаксации мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянными деформации. Для данных процессов после интегрирования уравнения (2) может быть записано соотношение

$$\boldsymbol{s}(t)=\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{10}$$

в котором $\boldsymbol{\varepsilon}=e_k(0)=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6]^T$ – вектор-столбец деформаций констант, и соответственно определены значения функции $\boldsymbol{R}(t)$ по величинам измеряемых во времени напряжений. После интегрирования уравнения (1) по частям и подстановки в него выражения (10) также записывается связывающее между собой функции релаксации $\boldsymbol{R}(t)$ и ползучести $\boldsymbol{P}(t)$ соотношение

$$\boldsymbol{I}=\int_0^t \boldsymbol{P}(t-\tau)\frac{d\boldsymbol{R}(\tau)}{d\tau}d\tau\ . \tag{11}$$

Решения уравнений (9), (11) могут быть получены численно без использования аналитической аппроксимации для множеств экспериментальных значений функции $\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{R}(t)$. Так, при разбиении временного отрезка $[0,t]$ на N интервалов равной длительности h, введении дискретной совокупности моментов време-

ни $t_0 = 0$, $t_1 = h$, …, $t_i = i\,h$, …, $t_N = t$ и обозначений $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{P}_1$, …, $\boldsymbol{P}_N$ для экспериментально найденных значений функции ползучести $\boldsymbol{P}(t)$ в соответствующие моменты времени, соотношение (9) в точках временной сетки можно приближенно записать в виде

$$\boldsymbol{I} = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{R}_{n\text{-}i}\left(\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{P}_{i\text{-}1}\right), \quad \left(n = 0,1,...,N\right), \tag{12}$$

где $\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}(t_i)$, $\boldsymbol{R}_{n-i} = \boldsymbol{R}(t_n - t_i)$. При этом, принимая во внимание, что значение $\boldsymbol{P}_{i-1} = \boldsymbol{P}(t_{i-1})$ для отрицательных значений индекса равно нулю, из (12), может быть получено рекуррентное соотношение

$$\boldsymbol{R}_n = \left(\boldsymbol{I} - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_{n\text{-}i}\left(\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{P}_{i\text{-}1}\right)\right)\boldsymbol{A}, \quad \left(n = 0,1,...,N\right), \tag{13}$$

с помощью которого по экспериментально найденным значениям функции ползучести в точках временной сетки определяются значения функции релаксации.

Аналогичным образом осуществляется решение уравнения (11) с получением соотношения

$$\boldsymbol{P}_n = \left(\boldsymbol{I} - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_{n\text{-}i}\left(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_{i\text{-}1}\right)\right)\boldsymbol{a}, \quad \left(n = 0,1,...,N\right). \tag{14}$$

позволяющего по установленным значениям функции релаксации в точках временной сетки находить значения функции ползучести. Таким образом, соотношения (13) и (14) полностью решают задачу обращения уравнений (1), (2) с использованием таблиц экспериментальных данных.

В работе также предложен алгоритма получения на временных отрезках $[0,t]$ гладких аппроксимирующих представлений $w(t)$ для функций ползучести и функций релаксации, оптимизированных по величинам совокупных отклонений от соответствующих множеств их экспериментально устанавливаемых значений, которые далее, при несовершенстве совокупностей экспериментальных табличных данных, позволяли бы восстанавливать необходимые для реализации вышеописанных методов обращения на базе соотношений (13), (14) значения соответствующих функций на равномерной сетке разбиения $[0,t]$ на N интервалов длительности h. Так, в частности, при наличии данных измерений, представляемых точками (t_k, ε_k), $\varepsilon_k = \boldsymbol{P}(t_k)$, в случае неравномерной длительности временных интервалов замера $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$, с учетом априорного свойства монотонного возрастания значений последовательности $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n = \varepsilon(t)$, а также особенностей поведения функции ползучести при нагрузках, меньших предела прочности материала, когда развитие деформаций практически полностью прекращается при достижении определенного времени, в качестве аппроксимирующей функции $w(t)$ предложено выбирать представление в виде ряда

$$w(t) = \left(1 + \sum_{k=1}^{m} a_k \, t^{\alpha k}\right) e^{-\beta t^{\alpha}}, \qquad (15)$$

который содержит затухающую экспоненциальную функцию и подлежащие определению методом наименьших квадратов величины α, β, a_k.

В качестве примера применения разработанного алгоритма реализована обработка представленных в литературе данных экспериментов для композитного материала стеклотекстолит ТС8/3-250. Величины деформаций, отнесенные к величине ε_0, приведены в таблице 1.

Таблица 1

t, час	0	12	24	48	120	240	360	504
$\varepsilon_k / \varepsilon_0$	1,000	1,200	1,271	1,336	1,432	1,542	1,632	1,684
t, час	624	744	864	1008	1128	1248	1320	1400
$\varepsilon_k / \varepsilon_0$	1,736	1,755	1,774	1,826	1,832	1,838	1,839	1,839

Для $m = 4$ функция наилучшего приближения (15) получена при параметрах $\alpha = 0,476$; $\beta = 0,068$; $a = [0,1503; 0,0005; 0,0003; 0]$.

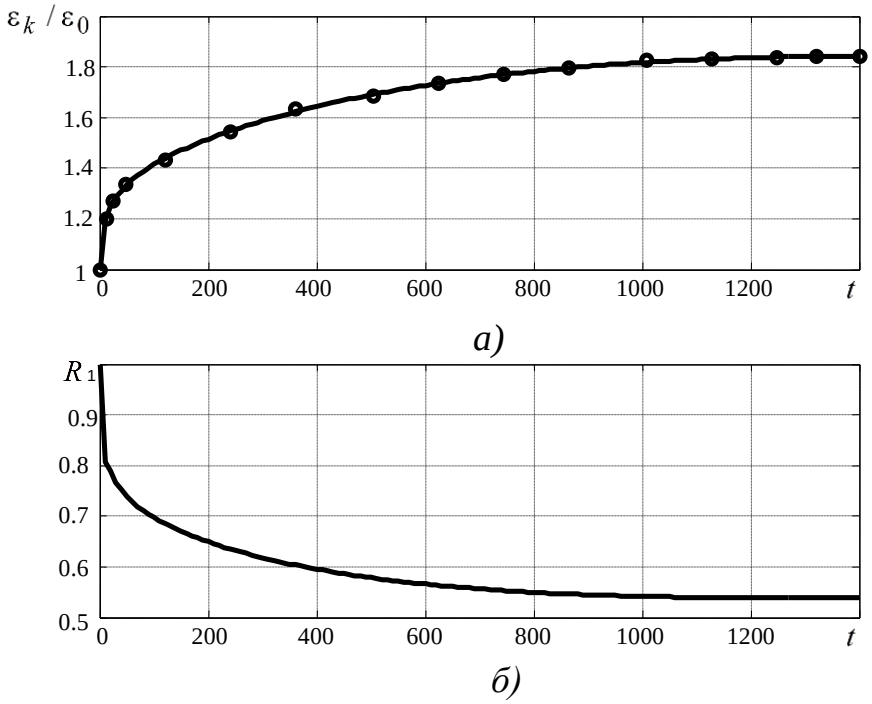


Рис. 1

График кривой ползучести, построенной в виде аппроксимирующей функции (15) для этого случая приведен на рисунке 1, *а*); точками на графике отмечены данные, представленные в таблице 1. На рисунке 1, *б*) приведена получаемая в результате применения алгоритма (13) кривая релаксации, соответствующая данному варианту функции ползучести. Точность расчетов в рамках описанного алгоритма контролировалась также путем перерасчетов по формулам (14), и вычисля-

емые значения сравнивались с исходными табличными значениями P_k. В результате максимальная абсолютная по значению погрешность не превышала 10^{-15}.

Матричные уравнения (8) и (10) могут быть записаны в форме

$$e_i = P_{ij}(t)\, s_j,\ s_i = R_{ij}(t)\, e_j,\ \ P_{ij} = a_{ij} p_{ij}(t),\ R_{ij} = A_{ij} r_{ij}(t)\ \ \left(i, j = \overline{1,6}\right). \qquad (16)$$

Для случая, когда из экспериментов на ползучесть определеляется матрица функций ползучести $P_{ij}(t)$, на основе сопоставления соответствующих представлений $e_i = \bar{a}_{ij}\, s_j = a_{ij}\left(1 + p_{ij}^*\right) s_j$ из (3) и (16), с использованием предлагаемой методики можно получить значения $p_{ij}^* \cdot 1 = p_{ij} - 1$. Таким образом, из экспериментальных данных для кривых ползучести, с учетом их восполнения, получены значения результатов произведения интегральных операторов на единицу для записи уравнений состояния. Временная матрица в этом случае имеет вид $\boldsymbol{P}_n = \bar{a}_{ij} \cdot 1 = a_{ij}\left[\ 1 + p_{ij}^* \cdot 1\ \right]$. В случае же использования оператора Ю.Н. Работнова

$$p_{ij}(t) = 1 + p_{ij}^* \cdot 1 = 1 + \lambda_{ij}^p \text{Э}_{\alpha_{ij}^p}^*\left(-\beta_{ij}^p\right) \cdot 1.$$

Эти соотношения позволяют по известным значениям реологических констант операторов $\lambda_{ij}^p \text{Э}_{\alpha_{ij}^p}^*\left(-\beta_{ij}^p\right)$ находить временные матрицы уравнений состояния в момент времени $t = t_n$ по формулам

$$\boldsymbol{P}_n = \bar{a}_{ij} \cdot 1 = a_{ij}\left[\ 1 + \lambda_{ij}^p \text{Э}_{\alpha_{ij}^p}^*\left(-\beta_{ij}^p\right) \cdot 1\right]. \qquad (17)$$

Матрицы $\bar{A}_{ij} \cdot 1 = \boldsymbol{R}_n$ при этом находятся с использованием соотношений (13).

В случае экспериментального определения матрицы функций релаксации $R_{ij}(t)$, по вышеописанной схеме на основе сопоставления представления $s_i = \bar{A}_{ij}\, e_j = A_{ij}\left(1 - r_{ij}^*\right) e_j$ из (3) и соответствующего соотношения представления (16) может быть получено выражение $r_{ij}^* \cdot 1 = 1 - r_{ij}$. При этом временные матрицы уравнений состояния в момент времени $t = t_n$ определяются соотношениями $\boldsymbol{R}_n = \bar{A}_{ij} \cdot 1 = A_{ij}\left[\ 1 - r_{ij}^* \cdot 1\ \right]$, а матрицы $\bar{a}_{ij} = \boldsymbol{P}_n$ находятся по формуле (14).

После нахождения вышеуказанных временных матриц процедура определения вязкоупругого напряженно-деформированного состояния в любой момент времени ничем не отличается от методологии решения соответствующих задач теории упругости.

Возможности расшифровки произвольных операторов в разделе 2 работы рассмотрены на примере для изотропных вязкоупругих материалов. На основе предположения о наличии экспериментальных опытных данных об изменениях во времени коэффициента Пуассона, не прибегая к введению функции Работнова, кривые ползучести можно записать в виде

$$\bar{\nu} = \nu\left(1 + p_\nu^* \cdot 1\right) = \nu\ p_\nu(t), \tag{18}$$

где $p_\nu(t)$ – функция ползучести, найденная в результате эксперимента. Отсюда находятся значения действия оператора p_ν^* на единицу

$$p_\nu^* \cdot 1 = p_\nu(t) - 1. \tag{19}$$

С использованием предположения о постоянстве оператора объемного сжатия, согласно которому $(1-2\bar{\nu})/\bar{E} = (1-2\nu)/E$, можно получить

$$\bar{E} \cdot 1 = E\left(1 - \lambda_E p_\nu^* \cdot 1\right) = E\ r_E(t), \quad \lambda_E = 2\nu/(1-2\nu). \tag{20}$$

Здесь функция релаксации $r_E(t)$ для модуля Юнга определена через функцию ползучести $p_\nu(t)$ для коэффициента Пуассона посредством формулы (19).

С учетом свойства резольвентных операторов $\left[1 - \lambda\ P^*(\beta)\right]^{-1} = 1 + \lambda\ R^*(\beta + \lambda)$ определяется оператор, обратный оператору (20):

$$\frac{1}{\bar{E}} \cdot 1 = \frac{1}{E}\left[1 + \lambda_E p_\nu^*(\lambda_E) \cdot 1\right] = \frac{1}{E}\ p_E(t). \tag{21}$$

Результат произведения оператора $p_\nu^*(\lambda_E)$ на единицу представляет собой функцию ползучести $p_E(t)$, значения которой выражаются через значения соответствующей функции релаксации $r_E(t)$ из соотношения (14)

$$p_E(t_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_E(t_{n-k})\left[r_E(t_k) - r_E(t_{k-1})\right] \quad (n = 0,1,...,N).$$

Значения $p_\nu^*(\lambda_E) \cdot 1$ находится из соотношения (21):

$$p_\nu^*(\lambda_E) \cdot 1 = \left[p_E(t) - 1\right]/\lambda_E.$$

Используя алгебру резольвентных операторов можно получить

$$\frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} = \frac{\nu}{E}\left[1 + \frac{1}{1-2\nu}\ p_\nu^*(\lambda_E)\right].$$

Наконец, учитывая свойство $1/\bar{G} = 2(1+\bar{\nu})/\bar{E}$ можно найти

$$\frac{1}{\bar{G}} \cdot 1 = \frac{1}{G}\left[1 + \lambda_G p_\nu^*(\lambda_E) \cdot 1\right] = \frac{1}{G}\ p_G(t), \quad \lambda_G = \lambda_E + \nu/(1+\nu),$$

$$\bar{G} \cdot 1 = G\left[1 - \lambda_G p_\nu^*(\beta_G) \cdot 1\right] = G\ r_G(t), \quad \beta_G = \lambda_E - \lambda_G, \tag{22}$$

где

$$r_G(t_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} r_G(t_{n-k})\left[p_G(t_k) - p_G(t_{k-1})\right] \quad (n = 0,1, ..., N),$$

$$p_\nu^*(\beta_G) \cdot 1 = \left[1 - r_G(t)\ \right]/\lambda_G.$$

Таким образом, записанные выше соотношения (18) – (22) связывают интегральные операторы $p_{\nu}^{*}(...)$ и $r_{\nu}^{*}(...)$ с функциями ползучести и релаксации $p_{...}(t)$ и $r_{...}(t)$, заданными таблично.

В итоге, на базе результатов представленных в разделе 2 работы исследований показано, что решение граничных задач вязкоупругости сводится к решению последовательности задач теории упругости в произвольные моменты времени, и при этом уравнения обобщенного закона Гука заменяются уравнениями состояния (1), (2), которые в результате интегрирования соответственно принимают вид (8) и (10).

В третьем разделе работы представлены результаты реализации предложенного метода применительно к граничным задачам обобщенного плоского напряженного состояния ослабленных эллиптическим отверстием неограниченных тонких изотропных и ортотропных пластин из линейно-вязкоупругих материалов.

Решение подобной задачи для идеально упругой тонкой ортотропной пластинки в случае приложения на бесконечности усилий

$$\sigma_1^0 = p, \quad \sigma_2^0 = q, \quad \sigma_6^0 = l,$$

имеет замкнутую аналитическую форму и выражается через функции обобщенных комплексных переменных $\Phi_j(z_j)$, определяемых из граничных условий на контуре отверстия. Представления для перемещений и напряжений вблизи эллиптического отверстия в случае изотропного материала представляют собой рациональные функции относительно упругих постоянных и поэтому, решение задачи вязко-упругости может быть легко найдено при помощи метода Вольтерра. Его сравнение с результатами, полученными с применением предложенного в работе метода, показало полное совпадение как для свободного, так и для жестко подкрепленного отверстия.

При решении же сформулированной задачи для пластинки из вязкоупругого ортотропного материала, применение метода Вольтерра связано со сложностями в расшифровке иррациональных функций от операторов, входящих в решения. В этом случае при исследованиях применяются различные численные схемы.

Применение в данном случае разработанного в диссертации метода реализовано для пластинки из полимерного композитного материала с эпоксидным связующим (КМ), характеризующегося упругими и реологическими постоянными

$$\begin{gathered} E_1 = 23.0\times10^3\ МПа,\ \ \lambda_1 = 0.0323\,c^{-(1+\alpha)},\ \ \beta_1 = 0.1570\,c^{-(1+\alpha)}, \\ E_2 = 16.0\times10^3\ МПа,\ \ \lambda_2 = 0.1295\,c^{-(1+\alpha)},\ \ \beta_2 = 0.2745\,c^{-(1+\alpha)}, \\ G_{12} = 3.08\times10^3\ МПа,\ \ \lambda_6 = 0.0717\,c^{-(1+\alpha)},\ \ \beta_6 = 0.0276\,c^{-(1+\alpha)}, \\ \nu_{12} = 0.11,\ \ \nu_{21} = 0.0765,\ \ \lambda_{12} = \beta_{12} = \lambda_{21} = \beta_{21} = 0,\ \ \alpha = -0.846. \end{gathered} \tag{23}$$

Для формирования модельных экспериментальных данных в случае ортотропного материала использовались формулы (17) и (13).

Принятыми вариантами исследования проявлений свойств вязко-упругости являются учет изменений во времени только для сдвиговых усилий $\bar{G}_{12}$, т.е. $\bar{E}_1 = E_1$, $\bar{E}_2 = E_2$, $\bar{\nu}_{ij} = \nu_{ij}$ $(i, j = 1,2)$; учет постоянства во времени соотношений $\bar{\nu}_{ij} / \bar{E}_i = \nu_{ij} / E_i$ $(i, j = 1,2; j \neq i)$; использование условия упругой сжимаемости, когда, считается, что объемный модуль упругости является постоянной величиной и $1/\bar{K} = 1/K$. Для обобщенного плоского напряженного состояния тонкой пластинки сжимаемости условие имеет вид

$$\frac{1-2\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} + \frac{1-2\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_2} = \frac{1-2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1-2\nu_{21}}{E_2},$$

откуда следуют соотношения

$$\frac{\bar{\nu}_{ij}}{\bar{E}_i} = \frac{\nu_{ij}}{E_i}\left(1 + \frac{\lambda_i}{4\nu_{ij}} Э_\alpha^*(-\beta_i) + \frac{E_i \lambda_j}{4\nu_{ij} E_j} Э_\alpha^*(-\beta_j)\right),$$

Результаты, применения разработанного метода к задаче о вязкоупругом деформировании ортотропной пластинки со свободным эллиптическим отверстием сравнивались с результатами, полученными другими авторами на основе метода цепных дробей. Растягивающие усилия на бесконечности задавались в виде $\sigma_1^0 = p\cos^2\varphi$, $\sigma_6^0 = p\sin\varphi\cos\varphi$, $\sigma_2^0 = p\sin^2\varphi$, где φ – угол между направлением действия усилий интенсивности p и положительным направлением оси Ox_1 (рис. 2), а задаваемое соотношение полуосей эллипса $a/b = 2$.

На рисунке 3 представлены графики изменения во времени напряжений σ_θ / p в точке эллиптического контура, соответствующего $\theta = \pi/2$ при $\varphi = 0^0$. Штриховая линия соответствует варианту учета изменений во времени для сдвиговых усилий; сплошная линия соответствует случаю постоянства отношений коэффициента Пуассона и модуля Юнга и на ней точками отмечены значения напряжений, полученных методом цепных дробей; штрихпунктирная линия соответствует случаю учета гипотезы упругой сжимаемости.

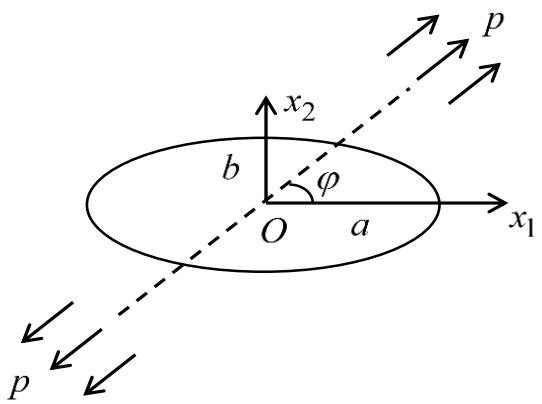


Рис. 2

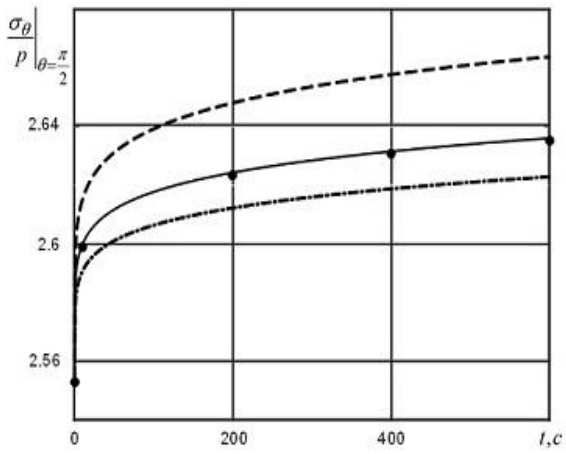


Рис. 3

На рисунке 4 представлены аналогичные результаты исследований в точке $\theta = 0$ для случая растяжения пластинки на бесконечности при $\varphi = \pi / 4$.

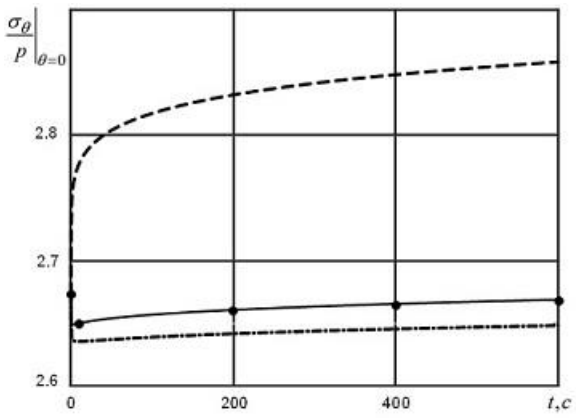


Рис. 4

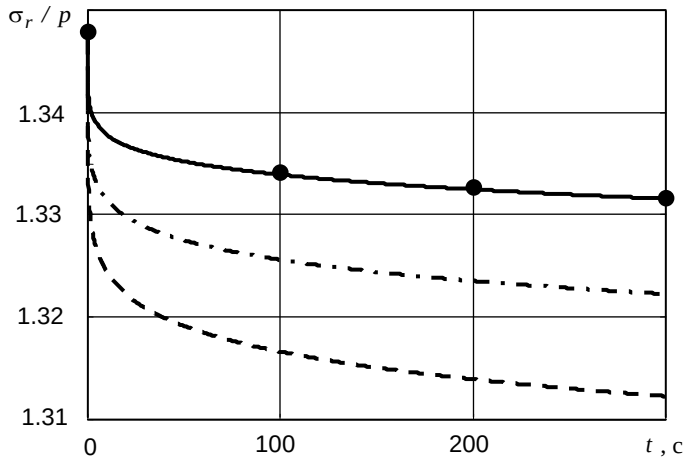


Рис. 5

В качестве результатов применения разработанного метода к задаче о растяжении вязкоупругой ортотропной пластинка с жестко подкрепленным круговым отверстием, на рисунке 5 отражены изменения максимальных напряжений σ_r / p, возникающих в точке кругового отверстия, соответствующей $\theta = 0^0$ при растяжении пластинки усилиями p в направлении оси Ox_1 $\left(\varphi = 0^0\right)$. Соответствие типов линий на графике и рассматриваемых вариантов учета свойств вязко-упругости, а также обозначения в виде точек отвечают принятым на рисунках 3 и 4.

Как следует из анализа рисунков 3 – 5, результаты применения разработанного в диссертации метода хорошо согласуются с известными для отдельных частных вариантов рассматриваемых задач. Можно также заключить, что для различных вариантов учета свойств вязкоупругости существенно различаются параметрические временные оценки концентрации напряжений в разных точках свободного и жестко подкрепленного по контуру отверстий.

В четвертом разделе работы предложенные методы применяются для решения новых задач об исследовании эффектов ползучести в массивах анизотропных горных пород с горизонтальными туннельными выработками. Рассматривается апробированная модель массива горных пород, как вязкоупругой трансверсально-изотропной среды, являющаяся интерпретацией слоистого геомассива осадочного происхождения с параллельными слоям плоскостями изотропии, в предположении, что толщины слоев на порядок меньше характерного размера сечения горной выработки. В массиве вводится прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ (рис. 6), в которой координатная плоскость Oxz перпендикулярна плоскостям изотропии. При нормальной ориентации оси Oz к плоскости изотропии, уравнения обобщенного закона Гука для материала массива записываются в виде

$$\varepsilon_i^1 = \sum_{k=1}^{6} C_{ik} \sigma_k^1, \qquad (24)$$

где

$$C_{11}=C_{22}=1/E_1,\quad C_{12}=C_{21}=-\nu_1/E_1,\quad C_{33}=1/E_2,$$
$$C_{44}=C_{55}=1/G_2,\quad C_{13}=C_{31}=C_{23}=C_{32}=-\nu_2/E_2,$$
$$C_{i4}=C_{4i}=C_{5i}=C_{i5}=C_{i6}=C_{6i}=0\quad \left(i=\overline{1,3}\right),$$
$$C_{45}=C_{54}=C_{46}=C_{64}=C_{56}=C_{65}=0,\quad C_{66}=1/G_1=2(1+\nu_1)/E_1.$$

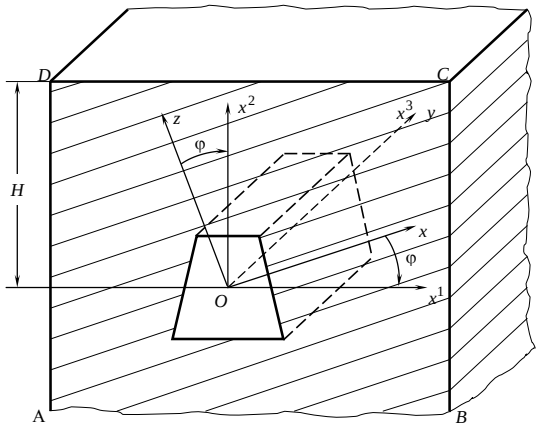


Рис. 6

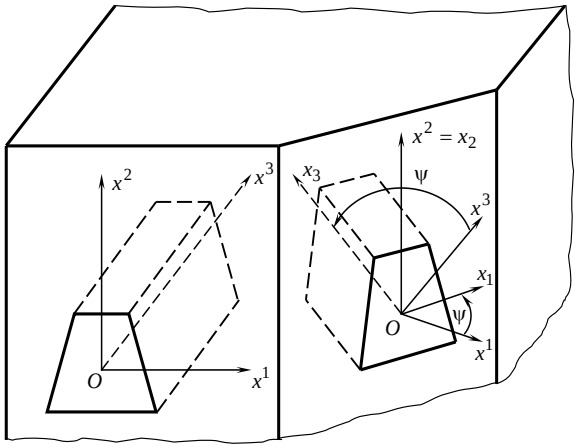


Рис. 7

Рассматривается случай размещения на глубине H массива протяженной горизонтальной (туннельной) выработки постоянного по длине сечения, пройденной вдоль ориентированного под углом ψ к плоскости изотропии (оси Oy) направления, и для удобства дальнейшего исследования соответствующей задачи вводится связанная с центром сечения координатная система $Ox_1x_2x_3$, получаемая путем поворота системы $Oxyz$ вокруг оси Oy на угол φ (рис. 6) с переходом к промежуточной системе $Ox^1x^2x^3$ и последующим поворотом системы координат $Ox^1x^2x^3$ на угол ψ вокруг оси Ox^2 (рис. 6, 7). При этом, преобразуемые с переходом к координатам $Ox_1x_2x_3$ уравнения обобщенного закона Гука принимают вид, отвечающий самой общей механической анизотропии с модулями упругости A_{ij}; объемные силы гравитации имеют выражения $X=Z=0$; $Y=-\gamma$, где $\gamma=\rho g$, ρ – параметр усредненной плотности материала массива до глубины H, а уравнения равновесия материала массива в перемещениях могут быть записаны в форме

$$L_{11}u_1+L_{12}u_2+L_{13}u_3=0,\quad L_{21}u_1+L_{22}u_2+L_{23}u_3=\gamma,$$
$$L_{31}u_1+L_{32}u_2+L_{33}u_3=0, \tag{25}$$
$$L_{11}=A_{11}\partial_1^2+2A_{16}\partial_1\partial_2+A_{66}\partial_2^2,\quad L_{22}=A_{66}\partial_1^2+2A_{26}\partial_1\partial_2+A_{22}\partial_2^2,$$
$$L_{33}=A_{55}\partial_1^2+2A_{45}\partial_1\partial_2,\quad L_{12}=L_{21}=A_{16}\partial_1^2+\left(A_{12}+A_{66}\right)\partial_1\partial_2+A_{62}\partial_2^2,$$
$$L_{13}=L_{31}=A_{15}\partial_1^2+\left(A_{14}+A_{65}\right)\partial_1\partial_2+A_{64}\partial_2^2,$$
$$L_{23}=L_{32}=A_{65}\partial_1^2+\left(A_{64}+A_{25}\right)\partial_1\partial_2+A_{24}\partial_2^2,\quad \partial_i=\partial/\partial x_i.$$

При определении напряженно-деформированного состояния горного массива его первая составляющая, описывающая начальное поле смещений и напряжений в нетронутом массиве-полупространстве со свободной граничной поверхностью $\sigma_2^0 = \sigma_4^0 = \sigma_6^0 = 0$ при $x_2 = H$, описывается соотношениями $\sigma_k^0 = -\tau_k \gamma H \left(1 - x_2 / H\right)$, $u_i^0 = -\alpha_i \gamma H \left(x_2 - \dfrac{x_2^2}{2H} \right)$, в которых $\tau_4 = \tau_6 = 0$, $\tau_2 = 1$, τ_k $\left(k = 1,3,5\right)$, α_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$ – постоянные параметры, аналитически выражаемые через упругие постоянные материала. Поля перемещений и напряжений, формирующиеся за счет появления выработок, выражаются через три удовлетворяющих однородной системе (25) и определяемых из граничных условий на контуре выработки потенциалов $\Phi_j\left(z_j\right)$ обобщенных комплексных переменных $z_j = x_1 + \mu_j x_2$.

При рассмотрении вязкоупругого напряженного состояния рассматриваемого массива уравнения обобщенного закона Гука заменяются интегральными уравнениями состояния вида (3). Соответственно, после перехода в соотношениях (24) от упругих постоянных C_{ik} к операторам вида $\bar{C}_{ik} = C_{ik}\left(1 + p_{ik}^*\right)$, при учете свойств резольвентных операторов, рассматривается задача определения значений произведения $p_{ik}^* \cdot 1$.

В опубликованных исследованиях по проблемам ползучести горных пород приведены результаты экспериментов для образцов различных изотропных пород, в том числе для наиболее распространенных видов горных пород региона Донбасса – алевролитов, аргиллитов, песчаников и известняков. Установлено, что указанные горные породы под воздействием нагрузок, не превосходящих 70% разрушающих, обнаруживают свойства ползучести; длительность периода проявления свойств ползучести алевролита составляет до $t_{st} = 600$ час., песчаника – до 860 час. Процесс ползучести горных пород подчиняется общему закону линейного деформирования, определяемого уравнениями состояния теории наследственности Вольтерра. С учетом этого предполагается, что из опыта получена кривая ползучести

$$\bar{C}_{11} \cdot 1 = \bar{C}_{22} \cdot 1 = \frac{1}{\bar{E}_1} \cdot 1 = \frac{1}{E_1}\left[1 + p_{11}^* \cdot 1\right] = \frac{1}{E_1} p_{E1}(t), \qquad (26)$$

где $p_{E1}(t)$ – таблично заданная кривая ползучести для величины $\dfrac{E_1}{\bar{E}_1} \cdot 1$, полученная из эксперимента. Из соотношения (26) находится $p_{11}^* \cdot 1 = p_{E1}(t) - 1$.

При решении граничных задач теории вязко-упругости для анизотропных материалов возникают трудности, связанные с экспериментальным определением их реологических параметров. Представленные в литературе опытные данные не содержат полной информации о совокупностях величин, необходимых для решения задач данного типа, в связи с чем используются различные допущения относительно свойств реологических параметров. Так, при отсутствии

экспериментальных значений величины $\bar{\nu}_1$ они могут быть определены согласно предположению о том, что оператор объемного сжатия является не зависящей от времени величиной. Так, полагая $(1-2\bar{\nu}_1)/\bar{E}_1=(1-2\nu_1)/E_1$ можно найти

$$\bar{C}_{12}\cdot 1=\bar{C}_{21}\cdot 1=\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1}\cdot 1=\frac{\nu_1}{E_1}\left[1+\frac{1}{2\nu_1}\left(p_{E1}(t)-1\right)\right]. \tag{27}$$

В свою очередь, из соотношений

$$\frac{1}{\bar{E}_1}-\frac{2\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2}=\frac{1}{E_1}-\frac{2\nu_2}{E_2},\ \frac{1}{\bar{E}_2}-\frac{2\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2}=\frac{1}{E_2}-\frac{2\nu_2}{E_2} \tag{28}$$

определяются произведения

$$\frac{\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2}\cdot 1=\frac{\nu_2}{E_2}\left[1+\frac{E_2}{2E_1\nu_2}\left(p_{E1}(t)-1\right)\right],\quad \frac{1}{\bar{E}_2}\cdot 1=\frac{1}{E_2}\left[1+\frac{E_2}{E_1}\left(p_{E1}(t)-1\right)\right].$$

Оператор $\bar{C}_{66}$ определяется через полученные выше операторы по формуле

$$\bar{C}_{66}=2\left(\frac{1}{\bar{E}_1}+\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1}\right), \tag{29}$$

а для получения оператора $\bar{G}_2$, в свою очередь, используется формула $\frac{1}{\bar{G}_2}=\frac{4}{\bar{E}_{45}}-\frac{1-2\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2}-\frac{1}{\bar{E}_1}$, в которой E_{45} – значение модуля Юнга при сжатии породного образца в направлении, составляющем угол 45° к плоскости изотропии.

В предположении, что величины $\frac{1}{\bar{E}_{45}}\cdot 1=\frac{1}{E_{45}}p_{E45}(t)$ также известны из эксперимента, с учетом второго соотношения (28) записываются выражения для произведения на единицу операторов $\bar{C}_{44}$ и $\bar{C}_{55}$

$$\bar{C}_{44}\cdot 1=\bar{C}_{55}\cdot 1=\frac{1}{\bar{G}_2}\cdot 1=\frac{4}{E_{45}}p_{E45}(t)-\frac{1-2\nu_2}{E_2}-\frac{1}{E_1}p_{E1}(t).$$

Дальнейшее преобразование матрицы $\bar{C}_{ik}\cdot 1$ осуществляется с учетом перехода к координатам $Ox_1x_2x_3$ вышеописанными поворотами на углы φ и ψ. В результате формируется матрица функций $\bar{a}_{ik}\cdot 1=\boldsymbol{P}(t)$, и после определения матрицы ползучести $\boldsymbol{P}(t)$ матрица релаксации $\boldsymbol{R}(t)$ строится по формулам (13).

Представленные в литературе результаты экспериментов по изучению характеристик ползучести некоторых образцов изотропных горных пород относятся к измерениям только продольных деформаций. В этих случаях функция ползучести $1/\bar{E}_1\cdot 1$ аппроксимировалась с помощью соотношения

$$\frac{1}{\bar{E}_1}\cdot 1=\frac{1}{E_1}\left[1+\frac{\delta}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right], \tag{30}$$

где значения реологических величин δ и α для материалов алевролит1 (А1) и песчаник1 (П1) приведены в таблице 2.

Таблица 2

Материал	$\delta,(сек)^{\alpha-1}$	α	$e_1 = E_1 / \left(9.81\times10^3\, МПа\right)$	ν_1	$\rho, кг / м^3$
А1	0.0094	0.726	0.62	0.2	2700
П1	0.0021	0.670	2.95	0.16	2500

Операторный коэффициент Пуассона $\bar{\nu}_1$ при этом не определялся. Поэтому матричные операторные элементы $\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21}$ следует определять из представления (27). Операторный коэффициент $\bar{C}_{66} = 1/\bar{G}_1$ определяется из соотношения (29), в результате чего матрица операторов уравнений состояния изотропного материала сформирована.

При реализации расчетов для трансверсально-изотропных пород используются реологические постоянные, полученные для изотропных материалов. В качестве таких пород приняты алевролит и песчаник транстропные:

алевролит2 (А2)

$$e_1 = 1.074\,,\quad e_2 = 0.523,\quad g_2 = 0.120\,,\quad \rho = 2700\,,$$
$$\nu_1 = 0.413,\quad \nu_2 = 0.198\,,\quad \delta = 0.0094\,,\quad \alpha = 0.726\,;$$

песчаник2 (П2)

$$e_1 = 2.987\,,\quad e_2 = 3.411,\quad g_2 = 0.215,\quad \rho = 2500\,,$$
$$\nu_1 = 0.134,\quad \nu_2 = 0.150\,,\quad \delta = 0.0021,\quad \alpha = 0.670\,.$$

На рисунке 8 приведены, построенные на базе формулы (30) нормализованные экспериментальные кривые ползучести (кривая 1 – для материала А2; кривая 2 – для материала П2), и отвечающие им кривые релаксации, построенные по формулам (14) (кривая 3 – для материала А2 и кривая 4 – для материала П2). Полученные экспериментальные кривые применимы для нахождения элементов временн*о*й матрицы уравнений состояния. Соответственно, на рисунке 9 представлены кривые изменения во времени всех элементов матрицы уравнений состояния для материала А2, отнесенные к $9.8\times10^3 МПа$. Кривые для $\bar{\nu}_1 / \bar{E}_1$ и $\bar{\nu}_2 / \bar{E}_2$ на рисунке 9 совпали. Видно, что наибольшее изменение описываются кривой ползучести для элемента матрицы состояния $1/\bar{G}_1$.

При определении операторных коэффициентов $\bar{C}_{44}$ и $\bar{C}_{55}$ использовались экспериментальные данные для $\dfrac{1}{\bar{E}_{45}} = \dfrac{1}{E_{45}}\left(1 + \lambda Э_\alpha^*(-\beta)\right)$, в которых $E_{45} = 0.383E$, $\lambda = 6.0246\, сут^{-(1+\alpha)}$, $\beta = 0.087\, сут^{-(1+\alpha)}$, $\alpha = -0.7$.

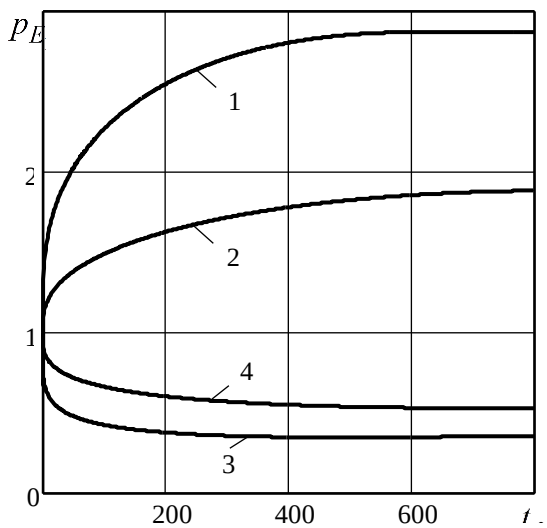


Рис. 8

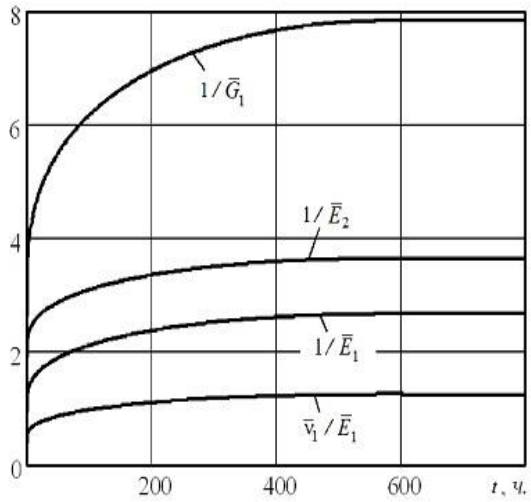


Рис. 9

На основе построенного таким образом решения рассматриваемой задачи для вязкоупругого массива горных пород с выработкой проведены численные исследования распределения напряжений и перемещений в точках геомассива, включая точки на контуре эллиптического сечения выработки при различных видах задаваемых на нем краевых условий в зависимости от соотношений полуосей сечения, типа пород и времени действия нагрузок применительно к массивам изотропных и трансверсально-изотропных геоматериалов алевролит и песчаник. Вычисления проводились для начального момента времени $t = 0$ и для момента времени $t = t_{st}$ проявления эффекта параметрической временной стабилизации напряженно-деформированного состояния.

Для случая выработок с незакрепленной граничной поверхностью в массивах изотропных пород установлено, что напряженное состояние вблизи выработок не изменяется с течением времени, но процессы ползучести отражаются на величинах перемещений. Для случая $\varphi = \psi = 0$, когда плоскость изотропии параллельна дневной поверхности, и при $H = 1000$ *м*, относительное увеличение максимальных значений для перемещений u_n составило в массиве породы А1 около 100%, в массиве П1 – около 50%. Для изотропных массивов в кровле и почве выработки возникают зоны положительных напряжений. Вблизи круговой выработки в трансверсально-изотропном массиве П2 со временем эти напряжения увеличиваются более чем на 70%. Исследования также показали, что относительное увеличение размера вертикальной полуоси сечения эллиптической выработки приводит к уменьшению концентрации положительных напряжений в кровле и почве, а с его дальнейшем увеличением вообще, к переходу в зону сжимающих напряжений. Для материалов П2 и А2 на рисунках 10 и 11 представлены эпюры напряжений $s_\theta / (\rho g H)$ на контуре выработки кругового сечения для случая $\varphi = \pi / 6$, $\psi = 0$. Сплошная линия соответствует моменту времени $t = 0$, штриховая – $t = t_{st}$. Представленные результаты получены в предположении, что $\bar{G}_2 = G_2$.

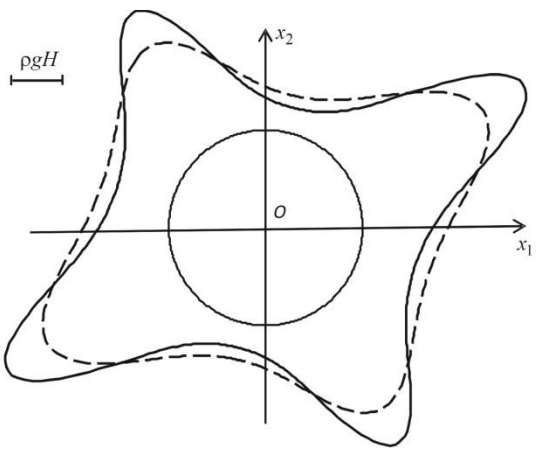


Рис. 10

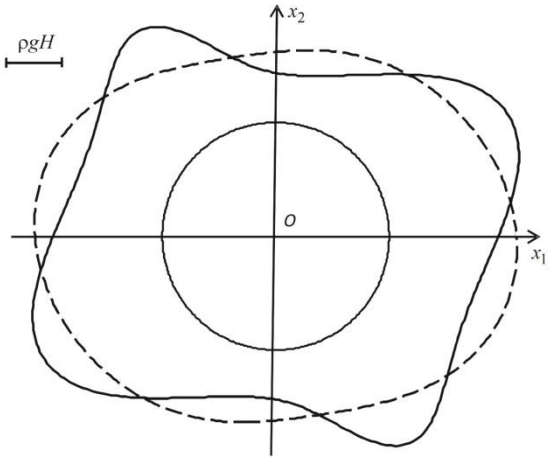


Рис. 11

При исследовании эффектов ползучести вблизи выработок в трансверсально-изотропных массивах другими авторами использовалось предположение о том, что во времени изменяется только операторный модуль $\bar{G}_2$, а остальные остаются константами. Также имеются опубликованные результаты инструментальных наблюдений за смещением контура круговой выработки радиуса 1.85 *м*, проведенной на глубине $H = 770\,м$ в горной породе А2, согласно которым на 200-ые сутки величины смещений кровли перпендикулярно напластованию (плоскости изотропии) составили 13.5 см, а боковых точек 5.5 см, причем смещения контура имеют явно затухающий во времени характер. В этой связи, для сравнения были проведены исследования смещений контура для аналогичной выработки при различных вариантах учета операторных коэффициентов уравнений состояния: а) без учета сдвиговой ползучести, когда $\bar{G}_2 = G_2$; б) учет только сдвиговой ползучести $\bar{G}_2$, когда $\bar{E}_i = E_i$, $\bar{\nu}_i = \nu_i$; в) учет всех параметров $\bar{E}_i$, $\bar{\nu}_i$, $\bar{G}_2$.

В таблице 3 приведены значения нормальных контурных смещений в точках кровли и почвы $(\theta = \pm\pi/2)$, и в боковых зонах $(\theta = 0 = \pi)$. Как видно, результаты, полученные при учете всех операторных параметров, в наибольшей степени соответствуют экспериментальным данным. Таким образом, предложенная методика расчета позволяет по имеющимся испытаниям образцов горных пород, вмещающих подземную выработку, адекватно прогнозировать величины смещений ее контура.

Таблица 3

Учет операторных коэффициентов	$u_n\big\|_{\theta=0}$, *см*		$u_n\big\|_{\theta=\pi/2}$, *см*	
	$t=0$	$t=200\,сут$	$t=0$	$t=200\,сут$
а)	-0.45	-1.10	-1.80	-2.56
б)	-0.45	-3.03	-1.80	-7.42
в)	-0.45	-6.20	-1.80	-11.02

Исследования, проведенные для случая жестко подкрепленной на контуре выработки, показали, что наибольшие напряжения $s_n/(\gamma H)$, возникающие в кровле и почве выработки, релаксируют для всех рассмотренных материалов и

форм сечений выработки, и это уменьшение составляет до 50 % от начального упругого состояния; напряжения $s_\theta/(\gamma H)$ имеют тенденцию к росту значений в 2 – 5 раз в боковых стенках выработок; касательные напряжения $s_{n\theta}/(\gamma H)$ имеют слабое выраженные изменения во времени. Применительно к материалу А2, для которого имеются экспериментальные данные к определению операторного коэффициента $1/\bar{G}_2$ исследования показали, что учет этого коэффициента несущественно влияет на значения основных напряжений.

В качестве примера в таблице 4 приведены значения напряжений $s_n/(\gamma H)$, $s_\theta/(\gamma H)$ и $s_{n\theta}/(\gamma H)$ для материала А1 и при размерах сечения выработки $a = 1м$, $b = 2м$. В ранее опубликованных работах для этого случая величины напряжений для различных моментов времени t (*час*) имели значения

$$s_n(120)\big|_{\theta=0^\circ} = -0.2815\gamma H, \quad s_n(120)\big|_{\theta=90^\circ} = -1.5174\gamma H,$$

$$s_n(600)\big|_{\theta=0^\circ} = -0.2477\gamma H, \quad s_n(600)\big|_{\theta=90^\circ} = -1.3769\gamma H.$$

Таблица 4

$t, час$	$s_n/(\gamma H)$		$s_\theta/(\gamma H)$		$s_{n\theta}/(\gamma H)$
	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 63^\circ$
0	-0.4545	-2.0909	-0.1136	-0.5227	-0.8180
120	-0.3029	-1.4939	-0.5590	-0.5123	-0.5894
600	-0.2832	-1.3836	-0.6496	-0.5008	-0.5501

Таким образом, можно констатировать хорошее согласование сопоставляемых значений.

В пятом разделе работы применительно к неклассической модели вязкоупругого деформирования анизотропных геомассивив с туннельными выработками усложненного криволинейного сечения дана разработка алгоритма построения гладких контуров произвольной конфигурации с заданной кривизной в любой точке, в том числе с невыпуклым контуром. Метод основан на аппроксимации граничного макроконтура криволинейным элементами, в качестве которых выбираются дуги окружностей и эллипсов с гладким соединением (непрерывностью касательных в точках стыкования элементов) (рис. 12). Путем пересечения нескольких макроконтуров, используя характеристические уравнения, построенные при помощи R-функций, можно построить область любой заданной конфигурации, в том числе с невыпуклым контуром.

При исследовании задач о двумерном упругом равновесии анизотропного массива горных пород с выработками, имеющими ограниченные контурами вышеописанного типа криволинейные сечения, подлежат определению из граничных условий потенциалы обобщенных комплексных переменных $\Phi_j(z_j)$, представленные в виде сумм функций, отвечающих всем элементам L_r контура грани-

цы $\Phi_j\left(z_j\right)=\sum_{r=1}^{N}\Phi_{jr}=\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{rkj}}{\varsigma_{jr}^{k}}$, и содержащие коэффициенты α_{rkj}, определяемые из граничных условий при помощи метода наименьших квадратов. После их определения перемещения и напряжения определяются из соотношений

$$u_k=u_k^0+2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3}R_{kj}\Phi_j\left(z_j\right)\quad\left(k=\overline{1,3}\right),\ \sigma_p=\sigma_p^0+2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3}P_{pj}\Phi'_j\left(z_j\right)\ \left(p=\overline{1,6}\right).$$

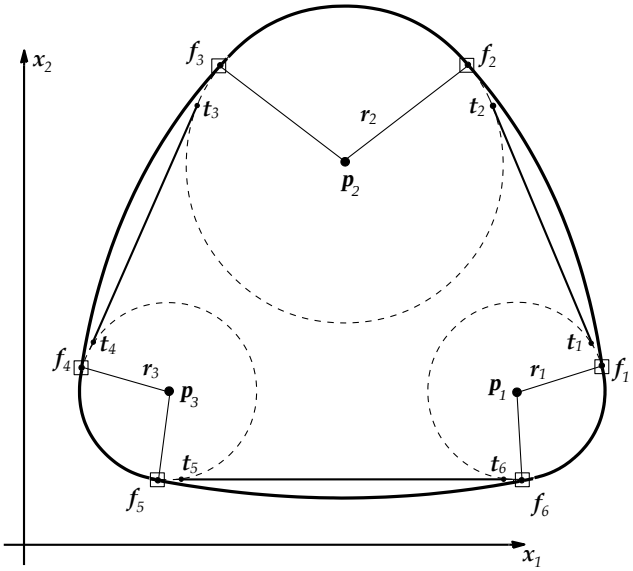


Рис. 12

Расчеты, связанные с применением разработанного подхода, осуществлены для содержащих выработки массивов из изотропных (П1, А1) и трансверсально-изотропных (П2, А2) горных пород, упругие и реологические постоянные которых даны в разделе 4.

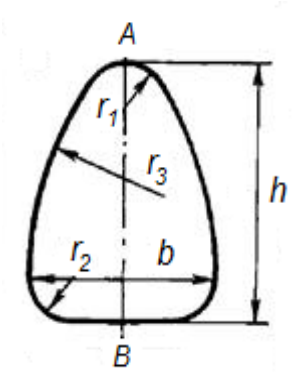


Рис. 13

В рамках исследований рассмотрена горизонтальная выработка сводчатого сечения с расширением в нижней части (рис. 13), геометрические параметры поперечного контура которого имеют значения $r_1=r_2=0.25b$, $r_3=2b$, $h=1.4b$, $b=4м$. Применительно к выработке с описанной формой контура сечения в массиве изотропного песчаника реализована верификация совокупности предложенных методических приемов учета неклассических геометрических и реологических свойств на основе сопоставления получаемых результатов с результатами других опубликованных исследований, полученных в случае параметрического описания очертаний границы при помощи конформного отображения ее внешности на внешность круговой области. При исследовании эффектов влияния ползучести изотропного песчаника установлено, что наибольшие перемещения возникают в кровле (точка *A*) и в почве (точка *B*) выра-

ботки, и в таблице 5 для трех величин параметра времени, в том числе для времени стабилизации процесса ползучести $t_{st} = 860$ часов, приведены значения нормальных перемещений u_n [*м*] в этих точках. Для сравнения в таблице даны отмеченные звездочкой и хорошо согласующиеся с полученными значения перемещений, определенные другими авторами. Показано также, что свойства ползучести изотропных горных пород в рассматриваемом случае не влияют на напряженное состояние в окрестности выработки.

Таблица 5

Точки на контуре	t, час					
	0		120		860	
	u_n / *м*	u_n / *м**	u_n / *м*	u_n / *м**	u_n / *м*	u_n / *м**
A	-0.0042	-0.0043	-0.0054	-0.0051	-0.0064	-0.0063
B	-0.0062	-0.0060	-0.0077	-0.0070	-0.0089	-0.0083

На рисунках 14 и 15 соответственно для анизотропных П2 и А2 даны полученные разработанными методами эпюры напряжений $s_\theta / (\gamma H)$ на контуре сводчатого сечения в начальный момент времени (сплошная линия) и в моменты времени $t = t_{st}$ (штриховая линия). Ввиду относительно высокой прочности П2 перераспределение напряжений на контуре выработки с течением времени оказывается не существенным. Однако в почве возникает зона растягивающих напряжений, что может привести к разрушению пород в этой зоне и подлежит учету при проведении горных выработок. Для массива из А2 свойства ползучести проявляются в большей степени, и из рисунка 15 видно, что с течением времени происходит более равномерное перераспределение концентрации напряжений в сторону уменьшения абсолютных значений. В отличие от песчаника зоны действия положительных напряжений в алевролите с выработкой рассмотренного сечения не возникают.

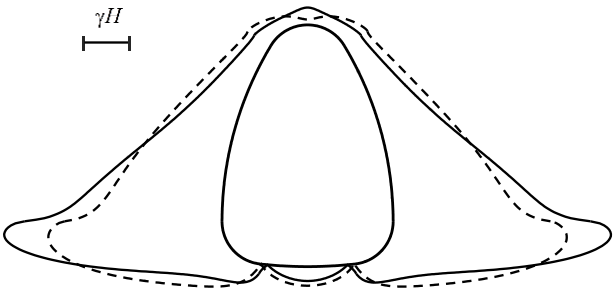


Рис. 14

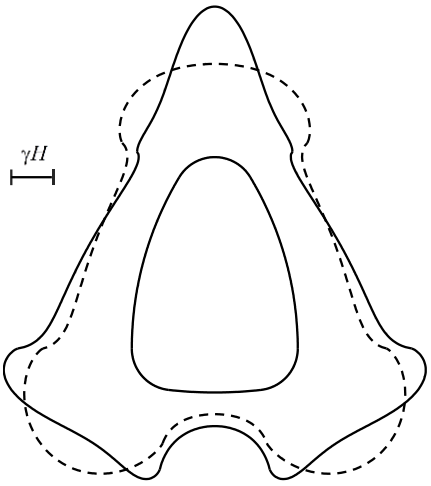
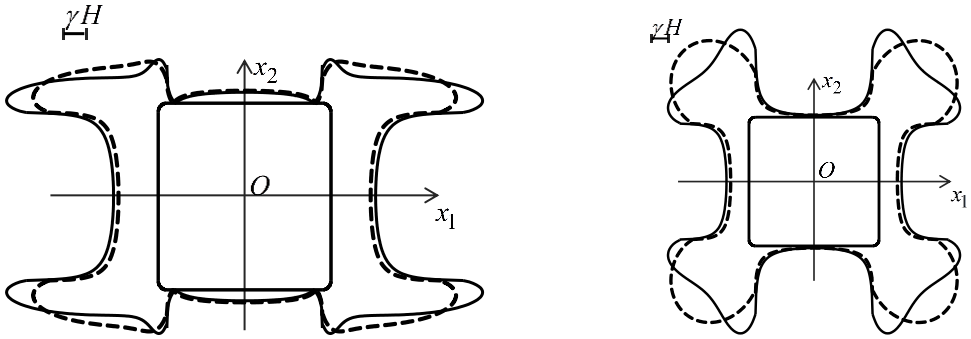


Рис. 15

Далее в разделе рассмотрена горизонтальная выработка квадратного сечения со стороной 2 *м* и гладкой аппроксимацией в угловой точке частью окружности с радиусом закругления $r = 0.1\,м$. На рисунке 16 для указанных выше моментов времени представлены распределения напряжений $s_\theta / (\gamma H)$ у контуров выработок для П2 (а) и А2 (б). В первом случае особенностью является появление зон положительных напряжений в кровле и почве, которые со временем увеличиваются. В стенках выработки преобладают сжимающие напряжения. Для геомассива из алевролита2 наблюдается снижение концентрации сжимающих напряжений, но имеет место увеличение напряжений в узких зонах скругления.



а) б)

Рис. 16

Далее получено решение задачи для горизонтальной выработки с сечением, составленным из четырех эллиптических дуг и реализованы расчеты для выработки, с сечением ограниченным двумя одинаковыми эллиптическими контурами, соединенными участком выработки с «почти прямолинейными» границами в виде дуг эллипсов очень малой кривизны, расстояние между которыми составляют $h = 1\,м$ (рис. 17). Меньшая полуось вертикального эллипса $a = 1.5\,м$, большая $b = 2\,м$. Расстояние между центрами эллиптических полостей $L = 6\,м$.

На рисунке 17 также представлены эпюры напряжений $\left| s_\theta / (\gamma H) \right|$ на контуре выработки для материала А2. Сплошная линия соответствует начальному упругому состоянию $t = 0$, а штриховая – установившемуся $t_{st} = 600\ ч$. Максимальные по модулю значения напряжений возникают в боковых точках выработки (точки *A* и *B*) и равны, соответственно, $s_\theta\big|_{t=0} = -3.7017\gamma H$ и $s_\theta\big|_{t=600} = -2.9203\gamma H$. Расчеты показывают, что с течением времени максимальные сжимающие напряжения уменьшаются по модулю. Можно также отметить, что на отрезках малой кривизны, соединяющих эллиптические контуры, возникают зоны растягивающих напряжений, которые со временем незначительно уменьшаются ($s_\theta\big|_{t=0} = 0.2866\gamma H$, $s_\theta\big|_{t=600} = 0.2542\gamma H$). Исследования также показали, что с увеличением расстояния между эллиптическими выработками напряжения, как в боковых точках, так и центральных точках прямолинейных элементов, растут.

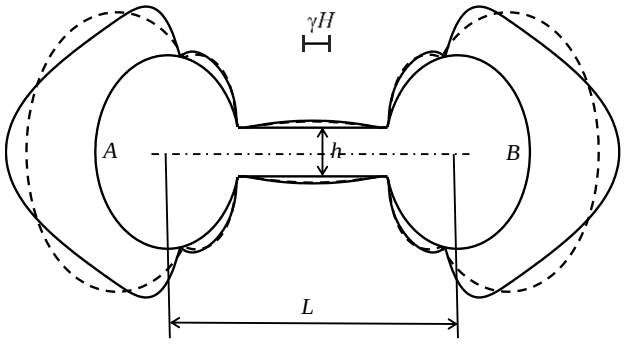


Рис. 17

Рассмотрен также случай многосвязного сечения массива, содержащего размещенные на расстоянии одинаковые горизонтальные выработки эллиптического сечения (рис. 18). Анализ полученных расчетных результатов позволяет сделать следующие выводы:

– максимальные по абсолютному значению напряжения $\sigma_\theta / \gamma H$, возникающие в боковой стенке для всех вариантов расположения и соотношения полуосей выработок и материалов в стационарном состоянии приблизительно на 30% меньше соответствующих напряжений в начальный момент;

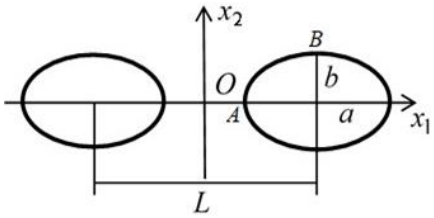


Рис. 18

– для материала П2 в кровле и почве возникают положительные растягивающие напряжения, что может привести к разрушению выработок в этой зоне.

Увеличение длины вертикальной полуоси эллиптических выработок приводит к уменьшению концентрации положительных напряжений в кровле и почве, а с его дальнейшем увеличением, вообще, к переходу в зону сжимающих напряжений. Установлено также, что для выработок кругового сечения в процессе их эксплуатации растягивающие напряжения увеличиваются почти в два раза.

В шестом разделе диссертации представлены новые неклассические модели и уточненные теории изгиба трансверсально-изотропных и ортотропных плит, предусматривающие учет деформаций поперечного сдвига, и разработка методов их исследования; получены соответствующие представления для перемещений, напряжений, моментов и перерезывающих сил, а также разрешающая система дифференциальных уравнений шестого порядка; представлена методика удовлетворения граничным условиям краевых задач, формулируемых в рамках предложенных уточнённых теорий; представлены примеры применения разработанных методов при исследовании напряженного состояния бесконечных анизотропных плит с эллиптическим отверстием и анализа описываемых полученными решениями физико-механических эффектов.

При рассмотрении модели изгиба содержащей отверстие неограниченной трансверсально-изотропной плиты толщины $2h$, подверженной действию прило-

женных на бесконечности и на боковой поверхности отверстия усилий и отнесенной к декартовой системе координат $Oxyz$ с осью Oz, ортогональной к плоскости изотропии ее материала, которая параллельна срединной плоскости плиты, вводимые представления для функций перемещений имеют вид

$$u_1 = p_1(z)\left[\partial_1\varphi(x,y)+\partial_2\psi(x,y)\right],\ u_2 = p_1(z)\left[\partial_2\varphi(x,y)-\partial_1\psi(x,y)\right], \tag{31}$$
$$u_3 = w_0(x,y)+p_2(z)w(x,y),\quad p_2=\int p_1 dz,$$

а из соотношений обобщенного закона Гука могут быть получены выражения

$$\sigma_1 = p_1 S_1,\ \sigma_2 = p_1 S_2,\quad \sigma_3 = p_1 S_3,\quad \sigma_6 = p_1 S_6; \tag{32}$$
$$\sigma_4 = A_{44}\left[\partial_2 w_0 + p_2\partial_2 w + p_0\left(\partial_2\varphi-\partial_1\psi\right)\right], \tag{33}$$
$$\sigma_5 = A_{55}\left[\partial_1 w_0 + p_2\partial_1 w + p_0\left(\partial_1\varphi+\partial_2\psi\right)\right],$$

где $p_1(z)$ – некоторая вводимая для версий модели нечетная функция, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $w_0(x,y)$, $w(x,y)$ – подлежащие определению функции, A_{ij} – модули упругости,

$$S_i = \left(A_{i1}\partial_1^2 + A_{i2}\partial_2^2\right)\varphi + \left(A_{i1}-A_{i2}\right)\partial_1\partial_2\psi + A_{i3}w \quad \left(i=\overline{1,3}\right), \tag{34}$$
$$S_6 = A_{66}\left[2\partial_1\partial_2\varphi + \left(\partial_2^2-\partial_1^2\right)\psi\right],\quad p_0(z) = p_1'(z).$$

Напряжения σ_4, σ_5 и σ_3 могут быть также получены из уравнений равновесия

$$\sigma_4 = \left[p_2(h)-p_2(z)\right]S_4,\ \sigma_5 = \left[p_2(h)-p_2(z)\right]S_5,\ \sigma_3 = \left[p_3(z)-p_2(h)z\right]S_3^*, \tag{35}$$

где введены обозначения

$$p_3 = \int p_2 dz,\quad S_3^* = \partial_1 S_5 + \partial_2 S_4,\quad S_4 = \partial_1 S_6 + \partial_2 S_2,\quad S_5 = \partial_1 S_1 + \partial_2 S_6.$$

Представления для напряжений σ_4 и σ_5 в соотношениях (35) удовлетворяют однородным граничным условиям на плоских гранях плиты $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$ при $z = \pm h$, но они противоречат соотношениям (33). Для их согласования и получения разрешающих дифференциальных уравнений рассматриваемой модели вводятся гипотезы: поперечное нормальное напряжение σ_3, как и в прикладной теории Кирхгофа, равно нулю; суммарные поперечные усилия, полученные интегрированием представлений (33) и (35), равны. В рамках данных гипотез введенные функции должны удовлетворять системе соотношений

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \tag{36}$$
$$\Delta\psi - k^2\psi = 0, \tag{37}$$
$$w_0 = -k_0\varphi + \alpha_1\Delta\varphi,\ w = -\alpha_{13}\Delta\varphi, \tag{38}$$

где

$$k^2 = k_0/\left(k_2\alpha_{65}\right),\quad \alpha_{65} = A_{66}/A_{55},\quad \alpha_{13} = A_{13}/A_{33},\quad \alpha_1 = k_2 B_{11}/A_{55} + k_1\alpha_{13},$$

$$k_0 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} p_0(z)dz, \quad k_1 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} p_2(z)dz, \quad k_2 = p_2(h) - k_1.$$

Система разрешающих дифференциальных уравнений имеет в совокупности шестой порядок, что позволяет удовлетворить всем интегральным граничным условиям на боковой поверхности плиты.

В рамках разрабатываемого метода общие решения дифференциальных уравнений (36) и (37) строятся в функциях обобщенных комплексных переменных.

При задании функции $p_1(z)$ в виде $p_1(z) = z^{2m-1}$ уравнение (37) записывается в виде

$$\lambda^2 \Delta\psi - \psi = 0, \tag{39}$$

и для рассматриваемых относительно тонких пластин величина $\lambda^2 = 1/k^2 = h^2\alpha_{65}/(2m+1)$ принимается в качестве малого параметра. Являющийся составным элементом разрабатываемого подхода, метод решения уравнения (39) базируется на использовании уравнения границы области и пограничного слоя. При $\lambda^2 \to 0$, решение предельного для (39) уравнения $\psi = 0$ близко к точному решению всюду, за исключением малого интервала (пограничного слоя, области краевого эффекта) возле граничной линии $\omega = 0$, где решение изменяется так, чтобы удовлетворялось краевое условию на границе области. Решение в области пограничного слоя строится с применением асимптотического разложения на базе представлений

$$\psi = r(x,y)\,\Psi(x,y)\ , \tag{40}$$

$$r = \exp\left(\alpha\omega + \alpha_2\frac{\omega^2}{2} + \alpha_3\frac{\omega^3}{6} + \ldots\right), \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1\,\omega + \Psi_2\frac{\omega^2}{2} + \Psi_3\frac{\omega^3}{6} + \ldots\ , \tag{41}$$

в которых α – постоянная величина; $\alpha_2, \ldots, \Psi_0$, Ψ_1, … – функции переменных (x,y); $\omega(x,y) = 0$ – нормализованное до k-го порядка уравнение границы контура отверстия $\partial\Omega$, для которого справедливы свойства

$$\frac{\partial\omega}{\partial n} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = 1, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial^2 n} = \frac{\partial^3\omega}{\partial^3 n} = \ldots = \frac{\partial^k\omega}{\partial^k n} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega.$$

После подстановки (40) в (39) с учетом свойств функции ω, для определения величин, входящих в (41), записываются соотношения

$$\Delta\Psi_0 = 0;\ \alpha = -1/\lambda, \quad \alpha_2 = -\alpha\Delta\omega, \tag{42}$$

$$\Psi_1 = -(\omega_1\,\partial_1\Psi_0 + \omega_2\,\partial_2\Psi_0),\ \Psi_2 = -\Delta\omega\,\Psi_1 - 2[\omega_1\,\partial_1\Psi_1 + \omega_2\,\partial_2\Psi_1], \tag{43}$$

где $\omega_1 = \partial\omega/\partial x$, $\omega_2 = \partial\omega/\partial y$. Решение уравнения (42) и функции (43) выражаются через произвольную функцию комплексной переменной $z_3 = x + \mu_3 y$ (μ_3 – в данном случае мнимая единица) в форме

$$\Psi_0 = 2\,\mathrm{Re}\,\Phi(z_3), \quad \Psi_1 = 2\,\mathrm{Re}\ p_{11}\Phi'(z_3), \quad \Psi_2 = 2\,\mathrm{Re}\left[p_{21}\Phi'(z_3) + p_{22}\Phi''(z_3)\right],$$

где

$$p_{11} = -\left(\omega_1 + \mu_3\omega_2\right), \quad p_{22} = 2p_{11}^2,$$

$$p_{21} = 3\omega_1\,\partial_1^2\omega + 2\omega_2\,\partial_1\partial_2\omega + \omega_1\,\partial_2^2\omega + \mu_3\left(3\omega_2\,\partial_2^2\omega + 2\omega_1\,\partial_1\partial_2\omega + \omega_2\,\partial_1^2\omega\right).$$

Наряду с вышеописанным методом, интегрирование метагармонических уравнений (37) реализовано с использованием аппарата цилиндрических бесселевых функций.

При удовлетворении граничных условий на боковой поверхности полости, функции $\varphi_j\left(z_j\right)$ $\left(j=1,2\right)$ и $\Phi_3\left(z_3\right)$, через которые выражаются решение φ бигармонического уравнения (36) и решение ψ уравнения (39), представляются в виде рядов

$$\varphi_j'\left(z_j\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{nj}}{\varsigma_j^n}, \quad \Phi\left(z_3\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{n3}}{\varsigma_3^{n+1}}, \tag{44}$$

и далее для нахождения введенных в (44) неизвестных коэффициентов переразлагаются в ряды по степеням переменной σ, после чего па базе метода ортогональных рядов краевые условия сводятся к редуцируемым бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно α_{ni}.

Численные исследования с применением разработанного подхода реализованы для случая, когда на удалении от поперечной полости-отверстия заданы усилия интенсивности $\sigma_1^0 = pz$, $\sigma_2^0 = \sigma_6^0 = 0$, а ее боковая поверхность свободна от усилий. Для характеристик концентрации напряжений на контуре полости в данном случае получены выражения

$$\sigma_\theta = \frac{z}{h}S_\theta = \frac{z}{h}\left(n_2^2S_1 - 2n_1n_2S_6 + n_1^2S_2\right),$$

$$\tau_{z\theta} = P_2\left(z\right)S_{z\theta} = P_2\left(z\right)\left(-n_2S_5 + n_1S_4\right),\ P_2\left(z\right) = \left(h - z^2/h\right)/2.$$

Упругие постоянные материалов, для которых проводились исследования, даны в таблице 6. Изотропный материал является модельным с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$. Максимального значения величины S_θ / p достигают на контуре отверстия при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, а минимального при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Величины $\left|S_{z\theta}/p\right|$ для кругового контура максимального значения достигают при $\theta = \pm\pi/4$ и $\theta = \pm 3\pi/4$. Для эллиптического контура зона максимальной концентрации сдвигается в сторону вершины с большей кривизной.

Таблица 6

Материал	A_{11}, ГПа	A_{12}, ГПа	A_{13}, ГПа	A_{33}, ГПа	A_{44}, ГПа
Изотропный	120	60	60	120	30
Ceramic PZT-4	139	78	74	115	25,6
InSe	73	27	30	36	12

В результате численных исследований установлено, что использование решений уравнения (37) в цилиндрических функциях имеет ограничение, касающе-

еся соотношения полуосей эллипса, и для всех рассмотренных материалов и толщин плиты предел этого соотношения приблизительно равен 2/3 для вертикально (и 3/2 для горизонтально) ориентированных эллипсов. На базе сопоставления результатов применения прикладной теории и полученных с учетом первого приближения в процессе интегрирования уравнения Гельмгольца с малым параметром при старшей производной может быть проанализирована градация «тонкая – толстая плита». Так, сравнение результатов для пластины с круговой полостью показывает, что тонкой можно считать плиту, у которой $h/a=0.25$. В таблице 7 приведены рассчитанные значения максимальных напряжений S_θ^i/p, $S_{z\theta}^i/p$, возникающих на контуре круговой полости, где $i=1$ соответствует решению уравнения (37) в цилиндрических функциях, а $i=2$ – методике интегрирования уравнения (39) с малым параметром при старшей производной. Результаты для материала InSe хорошо согласуются с известными, полученными в рамках трехмерной теории.

В работе также получены и проанализированы результаты расчетов для плит разной толщины с эллиптической полостью $(a/b=0.7)$, а также для тонкой плиты $(h/b=0.1)$ при различных соотношениях полуосей.

Таблица 7

Материал	$h=0.01$				$h=0.25$				$h=1$		$h=10$	
	S_θ^1	S_θ^2	$S_{z\theta}^1$	$S_{z\theta}^2$	S_θ^1	S_θ^2	$S_{z\theta}^1$	$S_{z\theta}^2$	S_θ^1	$S_{z\theta}^1$	S_θ^1	$S_{z\theta}^1$
Изотропный	1.81	1.81	0.52	0.52	1.93	1.93	0.49	0.52	2.242	0.414	2.918	0.105
Ceramic PZT-4	1.81	1.81	0.48	0.47	1.94	1.92	0.45	0.37	2.271	0.371	2.928	0.089
InSe	1.69	1.69	0.41	0.41	1.86	1.81	0.39	0.29	2.244	0.319	2.936	0.071

Далее в работе рассмотрено построение уточненной теории численно-аналитического исследования неклассической модели изгиба ортотропных плит. На основе исходных представлений для перемещений в виде

$$u_1=p_1\partial_1\varphi_1(x,y),\quad u_2=p_1\partial_2\varphi_2(x,y),\quad u_3=w_0(x,y)+p_2w(x,y)$$

и аналогичных вышеприведенному случаю трансверсально-изотропных плит гипотез и преобразований, для данной модели получено разрешающее уравнение шестого порядка

$$\left(D_4L_2-\lambda^2P_4\right)\Phi=0, \tag{45}$$

в котором $D_4=\partial_2^4+2q_0\partial_2^2\partial_1^2+q_2\partial_1^4$, $P_4=\partial_2^4+2q_1\partial_2^2\partial_1^2+q_2\partial_1^4$, $L_2=\partial_2^2+q_5\partial_1^2$,

$$\lambda^2=A_{55}k_0/(A_{66}k_2),\ q_0=(B_{11}-B_{12}q_1)/(2A_{66}),\ q_1=D_{12}/B_{22},\ q_2=B_{11}/B_{22},$$

$$q_3=(A_{32}q_1-A_{31})/(A_{33}A_{66}),\ q_4=(A_{32}q_2-A_{31}q_1)/(A_{33}A_{66}),\ q_5=A_{55}/A_{44}.$$

В качестве приема для интегрирования уравнения (45) для пластин относительно большой толщины предложено добавление к его левой части операторного слагаемого $\lambda^2\,2(q_1-q_0)\,\partial_1^2\,\partial_2^2\Phi$ с коэффициентом, содержащим малый параметр

$\lambda^2 = A_{55}k_0 / \left(A_{66}k_2\right)$ порядка h^{-2}, в результате чего получаемое уравнение приводится к виду

$$D_4\left(L_2 - \lambda^2\right)\Phi = 0.$$

Для пластин малой толщины плиты к левой части уравнения предлагается добавление слагаемого $\lambda^{-2}\, 2L_2\left(q_1 - q_0\right)\partial_1^2\, \partial_2^2\Phi$ с коэффициентом, содержащим малый параметр $1/\lambda^2$, что позволяет привести его к виду

$$P_4\left(L_2 - \lambda^2\right)\Phi = 0. \tag{46}$$

Детальный анализ и применение указанных приемов осуществлены применительно к варианту неклассической модели определения изгибного напряженно деформированного состояния тонких плит. Общим решением применяемого в этом случае уравнения (46) является функция

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \tag{47}$$

где

$$P_4\Phi_1 = 0; \tag{48}$$

$$\left(L_2 - \lambda^2\right)\Phi_2 = 0. \tag{49}$$

Для общего действительнозначного решения (48) используется представление

$$\Phi_1 = 2\,\mathrm{Re}\left[F_1\left(z_1\right) + F_2\left(z_2\right)\right],$$

где $F_j\left(z_j\right)$ – аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x + \mu_j y$; параметры μ_j являются корнями степенного уравнения

$$P_4\left(\mu\right) = \mu^4 + 2q_1\mu^2 + q_2 = 0.$$

В свою очередь, дифференциальное уравнение (49) представляется в виде

$$\left[\varepsilon^2\left(\partial_2^2 + q_5\partial_1^2\right) - 1\right]\Phi_2 = 0, \tag{50}$$

где $\varepsilon^2 = 1/\lambda^2$ – малый параметр при старших производных. Предлагаемый метод решения уравнения (50) основан на использовании уравнения границы области; приближенное решение (50) записывается в виде произведения

$$\Phi_2 = r\left(x, y\right)\Psi\left(x, y\right), \tag{51}$$

где функции r и Ψ определяются в области краевого эффекта в виде разложений $r = \exp\left(\alpha\omega\right)$, $\Psi = \psi_0 + \psi_1\,\omega + \psi_2\dfrac{\omega^2}{2}$; α – постоянная величина, ψ_0, ψ_1, ψ_2 – функции переменной $x + \mu y$, подлежащие определению в процессе решения уравнения (50). Результатом подстановки представления (51) в уравнение (50) являются уравнения для функций ψ_i

$$\partial_2^2\psi_0 + q_5\partial_1^2\psi_0 = 0; \tag{52}$$

$$\psi_1 = -\left(\omega_2\partial_2\psi_0 + q_5\omega_1\partial_1\psi_0\right),\ \psi_2 = -2\left(\omega_2\partial_2\psi_1 + q_5\omega_1\partial_1\psi_1\right). \qquad (53)$$

В рамках разрабатываемого подхода для решения уравнения (52) и для функций (53) получены выражения

$$\psi_0 = 2\,\mathrm{Re}\,F_3(z_3),\quad \psi_1 = 2\,\mathrm{Re}\left[r_1F_3'(z_3)\right],\quad \psi_3 = 2\,\mathrm{Re}\left[r_2F_3''(z_3)\right],$$

где $r_1 = -\left(\omega_2\mu_3 + q_5\omega_1\right)$, $r_2 = 2r_1^2$, $\mu_3 = i\sqrt{q_5}$, $F_3' = dF_3/dz_3$, $F_3'' = dF_3'/dz_3$, $F_3(z_3)$ – произвольная функция обобщенной комплексной переменной $z_3 = x + \mu_3 y$. Соответственно, представление (51) для решения уравнения (50) и общее решение (47) уравнения (46) записываются в виде

$$\Phi_2 = 2\,\mathrm{Re}\left[F_3 + \omega r_1F_3' + \left(\omega^2/2\right)r_2F_3''\right]\exp(\alpha\omega), \qquad (54)$$

$$\Phi = 2\,\mathrm{Re}\left[F_1 + F_2 + \left(F_3 + \omega r_1F_3' + \left(\omega^2/2\right)r_2F_3''\right)\exp(\alpha\omega)\right]. \qquad (55)$$

Произвольные функции $F_j(z_j)$ в этих представлениях подлежат определению находятся из граничных условий на боковой поверхности полости.

В рамках рассматриваемой модели с применением разработанного метода осуществлены исследования напряженного состояния бесконечных плит содержащих ненагруженную по граничной поверхности поперечную полость-отверстие эллиптического сечения с полуосями a и b при действии приложенных на бесконечности изгибающих усилий $\sigma_1^0 = pz/h$ $\sigma_2^0 = \sigma_6^0 = 0$. Отнесенные к 10^4 *МПа* технические упругие постоянные E_i и G_{ij} для материалов, из которых изготовлены исследуемые плиты, представлены в таблице 8. Материал *О* – ортотропный материал (волокнистый стеклопластик ВМ-1). Материал *И* – модельный изотропный материал.

Таблица 8

Материал	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{31}	ν_{23}	ν_{12}
О	4.76	2.07	1.45	0.531	0.501	0.434	0.099	0.325	0.149
И	4.76	4.76	4.76	2.071	2.071	2.071	0.149	0.149	0.149

В таблице 9 приведены рассчитанные значения максимальных и минимальных напряжений $s_\theta = \sigma_\theta/(pz/h)$ при $z = \pm h$, а также максимальных по модулю значений напряжений $s_{z\theta} = \left|\tau_{z\theta}/P_2\right|$ на контуре полости в срединной плоскости при различных соотношениях a/b в случае $h = 0.01b$.

Таблица 9

Материал	$a/b = 0.5$			$a/b = 1$			$a/b = 2$		
	$\max s_\theta$	$\min s_\theta$	$s_{z\theta}$	$\max s_\theta$	$\min s_\theta$	$s_{z\theta}$	$\max s_\theta$	$\min s_\theta$	$s_{z\theta}$
И	2.46	0.27	0.81	1.73	0.27	0.54	1.36	0.27	0.41
О	3.48	0.37	0.92	2.24	0.37	0.58	1.62	0.34	0.39

Сравнение результатов расчета σ_θ для тонких плит, полученных с применением разработанного метода и в рамках прикладной классической теории, указывает на их полное совпадение. Однако, классическая теория не позволяет сделать выводы о поведении касательных напряжений $\tau_{z\theta}$, которые в некоторых случаях составляют до 30% от максимальных напряжений σ_θ.

Исследования позволяют также сделать следующие выводы:

– учет фактора анизотропии механических свойств материалов для ортотропных плит ведет к увеличению показателя концентрации напряжений вблизи полости;

– наибольшие напряжения s_θ возникают в случае, когда эллипс вытянут вдоль оси, перпендикулярной направлению действия изгибающих усилий;

– с уменьшением толщины значение напряжения $s_{z\theta}$ увеличиваются, стремясь к некоторому конечному значению. С ростом толщины значения этих напряжения приближаются к нулю.

В седьмом разделе диссертации изложены вопросы применения разработанных методов учета свойств вязкоупругости конструкционных материалов при анализе на базе вышеописанных уточненных теорий задач изгиба плит, формулируемых в рамках неклассических моделей учета факторов их деформирования.

В первую очередь, рассматриваются задачи описания произведения на единицу интегральных операторов, входящих в уравнения состояния для случаев изгиба плит из изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных материалов. Для изотропных плит данные для временных матриц коэффициентов деформации можно получить по формулам (18) – (22).

В случае трансверсально-изотропных материалов исходными данными для построения элементов матрицы состояния $\bar{a}_{mn}$ полагаются экспериментальные кривые ползучести $p_{Ei}(t)$ и $p_{G2}(t)$. При введении в рассмотрение произвольных резольвентных операторов $\overset{*}{p}_{Ei}$ и $\overset{*}{p}_{G2}$, то произведения на единицу операторов $1/\bar{E}_i$ и $1/\bar{G}_2$ можно выразить с использованием описаний кривых ползучести $p_{Ei}(t)$ и $p_{G2}(t)$

$$\frac{1}{\bar{E}_i}\cdot 1=\frac{1}{E_i}\left[\,1+\overset{*}{p}_{Ei}\cdot 1\,\right]=\frac{1}{E_i}\,p_{Ei}(t)\ \ (i=1,2), \tag{56}$$

$$\frac{1}{\bar{G}_2}\cdot 1=\frac{1}{G_2}\left[1+\overset{*}{p}_{G2}\cdot 1\right]=\frac{1}{G_2}\,p_{G2}(t).$$

Из соотношений (56) находятся значения произведений на единицу введенных операторов через экспериментальные данные

$$\overset{*}{p}_{Ei}\cdot 1=p_{Ei}(t)-1,\quad \overset{*}{p}_{G2}\cdot 1=p_{G2}(t)-1. \tag{57}$$

С использованием допущения $1/\bar{K}=1/K$, соотношений алгебры операторов, а также известной зависимости $1/\bar{G}_1=2(1+\bar{\nu}_1)/\bar{E}_1$, последовательно находятся остальные ненулевые элементы матрицы состояния

$$\bar{a}_{12}\cdot 1=\bar{a}_{21}\cdot 1=-\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1}\cdot 1=-\frac{\nu_1}{E_1}\left[1+\frac{1}{2\nu_1}p^*_{E1}\cdot 1\right], \tag{58}$$

$$\bar{a}_{66}\cdot 1=\frac{1}{\bar{G}_1}\cdot 1=2\left(\frac{1}{\bar{E}_1}+\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1}\right)\cdot 1=\frac{1}{G_1}\left[1+\lambda_{G1}p^*_{E1}\cdot 1\right],\quad \lambda_{G1}=\frac{3}{2(1+\nu_1)},$$

$$\bar{a}_{13}\cdot 1=\bar{a}_{31}\cdot 1=\bar{a}_{23}\cdot 1=\bar{a}_{32}\cdot 1=\frac{-\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2}\cdot 1=-\frac{\nu_2}{E_2}\left[1+\frac{E_2}{4\nu_2 E_1}p^*_{E1}\cdot 1+\frac{1}{4\nu_2}p^*_{E2}\cdot 1\right].$$

Значения произведений $p^*_{Ei}\cdot 1$ и $p^*_{G2}\cdot 1$ в соотношениях (58) следует заменить правыми частями равенств (57).

В первую очередь, численные исследования с применением разработанного подхода реализованы для вязкоупругой изотропной плиты из алюминия с упругими и реологическими характеристиками

$$E=7.1\times 10^4\ МПа,\ \ G=2.84\times 10^4\ МПа,\ \ \nu=0.25,$$

$$\alpha=-0.5,\quad \lambda_\nu=6.15\times 10^{-3}\,c^{-(1+\alpha)},\quad \beta_\nu=6.65\times 10^{-3}\,c^{-(1+\alpha)}.$$

При этом, в формуле (18) следует положить $p^*_\nu=\lambda_\nu Э^*_\alpha(-\beta_\nu)$.

В качестве трансверсально-изотропного вязкоупругого материала для бесконечной плиты с имеющей полуоси сечения a и b эллиптической полостью, изгибаемой приложенными на бесконечности усилиями $\sigma_x^0=pz$, рассмотрен полимерный композит с характеристиками

$$E_1=17{,}4\cdot 10^3\ МПа,\ \ \lambda_1=0.023c^{-(1+\alpha)},\quad \beta_1=0.095c^{-(1+\alpha)},\quad \nu_1=0.115,$$

$$E_2=12{,}3\cdot 10^3\ МПа,\ \ \lambda_2=0.057c^{-(1+\alpha)},\quad \beta_2=0.115c^{-(1+\alpha)},\quad \nu_2=0.099,$$

$$G_2=5.99\cdot 10^3\ МПа,\ \ \lambda_{G2}=0.112c^{-(1+\alpha)},\quad \beta_{G2}=0.032c^{-(1+\alpha)},\quad \alpha=-0.7.$$

$$p^*_{Ei}=\lambda_i Э^*_\alpha(-\beta_i),\quad p^*_{G2}=\lambda_{G2}Э^*_\alpha(-\beta_{G2}).$$

Исследования проведены для различных относительных толщин плиты $2h/\max(a,b)$ в момент времени $t=0$ *ч.* (упругое состояние), а также для стационарных состояний при $t=300$ *ч.* (для алюминия), $t=600$ *ч.* (для композита). Максимальные значения величина S_θ/p принимает на контуре полости при $\theta=\pi/2$ и $\theta=3\pi/2$, а минимального при $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Величины $|S_{z\theta}/p|$ для кругового контура максимального значения достигают при $\theta=\pm\pi/4$ и $\theta=\pm 3\pi/4$. Для эллиптического контура зона максимальной концентрации сдвигается в сторону вершины с большей кривизной.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1) значения максимальных напряжений S_θ/p незначительно увеличиваются с течением времени, и для рассмотренных случаев их рост для плиты из алюминия составил не более 5%. Причем, с увеличением толщины разница между напряжениями в стационарном состоянии и начальном уменьшается. Для трансверсально-изотропной композитной плиты наибольшее увеличение этих напря-

жений наблюдается при толщинах плиты, соизмеримых с длиной большей полуоси отверстия и составляет 8% – 10% по отношению к упругому состоянию. При относительно малых и больших толщинах рост напряжений со временем составляет 2% – 4%;

2) минимальные напряжения S_θ / p для тонких плит уменьшаются со временем приблизительно на 30% – 50%, а для относительно толстых плит становятся отрицательными и растут по абсолютному значению, причем с увеличением толщины этот рост выраженно замедляется;

3) напряжения $S_{z\theta} / p$ для изотропной плиты с течением времени незначительно уменьшаются, и это уменьшение также замедляется с ростом толщины плиты. При длительном нагружении трансверсально-изотропной плиты значения максимальных напряжений $|S_{z\theta} / p|$ в срединной плоскости уменьшаются на 40% – 60%.

В качестве ортотропного вязкоупругого материала плиты при исследованиях рассмотрен вязкоупругий полимерный композит с эпоксидным связующим, имеющий упругие и реологические параметры (23). В связи с отсутствием в справочной литературе для данного материала значений модуля Юнга E_3, коэффициентов Пуассона ν_{31} и ν_{32}, модулей сдвига G_{13} и G_{23}, а также их реологических характеристик, они полагаются постоянными величинами, равными

$$E_3 = (E_1 + E_2)/2, \quad \nu_{31}/E_3 = \nu_{32}/E_3 = \nu_{12}/E_3, \quad G_{13} = G_{23} = G_{12}.$$

На основании принятых допущений и равенства $1/\bar{K} = 1/K$ записывается формула для вычисления $\bar{\nu}_{12}/\bar{E}_1$

$$\frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} = \frac{\nu_{12}}{E_1}\left[1 + \frac{\lambda_1}{2\nu_{12}} Э_\alpha^*(-\beta_1) + \frac{\lambda_2 E_1}{2\nu_{12} E_2} Э_\alpha^*(-\beta_2)\right].$$

Исследования напряженного состояния бесконечной плиты из такого материала с круговой полостью радиуса a проведены для случаев нагружения плиты усилиями $\sigma_1^0 = pz$ или $\sigma_2^0 = qz$ ($\sigma_6^0 = 0$). В таблице 10 для случая $2h = 0.01a$ и различных моментов времени приведены значения напряжений $S_\theta = \sigma_\theta / \sigma_i^0$ в точках плиты $A(a,0)$ и $B(0,a)$ при $z = h$.

Таблица 10

Нагрузка	Точки	S_θ				
		$t = 0$	$t = 100$ ч	$t = 200$ ч	$t = 300$ ч	$t = 600$ ч
$p = 1,\ q = 0$	A	0.478	0.426	0.428	0.430	0.433
	B	2.120	2.299	2.310	2.316	2.327
$p = 0,\ q = 1$	A	1.934	1.994	2.001	2.005	2.012
	B	0.687	0.727	0.734	0.738	0.746

Из таблицы 10 видно, что в случае изгиба плиты усилиями $\sigma_1^0 = pz$ максимальные значения напряжений S_θ возникают в точке B, растут с течением времени, и при переходе в стационарное состояние ($t = 600$ *ч.*) увеличиваются на

10%. Напряжения в точке A уменьшаются на 9.5%. В случае изгиба усилиями $\sigma_2^0 = qz$, максимальные напряжения возникают в точке A, и при переходе в стационарное состояние увеличиваются на 4%. Напряжения в точке B также увеличиваются на 8.6%. Значения максимальных и минимальных касательных напряжений $S_{z\theta} = \tau_{z\theta} / P_2$, возникающих в срединной плоскости плиты, приводятся в таблице 11.

Таблица 11

Нагрузка	Точки	$S_{z\theta}$				
	θ	$t=0$	$t=100$ ч	$t=200$ ч	$t=300$ ч	$t=600$ ч
$p=1,\ q=0$	58°	-0.638	-0.733	-0.746	-0.753	-0.767
	122°	0.638	0.733	0.746	0.753	0.767
$p=0,\ q=1$	37°	0.680	0.804	0.817	0.826	0.841
	143°	-0.680	-0.804	-0.817	-0.826	-0.841

Как видно, максимальные по модулю касательные напряжения $S_{z\theta}$ для обеих случаев нагружения плиты растут с течением времени, и при переходе в стационарное состояние увеличиваются более чем на 20%.

Таким образом, полученные на основе численных исследований результаты хорошо согласуются с известными результатами, полученными по прикладной теории. Однако, прикладная теория не позволяет сделать выводы о поведении важных для прогнозов прочности касательных напряжений $\tau_{z\theta}$, которые в отдельных рассмотренных случаях составляют около 40% от максимальных напряжений σ_θ.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертации решена актуальная проблема разработки комплекса специализированных аналитико-числовых методов для решения формулируемых в рамках неклассических моделей задач исследования двумерного вязкоупругого напряженно-деформированного состояния многосвязных анизотропных массивов и тонких анизотропных плит с отверстиями и полостями, а также выявление и систематизация установленных на основе их применения ведущих параметрических закономерностей влияния физико-механических и геометрических параметров моделей на характеристики деформирования классов изучаемых объектов. Реализованы исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния и его изменения с течением времени для анизотропных сред и элементов конструкций с отверстиями и полостями, дано решение на их основе практических задач по выявлению эффектов ползучести в горных породах с горизонтальными выработками усложненных форм сечений, а также построение решений уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных и ортотропных упругих и вязкоупругих плит.

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. С применением аппарата алгебры резольвентных операторов и матричной алгебры разработан новый численно-аналитический метод обращения операторов определяющих уравнений деформирования анизотропных вязкоупругих сред без использования аналитических представлений ядер ползучести и релаксации, позволяющий распространить область возможного применения численно-аналитических подходов на новые классы неклассических моделей деформирования вязкоупругих тел и элементов конструкций.

2. Разработана численно-аналитическая методика исследования задач линейной вязкоупругости анизотропных сред, которая для произвольных моментов времени сводится к применению алгоритмов, подобных используемым при решении задач теории упругости анизотропного деформируемого тела без учета реологических эффектов, и позволяет изучить наследственные деформационные процессы в случаях многосвязных конструкций из низкосимметричных по физико-механическим свойствам материалов.

3. Для исследования эффектов ползучести и релаксации в задачах деформирования анизотропных массивов горных пород предложен новый метод преобразования интегральных уравнений состояния к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени, эффективно применимый в проектных и технологических расчетах характеристик прочности подземных сооружений.

4. На основе применения разработанных методов и с учетом различных гипотез об упругой сжимаемости либо несжимаемости рассматриваемых конструкционных материалов впервые реализованы исследования обобщенного плоского напряженного состояния бесконечных ортотропных вязкоупругих пластин с эллиптическим свободным или жесткозакрепленным отверстием, обеспечивающие получение более адекватных практике оценок мгновенной и длительной прочности тонкостенных конструкций из современных волокнистых композитных материалов.

5. Предложен новый теоретический аналитико-числовой алгоритм построения замкнутых граничных кривых сложных конфигураций, как совокупностей участков в виде эллиптических или круговых дуг контуров пересечений либо объединений вспомогательных выпуклых областей, позволяющий в исследованиях неклассических моделей двумерного деформирования тел с локализованными неоднородностями гладких очертаний получать верифицированные расчетные результаты повышенной точности.

6. Применительно к изотропным и трансверсально-изотропным пластинам малой толщины разработан новый теоретический аналитико-числовой алгоритм редукции описывающей их изгибное деформирование системы пространственных соотношений теории упругости с получением комплекса разрешающих соотношений новой уточненной теории изгиба ослабленных отверстиями пластин указанного типа в виде системы двух двумерных дифференциальных уравнений в частных производных второго и четвертого порядка, а также описан соответствующий способ интегрирования уравнений пограничного слоя и удовлетворения краевым условиям на границах отверстий, что позволяет в сравнении с исследо-

ваниями в рамках классической теории получать в практике прочностных расчётов более адекватные оценки влияния касательных напряжений в изгибаемых тонких пластин.

7. Разработан новый теоретический алгоритм аналитико-числовой редукции описывающей изгибное деформирование ортотропных пластин системы пространственных соотношений теории упругости с переходом к новой уточненной неклассической теории изгиба тонких ортотропных пластин с отверстиями, содержащей разрешающее соотношение в виде двумерного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка, а также разработан соответствующий аналитико-числовой метод его решения и удовлетворения соответствующим краевым условиям на границах отверстий, что позволяет увеличить точность расчетных оценок прочности и надежности волокнистых композитных пластин при изгибном деформировании посредством учета существенных уровней возникающих касательных напряжений.

8. Осуществлены разработка и применение нового аналитико-числового метода определения в уточненной постановке описываемого неклассическими моделями вязкоупругого напряженно-деформированного состояния изгибаемых многосвязных изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных пластин, что является вкладом в теорию и расчетную практику получения оценок для мгновенной и длительной прочности тонкостенных пластинчатых элементов из различных типов конструкционных материалов.

9. На базе применения комплекса предложенных методов впервые выявлен и описан ряд специфических эффектов изменения напряженно-деформированного состояния геомассивов вблизи туннельных горных выработок с усложненными формами поперечных сечений в зависимости от времени их эксплуатации и физико-механических свойств вмещающих пород, что является важным вкладом в теорию и практику проектных и мониторинговых расчетов прочности подземных сооружений.

10. Впервые реализованы обобщение и систематизация востребованных в практике прочностных расчетов новых данных о закономерностях напряженно-деформированного состояния изгибаемых вязкоупругих пластин с отверстиями, которые получены на базе применения комплекса новых разработанных методов исследования неклассических моделей деформационных процессов данного типа, включая анализ зависимостей характеристик деформирования рассматриваемых конструкционных элементов от их геометрических особенностей, вида и степени анизотропии механических свойств, а также периода приложения нагрузок.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых изданиях из перечня ВАК ДНР

1. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, граница которого имеет непрерывную касательную / А.С. Космодамианский, Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Известия РАН. МТТ. – 1998. – № 3. – С. 66 – 72.

2. Нескородев Н.М. Вязкоупругая модель деформирования анизотропного массива горных пород с выработкой / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. –2005.– Вып. 1. – С. 79 – 84.
3. Нескородев Н.М. Действие сил тяжести в анизотропном массиве горных пород с частично подкрепленной выработкой / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2005. – Вып. 2. – С. 48 – 53.
4. Нескородев Н.М. Напряжения и деформации в анизотропном массиве горных пород с выработками при учете ползучести / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2007. – Вып. 1. – С. 101 – 108.
5. Нескородев Н.М. Математические модели расчета напряженно-деформированного состояния горного массива при отработке горизонтального пласта полезного ископаемого / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2008. – Вып. 1. – С. 78 – 83.
6. Нескородев Р.Н. О новом численно-аналитическом методе решения задач теории вязкоупругости анизотропных сред / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2009. – Вып. 2. – С. 7 – 15.
7. Нескородев Р.Н. Применение способа гладкой аппроксимации криволинейных отверстий в решении задач плоской теории упругости / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2010. – Вып. 1. – С. 81 – 88.
8. Нескородев Р.Н. Алгоритм построения областей сложной формы и его использование при решении задач плоской теории упругости / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2010. – Вып. 2. – С. 84 – 89.
9. Шевченко В.П. Новый метод решения задач теории вязкоупругости анизотропных сред / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Доповіді НАН України. – 2010. – № 11. – С. 52 – 58.
10. Нескородев Р.Н. Решение задачи изгиба трансверсально-изотропных плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2013. – № 1. – С. 61 – 68.
11. Шевченко В.П. Об одном варианте уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных плит / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 50 – 57.
12. Нескородев Р.Н. Метод переменных коэффициентов упругости решения задач вязкоупругости / Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2015. – Т. 29. – С. 114 – 126.
13. Нескородев Р.Н. Преобразование интегральных уравнений состояния вязкоупругих горных пород к временным уравнениям закона Гука / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 3. – С. 10 – 21.
14. Нескородев Р.Н. Ползучесть анизотропных горных пород с выработками в условиях обобщенной плоской деформации / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 4. – С. 50-57.
15. Нескородев Р.Н. Изгиб трансверсально-изотропных вязкоупругих плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 1. – С. 26 – 35.

16. Нескородев Р.Н. Об одном варианте построения уравнений уточненной теории изгиба ортотропных плит / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А.: Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 68 – 74.
17. Сторожев В.И. Ползучесть массивов анизотропных горных пород с выработками усложненной формы сечения / В.И. Сторожев, Р.Н. Нескородев // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 3-4. – С. 95 – 106.
18. Нескородев Р.Н. Вязкоупругое состояние многосвязного анизотропного горного массива с горизонтальными выработками / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – № 3 (73). – С. 18 – 24.

В рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК ДНР, включенных в Международные наукометрические базы

19. Нескородев Р.Н. Напряжения и перемещения в окрестности выработки, проведенной в области нарушенных горных пород / Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2005. – Вып. 11. – С. 99 – 105. **(Zentralblatt, MathSciNet)**
20. Нескородев Р.Н. Вязко-упругое деформирование анизотропного массива горных пород с выработками / Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2007. – Вып. 14. – С. 122 – 130. **(Zentralblatt, MathSciNet)**
21. Жабоедов А.А. Напряженное состояние массива горных пород вокруг выработки, ослабленной системой трещин / А.А. Жабоедов, Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2007. – Вып. 15. – С. 63 – 69. **(Zentralblatt, MathSciNet)**
22. Нескородев Р.Н. Численно-аналитический метод решения задач линейной вязкоупругости для анизотропных сред / Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2009. – Том. 19. – С. 168 – 177. **(Zentralblatt, MathSciNet)**
23. Нескородев Р.Н. Численное определение резольвент интегральных уравнений линейной вязкоупругости / Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2011. – Т. 22. – С 162 – 170. **(Zentralblatt, MathSciNet)**
24. Шевченко В.П. Численно-аналитический метод решения задач линейной вязкоупругости / Шевченко В.П., Нескородев Р.Н. // Прикладная механика. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 42 – 53. **(Scopus)**
25. Нескородев Р.Н. Представление решения уточненной теории изгиба изотропных плит / Нескородев Р.Н. // Известия РАН. МТТ. – 2014, № 4. – С. 65 – 73. **(Scopus)**

Публикации в других изданиях

26. Нескородев Р.Н. Определение напряженного состояния вблизи горизонтальной выработки в условиях ползучести анизотропных горных пород / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2016. – № 2 (57). – С. 14 – 23.

27. Нескородев Р.Н. Метод переменных коэффициентов упругости решения задач изгиба вязкоупругих изотропных плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 42 – 56.
28. Нескородев Р.Н. Решение задачи изгиба ортотропной плиты в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 3 4 (60-61). – С. 60 – 68.
29. Нескородев Р.Н. Методика получения разрешающих уравнений теории изгиба ортотропных плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 4 (69). – С. 32 – 38.
30. Нескородев Р.Н. Изгиб ортотропных вязкоупругих плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 4 (73). – С. 24 – 32.
31. Нескородев Н.М. Напряжения в массиве горных пород с выработкой и трещинами вокруг нее / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Труды XIV Международной научной школы им. академика С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках” (Крым, Алушта, 20 – 26 сентября 2004 г.) – Симферополь. – 2004. – С. 109 – 115.
32. Нескородев Н.М. Деформирование анизотропного массива горных пород с выработками при учете ползучести / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения И.И.Воровича (г. Ростов-на Дону, 11-15 октября 2005 г.) – Ростов-на-Дону: ООО ЦВВР, 2005. – С. 147 – 151.
33. Нескородев Н.М. Определение подходящих размеров выработки эллиптического сечения, находящейся в поле сил тяжести / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Труды XVI Международной научной школы им. академика С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках” (Крым, Алушта, 18 – 24 сентября 2006 г.) – Симферополь. – 2006. – С. 204 – 210.
34. Нескородев Р.Н. Учет упругой сжимаемости материала в теории вязкоупругости ортотропного тела / Р.Н. Нескородев // Материалы VI Междунар. науч. конф. “Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела” (Мелекино, 8-11 июня 2010 г.) – Донецк: Юго-Восток, 2010. – С. 67 – 70.
35. Нескородев Р.Н. Численное определение резольвент интегральных уравнений состояния среды при решении задач вязкоупругости / Р.Н. Нескородев // Труды XV Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (г. Ростов-на-Дону, 4 – 7 декабря 2011 г.) Т. 1 – Ростов-на-Дону, 2011. – С. 179-183.
36. Нескородев Р.Н. Варианты решений задач изгиба трансверсально-изотропных плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Труды VII Международной научной конференции “Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела” (Мелекино, 11-14 июня 2013 г.). – Т. 2. – С. 89 – 93.

37. Нескородев Р.Н. Уравнения одного из вариантов уточненной теории изгиба ортотропных плит / Р.Н. Нескородев // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Ростов-на-Дону, 14-18 октября 2013 г.). – 2013. – Т.2. – С.121–125.
38. Нескородев Р.Н. Вязкоупругое поведение анизотропного массива горных пород вблизи протяженной выработки / Нескородев Р.Н. // Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности: Материалы I Международной научной конференции (Донецк, 16-18 мая 2016 г.) – Т. 1. Физико-математические, технические науки, экология / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 38 – 41.
39. Нескородев Р.Н. Напряженно-деформированное состояние вблизи выработки эллиптического сечения в условиях ползучести анизотропных горных пород / Р.Н. Нескородев // Труды XVIII Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (Ростов-на-Дону, 7 - 10 ноября 2016 г.): в 2 т. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – Т. 2. – С. 132 – 136.
40. Нескородев Р.Н. Об одном варианте решения задач уточненной теории изгиба ортотропных плит / Нескородев Р.Н. // Донецкие чтения 2018. Образование, наука и вызовы современности: Материалы III Международной научной конференции (Донецк, 25 октября 2018 г.) – Т. 1. Физико-математические и технические науки / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. – С. 303 – 305.
41. Нескородев Р.Н. Вязкоупругое напряженное состояние анизотропных горных пород с жестко подкрепленной горизонтальной выработкой эллиптического сечения // Р.Н. Нескородев, В.И. Сторожев / Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IV Международной научной конференции (Донецк, 31 октября 2019 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1 / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2019. – С. 65-67.
42. Нескородев Р.Н. Вязкоупругое напряженно-деформируемое состояние в нарушенных анизотропных массивах с горизонтальными выработками / Р.Н. Нескородев // Труды XX Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (Ростов-на-Дону, 18 – 21 июня 2020 г.): в 2 т. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2020. – Т. 2. – С. 178 – 182.
43. Нескородев Р.Н. Об одном способе получения разрешающих уравнений уточненной теории изгиба ортотропных плит / Р.Н. Нескородев // Донецкие чтения 2020: Образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17 - 18 ноября 2020 г.) – Т. 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1 / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 84 – 86.
44. Нескородев Р.Н. Ползучесть анизотропного массива горных пород с несколькими горизонтальными выработками / Р.Н. Нескородев // Донецкие чтения 2021: Образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VI Международной научной конференции (Донецк, 26 - 27 октября 2021 г.) – Т. 1: Механико-математические, компьютерные и химические науки,

управление / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2021. – С. 54 – 56.

АННОТАЦИЯ

Нескородев Р.Н. Методы исследования неклассических моделей упругого и вязкоупругого деформирования многосвязных тонкостенных конструкций и геомассивов. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», ДНР, Донецк, 2022.

Разработана новая численно-аналитическая методика исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния анизотропных сред. Предложенный алгоритм не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Методика основана на численном определении резольвент интегральных уравнений состояния среды. Численное определение резольвент интегральных уравнений предполагает работу с табличными данными, заданными на достаточно густой сетке. Для этого предлагается способ сглаживания и восполнения таблицы экспериментальных данных. На основе таких таблиц строятся матрицы уравнений состояния, элементы которых имеют явную зависимость от времени. Эти соотношения получены на основе алгебры резольвентных операторов Вольтерра, которые не связаны с каким-либо специальным видом ядер. Решение задач вязкоупругости в произвольный момент времени приводится к тем же алгоритмам, которые используются в теории упругости.

При помощи модели слоистого массива горных пород осадочного происхождения с плоскостями изотропии, параллельными слоям, расположенными под различными углами к дневной поверхности, предложена методика исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния, возникающего вблизи горизонтальных выработок эллиптического сечения. Проведены численные исследования и установлены закономерности изменения напряженно-деформированного состояния горных массивов вблизи горизонтальных выработок с усложненными формами сечений в зависимости от физико-механических свойств пород и времени их эксплуатации.

Разработаны модели уточненных теорий изгиба изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных плит, учитывающие деформацию поперечного сдвига. Разработана методика построения и численно-аналитического решения дифференциального уравнения шестого порядка уточненной теории изгиба ортотропных плит.

Осуществлено применение методики нахождения вязкоупругого напряженного состояния к решению задач изгиба изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных плит в уточненной постановке.

Обобщены и систематизированы полученные новые данные о закономерностях напряженно-деформированного состояния пластин и геомассивов с отвер-

стиями и полостями в зависимости от их геометрических характеристик, анизотропии и времени приложения нагрузок.

Ключевые слова: вязкоупругость, ползучесть, релаксация, резольвентный оператор, анизотропное тело, горный массив, горизонтальная выработка, изгиб, уточненная теория, эллиптическая полость.

ABSTRACT

Neskorodev R.N. Methods for studying non-classical models of elastic and viscoelastic deformation of multiply connected thin-walled structures and geomassifs. – Manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.02.04 - mechanics of deformable solid. Donetsk National University, DPR, Donetsk, 2022.

A new numerical-analytical technique for studying the viscoelastic stress-strain state of anisotropic environment has been developed. The proposed algorithm does not require the construction of an analytical representation of the creep and relaxation kernels in a special form. The technique is based on the numerical determination of the resolvents of the integral equations of state of the environment. Numerical determination of the resolvents of integral equations involves working with tabular data given on a fairly dense grid. For this, a method for smoothing and replenishing the table of experimental data is proposed. On the basis of such tables matrices of equations of state are constructed, the elements of which have a clear dependence on time. These relations are obtained on the basis of the algebra of Volterra resolvent operators, which are not associated with any special kind of kernels. The solution of viscoelasticity problems at an arbitrary moment of time is reduced to the same algorithms that are used in the theory of elasticity.

Using the model of a layered rock mass of sedimentary origin with isotropy planes parallel to the layers located at different angles to the day surface, a method for studying the viscoelastic stress-strain state that occurs near horizontal workings of an elliptical section is proposed. Numerical studies have been carried out and patterns of changes in the stress-strain state of rock masses near horizontal workings with complicated section shapes have been established, depending on the physical and mechanical properties of rocks and the time of their operation.

Models of improved theories of bending of isotropic, transversely isotropic and orthotropic plates are developed, taking into account the deformation of transverse shear. A technique for constructing and numerical-analytical solution of the sixth-order differential equation of the refined theory of bending of orthotropic plates has been developed.

The technique of finding the viscoelastic stress state is applied to solving the problems of bending of isotropic, transversely isotropic and orthotropic plates in a refined formulation.

The obtained new data on the regularities of the stress-strain state of plates and geomassifs with holes and cavities are generalized and systematized depending on their geometric characteristics, anisotropy and time of application of loads.

Keywords: viscoelasticity, creep, relaxation, resolvent operator, anisotropic body, rock mass, horizontal excavation, bending, improved theory, elliptical cavity.